Entre la epistemología y la lógica. Decisión y algoritmo de ordenación

Jaime Gil-Aluja
Universidad de Barcelona

LOS LAZOS DEL RECUERDO

El primer encuentro con el profesor Soldevilla, aparece en mis pensamientos en un escenario difuso, situado en la noche del recuerdo. Su entonces joven e imponente figura, sus palabras recias, sólidas y convincentes, la propia consciencia de saberse imbuido de unas verdades sencillas pero profundas, le proporcionaba una seguridad que causaba en sus interlocutores una sensación de fragilidad, frente a una estructura de pensamiento fundada en razonamientos de una lógica sin fisuras. Era yo un joven profesor y él un estudiante, cuya madurez se había forjado en una lucha interior de objetivos, balanceados entre el servicio a la sociedad y la aspiración suprema de servicio a las almas.

Vencedor de cuantos obstáculos se interponían en un camino lleno de sinsabores, supo alcanzar, paso a paso, las metas que siempre había deseado. Durante muchos años compartimos inquietudes y conseguimos aunar a nuestro alrededor un conjunto de voluntades que con el tiempo se convertirían en focos de luz que irían iluminando las distintas parcelas del Conocimiento de la entonces llamada Economía de la Empresa. Se convertiría, así, Don Emilio, en maestro de maestros, en el más estricto sentido. Hemos repetido en múltiples ocasiones que «un profesor se convierte en maestro cuando es capaz de crear su propia concurrencia». Pues bien, el profesor Soldevilla constituye un ejemplo paradigmático de dar todo de lo mucho que poseía a quienes tuvieron la fortuna de ser sus discípulos. El fruto de sus enseñanzas resulta visible ya hoy, pero lo será aun más en el futuro, por cuanto el árbol de conocimiento que nos ha legado se halla asentado en profundas raíces.

En nuestros orígenes, tuvimos la suerte de beber en las mismas fuentes y, de la mano de un maestro común el profesor Mario Pifarré, íbamos descubriendo el nuevo mundo que se abría ante nuestros ojos, lleno de esperanzas y también, bien es cierto, repleto de asechanzas. Por primera vez, en misión oficial, atravesamos la frontera en momentos difíciles. Tímidamente exponíamos, en universidades y centros de enseñanza franceses, nuestros trabajos, con la esperanza de una buena acogida en un ambiente hostil. El carácter alegre y la risa contagiosa de Don Emilio rompía todas las barreras construidas por tantos y tantos prejuicios. El anecdotario que se podría escribir de las vivencias a lo largo de nuestras andanzas de aquella época ocuparía varios volúmenes.

Una de ellas aparece y reaparece una y otra vez en mi memoria en una mezcla de cariño y admiración. Nos hallábamos en París, con ocasión de una de las muchas misiones oficiales propiciadas por el gobierno francés. Coincidimos, no recuerdo las circunstancias del encuentro, con el famoso pintor Juan Abelló en un «bistrot», contemplando, delante de un vaso de vino, el atardecer de una ciudad ebria de luces. Hablábamos de arte, de economía y … ¡de lo fácil que es solucionar todos los problemas que aquejan a la humanidad!. Emilio, había cogido un pañuelo de papel de los que habitualmente hay en este tipo de establecimientos y lo iba emborronando, distraidamente, con frases encadenadas. De vez en cuando intervenía con alguna pregunta que intentábamos contestar sin prestarle demasiada atención. En un determinado momento nos interrumpió con su típica expresión: «bueno, ya está» y nos mostraba el retazo de papel ennegrecido por la tinta. Acababa de escribir el conocido artículo «La formación empresarial francesa y la pintura de Joan Abelló»[1] publicado en la revista «Management», el cual alcanzó el premio MARKEDIT como el mejor trabajo sobre marketing del año. Para él era fácil, lo que para tantos otros resulta complejo.

Pero esto no puede extrañar a quienes conocemos la formación e inquietudes del profesor Soldevilla y su permanente búsqueda de los fundamentos básicos de la construcción del Conocimiento. Quienes sabemos de sus continuos escarceos, urgando en los más recónditos espacios de la epistemología y de la lógica, para «explicar» cómo se va construyendo la ciencia que busca las verdades, buceando en la fenomenología empresarial. El supo ver, con la claridad de los elegidos, que es necesario estudiar los dispositivos del pensamiento capaces de apreender las realidades, buscando la certeza de las leyes que ligan sujeto y objeto del conocimiento. Pero nunca olvidó que también existen encadenamientos mentales, en forma de leyes, capaces de guiar la razón de manera adecuada y por ello se sirvió de los mecanismos de la lógica formal y descendió a su expresión simbólica mediante las matemáticas.

