Estrukturalismoaren balantze bat matematikan

ENETZ EZENARRO*

ILCLI eta Matematika eta Zientzia Esperimentalen Didaktika Saila
Euskal Herriko Unibertsitatea

(An assessment of structuralism in mathematics)

Abstract

The structuralist view of mathematics was quite extended among mathematicians in the second half of the twentieth century. This paper attempts to assess the extent of this perspective of mathematics, in its various forms, in providing a unifying framework for mathematics. The paper is divided into two parts. The first part is devoted to the study of the genesis and development of structuralism in algebra. The second one presents, on the one hand, Bourbaki's work in particular, and, on the other hand, the contributions of some category theorists to the extension of structuralism to mathematics in general. After pointing out the widely accepted weaknesses of Bourbaki's enterprise, I discuss the different positions we can find under the general term of 'categorical structuralist perspective'. We see that, even though some positions are more acceptable than others, they all have a fundamental problem. Category theory has clearly shown the central role played by the general notion of function, but the broad categorical framework hides in some degree this aspect in favor of the notion of structure (category). This notion is important, but it is not the most relevant one to understand the internal organization of mathematics.

Keywords: *internal foundations of mathematics, Galois, Dedekind, Van der Waerden, Bourbaki, structuralism, categorical structuralism.*

*Eskerrak eman nahi dizkiet testua arretaz irakurri eta zuzenketak iradoki dizkidaten txostengileei.

1. Sarrera

Hilbertek aipatzen zuen edozein zientziaren garapenean bazirela bi indar nagusi. Batetik emaitza berriak lortuz esparrua zabaltzera bultzatzen zutenak eta bestetik esparruaren zati desberdinen estruktura logikoaren argipena eta sinplifikazioa eskatzen zutenak (Corry 1996). Dieudonnéren terminologia erabiliz abangoardia eta erretagoardia bezala izendatu ditzakegu bi indarrak (Dieudonné 1970). Matematika ez da salbuespena zentzu horretan. Badu ordea matematikak beste zientziengandik neurri batean bereizten duen ezaugarri bat. Balizko arrazonamendu matematiko idealaren izaera deduktiboa hain zuzen ere. Ezagutza matematiko frogagarria emateaz gain ezagutza horren osagai desberdinen arteko erlazio logikoak agerian uzten dituena. Horixe da besteak beste Euklidesen Elementuek, dakigunez lehenbizikoz, agerian jarri nahi izan zutena: jatorrizko (oinarrizko) definizio eta proposizio batzuetatik dedukzioz eraiki daitezkeen proposizioen bilduma bat dela matematika. Hor sortzen da gaur oraindik indarrean dirauen eraikin matematikoaren ikuspegia.

Matematikaren oinarriei buruz jardungo dugu guk hemen. Diziplina honek izen beretsua hartzen du hizkuntza desberdinetan: “foundations of mathematics” ingelesez, “fondements des mathématiques” frantsesez, “grundlagen der mathematik” alemanez, “fundamentos de la matemática” gazteleraz... Eraikuntza matematikoari erreferentzia inplizitua egiten zaio terminologia hau erabiliz, Euklidesekin sortutako irudia egiazko bezala asumituz, bere eginkizuna eraikin matematikoaren oinarrian zer jartzen den argitzea bailitzan.

Matematikaren oinarriei buruz ez ezik matematikaren barne oinarriei buruz jardungo dugu guk ordea. Terminologia hau erabilita argi utzi nahi izan dugu, eraikin matematikoari kanpotik, eta bereziki logika eta filosofiatik, oinarri seguruak jartzeko ahaleginek gaur gaurkoz inongo errelebantziarik ez dutela kontsideratzen dutenekin bat egiten dugula. Gödelen limitazio teoremek metamatematikan sortutako desilusioaren ondotik matematikaren oinarrien inguruan indarra hartuz joan den ikuspuntu bat da hau.

Hasieran gogora ekarri dugun Hilberten aipamenaren haritik, teoria matematikoen errigorizatze, berrantolatze eta orokortze prozesuetan jarri nahi izan dugu arreta. Matematikaren barne dinamikaren baitako argipen eta sistematizazio prozesu hauek dira guk matematikaren barne oinarritze prozesuak deitu ditugunak. Matematikaren antolaketarekin zerikusi gehiago dute, beraz, eraikin matematikoaren oinarriak bilatzearekin baino. Hala ere, oinarriena terminologia diziplinarra bihurtu den heinean onartu eta erabiliko dugu. Matematikaren izaera argitzera bideratutako edozein ahaleginek era honetako argipen prozesuak aztertzetik abiatu beharko lukeela uste dugu. Matematikaren filosofiak, esaterako.

XIX. mendearen erdialdetik XX. mendearen erdialdera matematika guztiz eraberritu zen jakintza arlo moduan (Dieudonné 1979). Iraultza honen ondorioz sortutako matematika berriari "matematika moderno" edo modu zehatzagoan "matematika estrukturalista" deitu izan zaio (Dieudonné 1979, Stein 1988, Corry 1996), azken honen kasuan paradigma aldaketaren izaera ezaugarritu nahian. Estrukturalismoak matematikaren baitan eta bereziki matematikaren barne oinarrietan eginiko bidea aztertu eta balantze bat egitea da gure asmoa artikulu honetan. Ikusiko dugunez aljebraren baitan eman zen lehendabizi aipatutako paradigma aldaketa hori, mende baten buruan aljebraren ikuspegi klasikoa guztiz itxuraldatu zuena. Galois, Dedekind eta Van der Waerdenen lanek, nolabait, aljebraren ikuspegi estrukturalistaren garapenean hiru fase bereizteko aukera ematen dutela uste dugu. Ikuspegi hori matematika osora hedatzeko ahalegina etorriko da horren ostean.

Évariste Galoisen lanetan ikusten da argien iraultzaren genesia aljebraren baitan (Van der Waerden 1985). Maila txikietako ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko ebazpenak emateko metodo ezagunen azterketatik, eta ekuazio polinomiko orokorra erradikalen bidez ebazteko metodo orokor bat bilatzeko, Lagrangek XVIII. mendearen bigarren erdian egindako lanetatik abiatuta, jatorrizko problemaren permutazio teoriaren baitako talde-teoriazko karakterizazio bat ematea lortu zuen Galoisek (1846) bere memoria famatuan (Wussing 1969, Kiernan 1971). Problema orokorraren funtsa osotasunean harrapatzeko ikuspuntu abstraktuago baten beharraz ohartu zen Galois. Ikuspuntu berriaren funtsezkoagotasuna problema partikular guztiak aldi berean soluzionatzean zetzalarik. Objektu konkretuetatik (ekuazioak) abstraktuetara (ekuazioen erroen permutazio-talde jakinak) pasatuz lortzen zen ikuspuntu berria, estrukturalista deitzen duguna.

Galoisek aljebran lan egiteko modua aldatu bazuen, paradigma metodologiko berria sistematikoki erabili zuen lehenbizikoa Richard Dedekind izan zen. Berea da, esate baterako, Galoisen ideiei, oinarrizko kontzeptuen definizio argiak emanez eta metodo axiomatikoa baliatuta, argumentazio sendo eta antolaketa kontzeptual argi bat emateko lehenbiziko ahalegina (Corry 1996). Metodologia estrukturalista heldu bat garatu zuen Dedekindek denborarekin, lehenbizi matematikaren oinarrietan, eta gero, zenbakien teoria aljebraikoan egindako lanetan agerian geratuko zena (Reck 2003, Avigad 2006).