Nuestro caminar en busca de nuevos espacios para el conocimiento siguió, a partir de un cierto momento, senderos distintos, aunque en ningún caso incompatibles. Nuestra vieja amistad resistió todos los vendavales propiciados por la propia naturaleza de las cosas y por la ambición de advenedizos ávidos de posicionamientos falaces. Sólo la muerte, siempre temprana y en él más que nunca inoportuna, fue capaz de romper nuestros lazos de amistad. Lo que no ha conseguido es alejar de nosotros su ejemplo de hombre de bien y su recuerdo de hombre de ciencia.

SOBRE EL CONCEPTO DE ORDEN

Creemos que a Don Emilio le hubiera gustado ver cómo sus amigos reflexionaban sobre uno de los aspectos que más le atraía investigar dentro de los dispositivos que conducen el comportamiento lógico hacia el conocimiento de las realidades sociales, económicas y de gestión. Nos referimos a los elementos que componen y circundan el concepto de «comparación». Se trata de uno de los problemas del pensamiento humano

[1] Soldevilla García, Emilio: «La formación empresarial francesa y la pintura de Juan Abelló». Premio MARKEDIT 1975 otorgado por el Club de Dirigentes de Marketing de Barcelona, publicado en «Management» n.º 16, noviembre1974, pág. 2-5.

que trasluce en todo el árbol de la ciencia y que la matemática ha abordado con todo el necesario rigor. Pero también la comparación entre dos objetos abstractos o concretos puede ser sustentada por la subjetividad humana y hallarse ligado, así, a la noción de preferencia.

Los humoristas utilizan, frecuentemente, la proposición correctamente ordenada «es mejor ser sano y rico que enfermo y pobre». Pero las proposiciones permutadas «salud con pobreza» o «enfermedad con riqueza» ya no resultan comparables. La elección resulta subjetiva. Esta observación banal se halla en el fundamento de todos los pensamientos y decisiones, sean cuales fueran las situaciones que se consideren. Si dos objetos son comparables, se elige normalmente el que domina en la preferencia. Si no lo son, la elección resultará imposible, a no ser que se incorporen nuevos criterios para la elección que pudieran conducir a una comparación y de ahí a una preferencia.

Estos aspectos psicológicos son objeto, en matemática, de un estudio teórico que ha sido muy analizado y que resulta de una utilidad práctica indiscutible. Esta teoría ha sido denominada «teoría de los conjuntos ordenados».

En uno de nuestros recientes trabajos[2] emprendíamos la tarea de elaborar una estructura teórica capaz de suministrar elementos suficientes para la adopción de decisiones basadas en la ordenación, cuando la incertidumbre no permite la estimación de magnitudes numéricas, ni en el ámbito de la certeza o del azar, ni en el campo de la incertidumbre. Para conseguir este objetivo se partía de un conjunto finito E y de una relación R de su producto cartesiano E × E, lo que se acostumbra a denominar «relación binaria». Así, pues, el punto de arranque era:

$$R \subset E \times E$$

Algunas de estas relaciones cumplen ciertas propiedades entre las que destacan la reflexibilidad, simetría, transitividad y antisimetría[3]. La antisimetría y la transitividad permiten la definición de una «relación de orden». Entre las relaciones de orden aparecen las relaciones de orden total o lineal cuando dos elementos cualesquiera de E son comparables, siendo E un conjunto ordenado. Por el contrario, cuando los elementos de E no son todos comparables, se dice que el orden es parcial.

A partir de estos conceptos, suficientemente conocidos, nos proponemos avanzar en el conocimiento de las relaciones, elemento básico de la epistemología. Para ello, introduciremos otro eslabón formado a partir del concepto de «cadena de un conjunto ordenado».

Si E es un conjunto ordenado mediante la relación de orden R, se dice que un subconjunto A no vacío de E es una cadena cuando está totalmente ordenado por R.