Dedekindek urratutako bideari jarraipena eman zioten, batez ere, Artin eta Noetherrek, estruktura aljebraikoen ideian sakonduz eta hauen arabera teoriak modu sistematikoan garatuz, bide batez, aljebra berriaren ikuspegi homogeneo bat bideratu zutelarik. Bide honetatik jarraituta aljebraren ikuspegi estrukturalistaren lehendabiziko azaltze sistematikoa da Van der Waerdenek 1930 eta 1931n argitaratutako *Moderne Algebra* lanean aurkitu dezakeguna. Van der Waerdenen ekarpena ez da eduki matematikoei dagokiena, hauen antolaketa eta aurkezpenari buruzkoa baizik. Matematikan teoriak antolatzerakoan estrukturek joka dezaketen paper garrantzitsua zein zen erakusten zuen lan honek, gaur egunera arte iritsi zaigun aljebraren ikuspegi berria finkatzearekin batera.

Estruktura aljebraikoen kontzeptua orokortuta aljebrak izandako berrantolaketa matematika osora hedatzeko ahalegin bezala ikus daiteke Nicolas Bourbakiren ahalegina. Multzo teoria eta metodo axiomatikoa oinarri hartuta, aljebran ikasitako estrukturen homologoak matematikaren beste adarretan definituz, bi helburu lortu nahi izan zituen: matematika modu argian berrantolatu eta eraikuntza matematikoaren batasuna agerian jarri (Bourbaki 1948). Matematikaren barne oinarritzea argituko luke proiektu honek burura eraman izan balitz. Baziren ordea bateratze horretatik kanpo geratu ziren matematikaren adar garrantzitsuak: probabilitate teoria, matematika aplikatua orokorrean, eta zer esanik ez gaur egun bereziki modu zabalean ulertutako konputazio zientzien zabalkundearekin... Matematikaren batasuna beste oinarri batzuren gainean azaldu beharko da, izatekotan ere, Jean-Pierre Kahane edo Michel Demazurek esaten duten bezala (Mashaal 2002).

Estrukturalismo kategoriala deitu izan den bidea da matematikaren ikuspegi estrukturalistaren baitan ireki izan den azkeneko bide nagusia. Kategorien teoriak estrukturak eta hauen arteko erlazioak aztertzeko markorik egokiena eskaintzen duen ideia du ikuspegi honek oinarrian. Aurkeztu diren proposamen desberdinak bi multzo nagusitan sailka daitezkeela uste dugu. Lawvere izango genuke lehenbiziko bidearen urratzailea eta ordezkari nagusi bat, matematikaren oinarri bezala proposatu izan dituen topos desberdinekin (Lawvere 1964, 1966). Estrukturalismo kategorial "fundamentista" deitu dugu bide hau. Honen ondoan, bestalde, Mac Lanek (1992) iradoki eta Awodeyk (2004) abiatutako bidea izango genuke, zentzu klasikoan oinarririk beharko ez lukeen matematikaren ikuspegi kategoriala hobesten duena, eta beraz, estrukturalismo kategorial "ez-fundamentista" deitu duguna. Gure ustetan matematikaren ikuspegi kategorialaren bertute nagusia estrukturak ulertzeko morfismo eta funktoreek duten garrantzia agerian jartzearena da, baina horretarako ez da ezinbestekoa kategorien teoriaren baitatik aritzea.

2. Estrukturalismoa aljebran

2.1. Évariste Galois

Galois iritsi arte aljebra hein handi batean ekuazio polinomikoen ebazpenerako teknikak bilatzen zituen matematikaren esparrua bezala deskriba zitekeen[1]. Galoisen garaian ekuazio polinomikoen ebazpenari buruzko ezagutzak noraino iristen ziren labur ikustea egokia da puntu honetan, Galoisen lanaren tamaina eta garrantzia hobeto ikusteko[2].