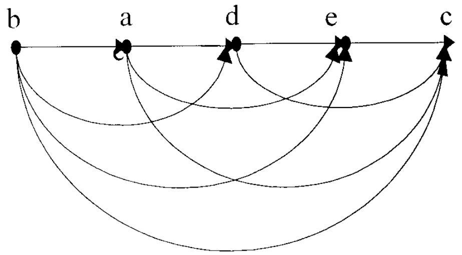
Si R fuese una ordenación total para E, el propio conjunto E y todos sus subconjuntos son cadenas. Una cadena que no se halla contenida en ninguna otra se denomina CADENA MÁXIMA.

La siguiente relación R_1 expresada en forma sagitada y matricial constituye una relación de orden total.

---

[2] Gil-Aluja, J.: *Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre*. Ed. Milladoiro. Vigo 1999, pág. 265-338.

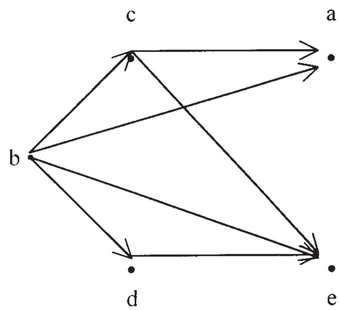
[3] Gil-Aluja, J.: *Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre*. Ed. Milladoiro. Vigo 1999, pág. 44-63.



$R_1 =$

	a	b	c	d	e
a			1	1	1
b	1		1	1	1
c					
d			1		1
e			1		

La relación R_2, presentada a continuación, expresa una relación de orden parcial, en la que aparecen tres cadenas máximas: bca, bce y bde.



$R_2 =$

	a	b	c	d	e
a					
b	1		1	1	1
c	1				1
d					1
e					

Tanto el orden parcial como el orden total pueden ser «estrictos» o «no estrictos». La diferencia entre el uno y el otro se halla en el hecho de que no existan bucles en el grafo sagitado o, lo que es lo mismo, unos en la diagonal principal de la matriz (orden estricto), o bien que sí se dan tales circunstancias (orden no estricto).

Se ha convertido en un hábito representar las relaciones de orden de la siguiente manera. Si $(x, y) \in R$:

$x \prec y$ para una relación de orden estricto
$x \preccurlyeq y$ para una relación de orden no estricto

En el supuesto de una relación de orden total se pueden utilizar las notaciones:

$x < y$ para una relación de orden estricto
$x \leq y$ para una relación de orden no estricto

Para una cadena, se escribe:

$$x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_r$$

y si se trata de una cadena con orden total estricto:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Hechas estas breves reflexiones a efectos de recopilación y recordatorio nos hallamos en situación de entrar en los aspectos centrales de nuestro trabajo.

DIAGRAMA DE HASSE PARA UNA RELACIÓN DE ORDEN

Dada una cadena $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ representada por los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si unimos mediante trazos x_1 con x_2, x_2 con x_3, …, y x_{n-1} con x_n, se expresan, entonces, todas las posibles cadenas máximas de una relación de orden. Luego, todas las partes comunes de las cadenas máximas serán unidas en un mismo trazo. La figura así obtenida se denomina DIAGRAMA DE HASSE de la relación de orden dada.

Veamos un ejemplo. Sea el referencial:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$$

Supongamos que la relación de orden sea estricta y dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1			1			1	1		
x_2							1		
x_3						1	1		
x_4	1		1			1	1		
x_5		1					1		1
x_6									
x_7									
x_8		1			1		1		1
x_9		1					1		

A partir de estas informaciones nos proponemos hallar las cadenas máximas. Para ello se empieza por enumerar todas las cadenas, para seguidamente eliminar aquellas cadenas que se hallan incluidas en otra.