Eskola urteetatik guztioi hain ezaguna egiten zaigun formula koadratikoa edo ekuazio polinomiko koadratikoen erroak erradikalen bidez kalkulatzeko formularen oinarrian dagoen 'karratua osatzearen' teknika, Babiloniarren garaitik erabilia zen, esaterako, manipulazio geometrikoetan. Eta, jadanik al-Khawarizmik (780-850) sistematikoki landu zituen bere *al-Jabr* lanean. Ez zen aurrerapen nabarmenik izango ez matematikan orokorrean, ez eta konkretuki aljebran ere, hurrengo zazpirehun urteetan. Matematika europarraren lehen fasea greziarrek eta arabiarrek eginikoaren errepikapen estatikoan oinarritu zen.

Escipione del Ferro (1465?-1526), Niccolo Fontana "Tartaglia" (1499 edo 1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576) eta Ludovico Ferrari (1522-1569) XVI. mendeko matematikari italiarrak izan ziren hainbesteko geldialdiaren ostean aurrerapen matematiko esanguratsuak egiten hurrengoak. Cardanok bere *Ars Magna* liburuan aipatzen du, adibidez, del Ferro izan zela ekuazio kubiko orokorrarentzat erradikalen bidezko soluzioa ematen lehenbizikoa, gero berak bere liburuan jasoko zuena beste metodo berritzaile batzuekin batera. Ekuazio koadratikoaren kasuan jarraitutako metodoaren analogoa jarraitu zuen ekuazio kubikoaren erradikalen bidezko soluzioa emateko. Ferrarik ekuazio koartikoa, erresolbente kubiko baten laguntzaz, erradikalen bidez soluziona daitekeela erakutsi zuen, eta hau ere jaso zuen Cardanok. Ekuazio klase desberdinen soluzioak emateaz gain, *Ars Magna* liburuan beste bi aurrerapen garrantzitsu ere abiatu ziren: zenbaki negatibo eta konplexuen nolabaiteko ezagutzarena, hain zuzen ere. Zenbaki negatiboen erro karratuak, zenbakitzat hartu beharrean kalkuluetan, tarteko balio laguntzailetzat hartu zituzten hasieran, ohiko erregela aritmetikoak aplikatuz ekuazioen soluzio esanguratsuak lortzeko balio zutela ikusi zutenean[3]. Gerora

[1] Corryk defendatzen du aljebraren ikuspegia ez dela Galoisekin aldatzen, Van der Waerdenekin baizik. Ikusi (Corry 1996), bereziki 1. kapitulua.

[2] Ikusi (Tignol 2001) eta (Bewersdorff 2004) Galoisen teoriaren garapen historiko-metodologikoaren zehaztasunak ulertzeko.

[3] Horrela gertatu zen, besteak beste, Rafaele Bombelliren (1526-1572) lanetan.

erabateko zilegitasuna lortuta, beren horretan azterketarako interesgune bilakatuko ziren zenbaki konplexu izena hartuta.

Ars Magna-n jasotako ekuazio kubiko eta koartikoaren soluzioek berriro ere bi mendeko geldialdi bat ekarri zuten. Denbora hori guztia behar izan zuten matematikariek metodo berriek ekarritako ideia berriak aztertu eta ondo ulertzeko. Batetik notazioari lotutako zailtasunak gainditu behar izan ziren, aurrekoek erabiltzen zuten notazioak ez baitzuen ekuazio aljebraikoak lantzeko bide eraginkorrik ematen (Cajori 1974). Bestetik, eta aurrekoari lotuta, poliki hau ere, polinomioaren eta ekuazio polinomiko orokorraren ideia azaleratu zen. Honela sortu zen, kasu partikularrak albo batera utzi gabe, ekuazio polinomiko orokorra modu sistematikoan aztertzeko beharra. Bi mendeko tarte horretan aurrerapenik esanguratsuena François Viètek (1540-1603) eginikoa izan zen. 1591n kaleratutako *In artem analyticem isagoge* aipatutako bi zentzuetan ekarpenak egin zituen. Berari zor zaio, besteak beste, ekuazio batean agertzen diren kantitate ezagun nahiz ezezagunak hizkien bidez adierazteko ohitura emankorra. Bereziki garrantzitsua izan zen kantitate ezagunak hizkien bidez adierazteko ideia, zenbakizko adibide konkretuetatik adibide orokorretan pentsatzeko aukera ematen zuen heinean. Horrez gainera, espresio aljebraikoen trataera formala ere ekarri zuen, zenbakiekin beharrean hizkiekin kalkuluak nola egiten ziren erakutsiz.