Pasamos a desarrollar de manera exhaustiva nuestro caso. Se tiene:

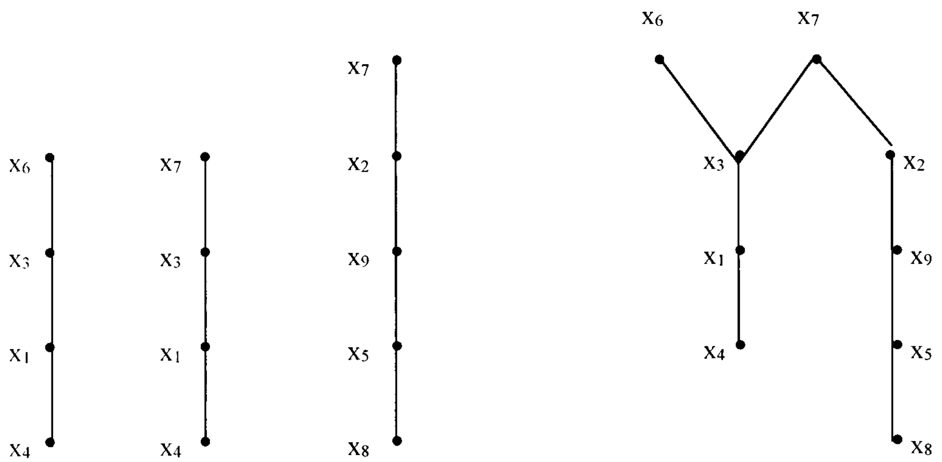
$x_1 < x_3 < x_6$
$x_1 < x_3 < x_7$
$x_1 < x_6$
$x_1 < x_7$
$x_2 < x_7$
$x_3 < x_6$
$x_3 < x_7$
$x_4 < x_1 < x_3 < x_6$
$x_4 < x_1 < x_3 < x_7$
$x_4 < x_1 < x_6$
$x_4 < x_1 < x_7$
$x_4 < x_3 < x_6$
$x_4 < x_3 < x_7$
$x_4 < x_6$
$x_4 < x_7$
$x_5 < x_2 < x_7$
$x_5 < x_7$
$x_5 < x_9 < x_2 < x_7$
$x_5 < x_9 < x_7$
$x_8 < x_2 < x_7$
$x_8 < x_5 < x_2 < x_7$
$x_8 < x_5 < x_7$
$x_8 < x_5 < x_9 < x_2 < x_7$
$x_8 < x_5 < x_9 < x_7$
$x_8 < x_7$
$x_8 < x_9 < x_2 < x_7$
$x_8 < x_9 < x_7$
$x_9 < x_2 < x_7$
$x_9 < x_7$

De las cadenas halladas se obtienen, una vez realizadas todas las eliminaciones, las siguientes cadenas máximas:

$x_4 < x_1 < x_3 < x_6$
$x_4 < x_1 < x_3 < x_7$
$x_8 < x_5 < x_9 < x_2 < x_7$

Existen otros procedimientos de eliminación más rápidos. Hemos escogido este por cuanto es de fácil visualización. En general, sin embargo, para los problemas más frecuentes, se parte de las cadenas para obtener la relación.

Colocamos una al lado de otra las tres cadenas máximas, partiendo, en cada una de ellas, del elemento que está más a la izquierda, que lo colocaremos en la parte inferior. Luego se formará una única cadena, reuniendo en una las partes de cadena idénticas. En nuestro caso nos proporcionará las figuras siguientes:



Se ha hallado, así, el diagrama de Hasse buscado.

OBTENCIÓN DE LA RELACIÓN DE ORDEN

El problema de la selección entre varios objetos, cuando no es posible una asignación numérica objetiva o subjetiva, puede ser resuelto a partir de la ordenación de los mismos, sea de mayor a menor o de menor a mayor, según el planteamiento realizado. Es en este caso cuando, a partir del diagrama de Hasse, se puede alcanzar el objetivo deseado, mediante un sencillo algoritmo:

Proponemos, para hallar la función ordinal del diagrama de Hasse el siguiente algoritmo[4].

1. Se parte del diagrama de Hasse.

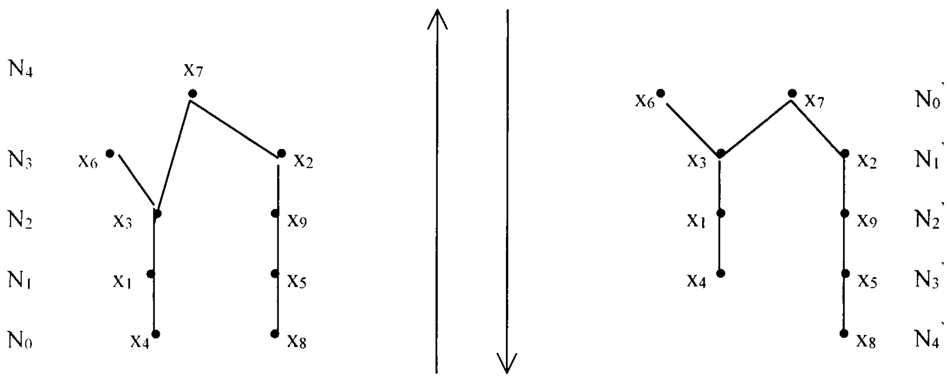
---

[4] Kaufmann, A. y Gil-Aluja, J.: *Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas*. Ed. Pirámide. Madrid 1995, pág. 43-46.