Notazioari lotutako berrikuntzez gain, ekuazio polinomiko orokorren propietate desberdinak aurkitu zituen: emaitzak aldatu gabe ekuazio batek onartzen dituen transformazioak; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erroak dituen ekuazioa eraikitzeko metodoa, polinomioaren koefizienteak erroen *oinarrizko polinomio simetriko* bezala interpretatuz, *Vièteren erroen teorema* deitu izan denean[4]. Bada ordea hau orokortzen duen emaitza bat, Descartesi zor zaiona eta 1637an *Géométrie* liburuan publikatutakoa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erroak (eta ez besterik) dituen polinomioa $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ dela erakusten duena. Karl F. Gauss izango da ordea, ahalegin guzti hauek biribilduko dituena, koefiziente konplexudun n. mailako $p(x)$ polinomio batek zehazki n erro konplexu dituela eta $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ eran adieraz daitekeela dioen *aljebraren teorema fundamentala* frogatuz.

Polinomioen estruktura hobeto ezagutzeko balio izan zuten emaitzak dira azken paragrafoan deskribatu ditugunak. Hala ere polinomioen erroak kalkulatzeko ez dute biderik ematen. Lagrange (1736-1813) eta Vandermonde (1735-1796) matematikari frantsesen lanak izango dira problema honen behin betiko soluzioaren bilaketari bultzada definitiboa emango diotenak.

[4]*Vièteren erroen teoremaren* arabera $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomio orokor batentzat, $-a_{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$; $a_{n-2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$; …; $(-1)^n a_0 = x_1 x_2 \ldots x_n$ daukagu, eta ekuazio hauen eskuineko parteetako espresioak dira *oinarrizko polinomio simetriko* deitzen ditugunak.

Lagrangek bere aurreko emaitzak aztertu eta sistematizatzeko lana hartu zuen bere gain: zein zen ekuazio koadratikoa, kubikoa eta koartikoaren soluzioek gordetzen duten izkutuko arrazoia, ekuazio guzti hauek erradikalen bidez ebazgarriak izateko? Bere azterketek, era honetako soluzio bat 5. mailako polinomioetarako ezinezkoa dela ondorioztatzera eraman bazuten ere, ez zuen lortu horrelako emaitzarik frogatzea. Baina bai beranduago etorriko ziren ahaleginak bide onetik bideratzea eta 60 urteren buruan Galoisen eskutik soluzioa iristeko bidea zabaltzea. 1770-71n argitaratutako *Refléxions sur la théorie algébrique des équations* lanean argitaratu zituen Lagrangek ekuazio polinomikoen ebazgarritasunean egin zituen ahaleginak. Hogeita bost urte beranduago (Lagrange 1795) berriro azaldu zuen bere lan hori laugarren lekzio moduan. Behin betiko emaitzarik ezean, Lagrange gauza izan zen irekitako bidearen sakontasuna antzemateko 'kalkulu konbinatorial' batean oinarritutako "teoria berri eta orokor baten oinarriak" ezarri zituela aipatzerakoan. Bere lanetan agertuko zaigu ekuazio polinomiko edo aljebraikoen permutazio talde-teoriazko tratamendua lehenengoz. Estrukturaren kontzeptu modernoaren lehen intuizio lauso bat ikusten du hemen Bourbakik[5]

Bigarren, hirugarren eta laugarren mailako ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko soluzioak sistematikoki aztertuz, konturatu zen formula ezagun hauetan erradikalen bidez adierazita zetozen bitarteko balioak, hasierako $p(x)$ polinomioaren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erroen polinomio bezala adieraz zitezkeela. Horren ondorioz $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomio baten erroak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izanik, $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomio orokor bat hasierako polinomioaren $a_0, \ldots, a_{n-1}$ koefizienteen funtzioan, eta Vièteren erroen teoremaren arabera, $x_1+x_2+\ldots+x_n$, $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n, \ldots, x_1x_2\ldots x_n$ oinarrizko polinomio simetrikoen funtzioan nola determina zitekeen ikusi nahi izan zuen Lagrangek. Zehazki esanda, nola aurki zitekeen $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomioa soluziotzat zuen, eta koefizienteak $p(x)$-en $x_1, \ldots, x_n$ erroen oinarrizko polinomio sinpleen funtzio zituen θ_h polinomio sinple bat.

Hau ikusteko Lagrangek emaitza garrantzitsu bat frogatu zuen: edozein *polinomio simetriko*, hau da, bere aldagaien ezein permutazioren eraginpean inbariante dirautenak, bere aldagaien oinarrizko polinomio simetrikoen polinomio direla. Eta emaitza honi esker, bilatutako θ_h honela kalkula zitekeela, simetrikoa izanik, eskatutako baldintzak betetzen zituelako, Lagrangek frogatutako emaitzaren arabera:

$$\theta_h(t) = (t - h(x_1, x_2, \ldots, x_n))(t - h(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})) \cdots$$

[5](Stein 1988) artikuluan dator aipatua pasartea zehaztasunez: (Bourbaki 1974, 100. or.).

non, biderkagai bakoitza kontuz aukeratutako $x_1, \ldots, x_n$ erroen $n!$ permutazioetako bati dagokion. Aukeraketa horren arabera, σ permutazioak, $h(x_1, \ldots, x_n)$ polinomioak, $x_1, \ldots, x_n$ aldagaiak permutatzean har ditzakeen balio desberdin bakoitza soilik behin agertuko da biderkaduran.

Lagrangeren lanak labur, baina zehaztasun pixka batekin azaltzen saiatu gara, bere atzetik etorri zirenengan eragin handia izateaz gain, bereziki Galoisen kasuan, guk hemen ikusi nahi dugun matematika ez-estrukturalistatik matematika-estrukturalista deitzen dugun horretarako jauziaren gunea, Lagrangek abiatutako ekuazio aljebraikoen ebazpenerako, permutazioen talde-teoriazko azterketak osatzen duelako. Lagrangeren lorpen handitzat har dezakegu ekuazio baten soluzioen permutazioen garrantziaz ohartzea. Bostgarren mailako ekuazioaren ebazpenak aurkezten zituen zailtasunen norainokoaz jabetzen ere lehenengoetakoa izan zen.

Ruffini (1765-1822) izan zen bosgarren mailako ekuazio orokorra erradikalen bidez ebatziezina zela frogatzen saiatzen lehenbizikoa. Hau frogatzeko egin zituen ahaleginek hutsuneak badituzte ere, bere argudioak sakonak izan ziren, eta behin betiko frogatik hurbil geratu ziren. Balizko erradikalen bidezko soluzio batean agertu beharreko bitarteko balioak, Lagrangek erakutsitako bidetik, $x_1, \ldots, x_5$ erroen polinomoak izan beharko luketela, eta hau bosgarren mailako ekuazioaren kasuan, maila txikiagokoenean ez bezala, ezinezkoa zela erakutsi nahian. Bere lanean permutazioen teoria ekuazioen ebazgarritasunerako osagai estrukturala kontsideratu zuen, beranduago Cauchyk, ezagupen handiagoarekin, egingo zuen bezala teoria independente bezala sistematikoki garatuz.