2. Se consideran los vértices sin predecesor (aquellos puntos a los que no llega ningún segmento) los cuales forman el nivel N_o.
3. Tachamos en el diagrama todos los vértices pertenecientes a N_o y suprimimos todos los segmentos que de ellos salen, obteniendo así un nuevo diagrama.
4. En el nuevo diagrama obtenido se buscan los vértices sin predecesor, con los cuales se forma el nivel N_1.
5. Se vuelve a 3) pero sin los vértices relativos a N_1, y así sucesivamente hasta agotar el diagrama.
6. Con la desaparición del diagrama se obtiene el apetecido orden a través de los niveles $N_o, N_1, N_2, \ldots, N_i$.

Este algoritmo es válido tanto para hallar la función ordinal como la función ordinal inversa. En el primer caso al algoritmo se inicia desde abajo hacia arriba, y en el segundo de arriba abajo.

Para el diagrama de Hasse de nuestro caso resultan las siguientes figuras, en las cuales se indican los niveles ascendientes y descendientes.



A partir de estos diagramas, ya debidamente ordenados, resulta fácil establecer las prioridades entre cada uno de los elementos del conjunto E. Esto no impide que aprovechemos, a efectos decisorios, algunos de los conceptos que la matemática pone a nuestro servicio. Nos referimos a los elementos mínimo y máximo de una relación de orden. Pasemos primero a su definición para pasar, después, a ver algunas ilustraciones a guisa de ejemplo.

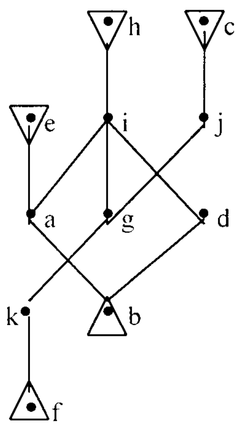
Un elemento x_i de un conjunto E ordenado es MÍNIMO si no existe otro elemento de E que sea inferior.

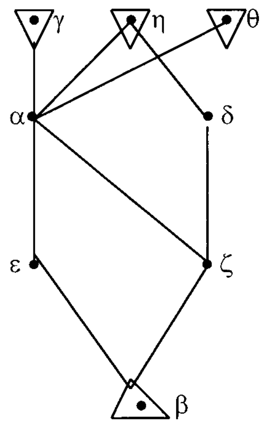
$$x_i \in E \text{ es mínimo de } E \Leftrightarrow (\forall\, x_j \in E \; x_j \leqslant x_i \Rightarrow x_j = x_i)$$

Por otra parte un elemento x_i de un conjunto E ordenado es MÁXIMO si no existe otro elemento de E que sea superior.

$$x_i \in E \text{ es máximo de } E \Leftrightarrow (\forall\, x_j \in E \; x_j \geqslant x_i \Rightarrow x_j = x_i)$$

Veamos un par de supuestos:





En la primera figura e, h y c son los elementos máximos del conjunto ordenado {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k} mientras que b y f son los elementos mínimos. En la segunda figura γ, η, θ son los elementos máximos del conjunto ordenado $\{\alpha, \beta, \delta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\}$ y β es el elemento mínimo.

Evidentemente, en una cadena finita con orden total existe un solo elemento mínimo y un solo elemento máximo.