Abel (1802-1829) izan zen, hala ere, Ruffiniren ahalegina burura eramango zuena, haren lanak faltan zituen gorputz teoriako printzipioak modu argian formulatuz. Galoisen lanerako ere, laster ikusiko dugunez, talde teoriako printzipioekin batera ezinbestekoak izango zirenak, bestalde. Ez ziren hor amaitu, ordea, Abelen lanak. Gaussek $x^n - 1 = 0$ *polinomio ziklotomiko* orokorra, hau da, zirkunferentzia n zatitan banatzen duen ekuazio aljebraikoa, erradikalen bidez ebazgarria zela erakutsia zuen ordurako. Abelek Gaussen metodoa erabilita antzeko emaitzak lortu zituen, zirkunferentzia funtzio eliptikoetara orokortuz, hauetako batzuk n zatitan banatzen zituzten ekuazio aljebraikoen erradikalen bidezko ebazpena karakterizatuz. Ekuazio orokorraren erradikalen bidez ebazgarriak ziren ekuazio aljebraikoak karakterizatzeko ahaleginean, gero Galoisek lortutako emaitzetatik oso hurbil zela (Bourbaki 1974, 5. kap.), gaisotuta hil zen 27 urte zituela.

Gauss, Rufinni eta Abelen ostean bi ekuazio klase nagusiak sakonki landuak izan ziren emaitza dibergenteekin: edozein mailatako ekuazio ziklotomikoak erradikalen bidez ebazgarriak dira, baina bosgarren edo maila handiagoko ekuazio

ekuazio polinomikoetako bakoitzari *talde* deitutako objektu bana egokitu zien, konkretuki, gerora bere omenez ekuazioaren *Galoisen taldea* deituko zena. Ekuazio polinomiko baten erroen permutazioen azpimultzo jakin batek osatzen zuten esandako taldea, permutazioen konposaketa eragiketa bezala harturik. Ekuazio polinomikoetatik, hauei egokitutako Galoisen taldeetara pasatzeak, abantaila nabarmen bat zekarren. Ekuazio polinomikoek ez bezala, posible zen hauen Galoisen taldeak sailkatzea, zegozkien ekuazioak, hauen erradikalen bidezko ebazgarritasunaren arabera sailkatuz. Besteak beste, ekuazioen ezaugarri garrantzitsuenak (irreduzibilitatea, erradikalen bidezko ebazgarritasuna, ebazgarria izatekotan behar izango zen erradikalaren maila), ekuazioaren Galoisen taldeak jasotzen zituen, eta posible zen ekuazioari inongo erreferentziarik egin gabe, bere taldeari begiratuz propietate hauek determinatzea. Eta, garrantzitsua dena, ekuazio posible kopurua, hauei egokitzen zaizkien Galoisen taldeak baino askoz handiagoa da, sailkapena asko erraztuz.

1831ko eskuizkribuan Galoisek lehenbizi ekuazio bati lotutako Galoisen taldea definitu zuen, gero honen jokaera aztertu zuen, oinarriko gorputzaren hedaduren funtzioan, eta ekuazio bat erradikalen bidez ebazgarria izateko, bere Galoisen taldearen araberako beharrezkoa eta nahikoa zen baldintza bat ondorioztatu zuen. Eta eskuizkribu laburra ixteko emaitza honen aplikazio bat eman zuen, ekuazioa maila leheneko ekuazio irreduzible bat den kasuetarako. Ikusi dezagun hau guztia zehaztasun handiagoz, guri dagokiguna argitzeko asmotan.

Galoisek kantitate “ezagunak” errekurtsiboki definitu zituen, ekuazio polinomikoen soluzioen bilaketa, kantitate “ezagun” guztiak determinatzeko prozesuarekin baliokidetasunean jarriz. Emandako polinomioaren koefizienteak izango ziren hasierako kantitate “ezagunak”. Hortik aurrera, kantitate “ezagun” berriak, kantitate “ezagunak” lau eragiketa aritmetikoen bidez konbinatuz, gaur hauen funtzio arrazional deituko genituzkeenak izango lirateke. Balio jakinak “erantsiz”, bereziki kantitate “ezagunen” erroak, eta hauek besteekin lau eragiketen bidez konbinatuz areagotu zitekeen kantitae “ezagunen” multzoa.