Finalmente, resulta evidente que la elección basada en la ordenación, recaerá en el «menor» o en el «mayor» elemento del conjunto de objetos sobre los que puede materializarse la decisión. Desde una perspectiva matemática también quedan definidos estos términos. Así:

Un elemento x_i de un conjunto ordenado E es el MENOR ELEMENTO de E o PRIMER ELEMENTO si es inferior a todos lo otros:

$$x_i \in E \text{ es el menor elemento de } E \Leftrightarrow (\forall\, x_j \in E\ x_i \leqslant x_j)$$

Respectivamente un elemento x_i es el MAYOR ELEMENTO DE E o ÚLTIMO ELEMENTO si es superior a todos lo otros:

$$x_i \in E \text{ es el mayor elemento de } E \Leftrightarrow (\forall\, x_j \in E\ x_i \geqslant x_j)$$

De esta manera, el conjunto ordenado de la primera figura de las últimas expuestas a título de ejemplo, no posee ni menor ni mayor elemento, ya que existen elementos no comparables, es decir, es un orden parcial. En cambio, el conjunto de la segunda figura posee un menor elemento que es β y, en cambio, no posee un mayor elemento.

Como puede observarse, si un conjunto ordenado posee un elemento mínimo (respectivamente máximo) único, éste será el menor elemento (respectivamente el mayor elemento).

CONSIDERACIONES FINALES

He aquí algunos elementos de la matemática combinatoria, escogidos sin otro criterio que el de ser fácilmente visualizados para poner en evidencia el aspecto altamente significativo que poseen para la construcción de una epistemología de la economía y gestión de empresas. Y todo ello en torno a uno de los conceptos más destacados de este ámbito del conocimiento cual es el de decisión. El razonamiento lógico expresado mediante símbolos, permite, en sí mismo, un enriquecimiento de los espíritus, pero cuando es puesto al servicio de la «explicación» de la realidad, alcanza una dimensión de incalculable importancia.

El profesor Soldevilla luchó a lo largo de muchos años para inculcar a las jóvenes generaciones el espíritu que debe animar la investigación científica. Estimulaba a quienes preparaban sus trabajos a ser rigurosos. Como otros compañeros en las tareas docentes, no podía concebir una obra bien hecha sin que destilara las más puras esencias de una conceptualización y una metodología sustentadas en unos buenos fundamentos de la «Teoría de Ciencia». Es por ello que creía que todo proyecto docente e investigador debe contener retazos suficientes para poner de manifiesto un manejo fluido de la lógica y la epistemología. El dio el ejemplo, entre otros, publicando un trabajo[5] que ha sido obligada referencia para todos quienes, de manera sencilla a la vez que estricta, deseaban conocer los estrechos vericuetos por los que desarrollar su actividad investigadora. Fue generoso en el más estricto sentido de la palabra, proporcionando a quienes formaban su entorno el cariño, sostén y apoyo que el mejor de los padres da a sus hijos. Y así formó un círculo de privilegiados universitarios que constituyen una auténtica escuela con sello diferenciador propio.

Para él, depositario fiel de sólidas creencias basadas no sólo en una fe firme y serena sino también en el estudio de la teología cristiana, su desaparición sólo ha sido un tránsito hacia otra vida de reencuentro con el Ser Superior. Para quienes no tenemos la inmensa dicha de haber sido ungidos de esta virtud teologal en toda su intensidad y deambulamos entre dudas e incertidumbres, deseamos encontrar aunque sólo sea un punto, un solo soporte, en donde sostener nuestras ansias de inmortalidad. Una vez desaparecido el cuerpo es quizás el alma, a través de nuestros pensamientos, quien permanece. Emilio creó, explicó y divulgó entre los suyos razonamientos originales. Sus discípulos los han aprendido y asumido. Si son capaces de expandirlos de manera que pasen de generación en generación, el profesor Soldevilla continuará presente entre los suyos. De esta manera a través de sus pensamientos, Don Emilio habrá alcanzado la inmortalidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GIL-ALUJA, J. (1999): Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre. Ed. Milladoiro. Vigo.

KAUFMANN, A. Y GIL-ALUJA, J. (1995): Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas. Ed. Pirámide. Madrid.

SOLDEVILLA GARCÍA, EMILIO (1974): «La formación empresarial francesa y la pintura de Juan Abelló». Premio MARKEDIT 1975 otorgado por el Club de Dirigentes de Marketing de Barcelona, publicado en Management n.º 16, noviembre.

SOLDEVILLA GARCÍA, EMILIO (1995): «Metodología de investigación de la economía de la empresa». Revista Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa». Vol. I.

[5] Soldevilla García, Emilio: «Metodología de investigación de la economía de la empresa». *Revista Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*. Vol. I 1995, pág. 13-64.