Esandakoak argitze aldera adibide bat har dezagun. Esaterako, $p(x) = x^3 - 3x - 4 = 0$ ekuazio kubikoa hartuko bagenu, 1, 0, -3 eta -4 izango lirateke hasierako kantitate “ezagunak”, eta hauen arteko lau eragiketa aritmetikoen bidez, zenbaki arrazionalen $\mathbb{Q}$ multzora zabalduko genuke bigarren urrats batean, kantitate “ezagunen” multzoa. Esan dugunari jarraituz, kantitate jakin batzuek, bereziki lehendik “ezagunak” diren kantitateen erroak, “eranstea”, eta hauek aurrekoe-

(Tignol 2001), ez dira bereziki Galoisen lanen azterketara mugatzen baina kapitulu interesgarriak eskaintzen dizkiote, Galoisen lanen ekarpenak argitze aldera.

kin lau eragiketen bidez konbinatzea da, Galoisek kantitate "ezagunen" multzoa handitzeko onartutako beste bidea. Esaterako, $\sqrt{3}$ aukeratuko bagenu, ondoko kantitate "ezagunen" multzora iritsiko ginateke:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Horrela bada, polinomio jakin bati erlazionatutako kantitate "ezagunen" multzoa, lau eragiketa aritmetikoekin, gaur egun *gorputz* bezala ezagutzen duguna izango litzateke. Galoisek ikusi zuen, polinomio baten erradikalen bidezko ebazpen prozesua, polinomioaren koefizienteen funtzio arrazionalen gorputzaren hedadura konkretuak, hau da, polinomio horri lotutako kantitate "ezagunen" gorputza eraikitzearekin paraleloan zihoala.

Gure adibidearekin jarraituz, ekuazio kubikoetarako Cardanoren formula erabilita ikus daiteke $p(x) = x^3 - 3x - 4 = 0$ ekuazioaren erro bat

$$x_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

dela. x_1 erroa barnean duen, $p(x)$ polinomioari erlazionatutako hasierako kantitate "ezagunen" $\mathbb{Q}$ gorputzaren, hedadurarik txikiena lortu bitarteko urratsez urratseko hedadura segida bat iradokitzen du x_1 erroak:

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}})$$

Kasu honetan,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} = 1/(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}})$$

idatzi daitekeenez,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}})$$

daukagu, eta azken hau litzateke x_1 barnean duen bilatutako hedadura. Prozesuak aurrera jarraitu beharko luke, x_1, x_2 eta x_3 hiru erroak barnean hartzen dituen $\mathbb{Q}$ gorputzaren hedadura txikiena lortu arte. Prozesu honekin lotu zuen, beraz, Galoisek polinomioen erradikalen bidezko ebazpen prozesua.

Gorago esan dugu erroen arteko erlazio polinomial kopuruak, ekuazioaren konplexutasunaren mailaren neurria eman zezakeela iradokitzetik abiatu zela Galois. Horren harira, $p(x)$ polinomio bakoitzerako eta kantitate "ezagunen" K gorputz bakoitzerako, $B_K(p)$ multzoa definitu zuen Galoisek: $p(x)$ polinomioaren

$x_1, \ldots, x_n$ erroen, K gorputz gaineko erlazio polinomialetatik eratorritako polinomioen multzoa. Aurreko adibideetan ikusi dugunaren arabera,

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{Q}}(p) &= \{x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2x_3 - 4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6, \ldots\}, \\ B_{\mathbb{Q}}(q) &= \{x_1 + x_3 + x_2x_4, \ldots\} \quad \text{eta} \\ B_{\mathbb{Q}}(r) &= \{x_1^2 - x_2 - 2, x_2^2 - x_3 - 2, x_3^2 - x_4 - 2, x_1x_2 - x_1 - x_4, \ldots\} \end{aligned}$$

izango lirateke, hurrenez hurren, Galoisek definitutako multzo hauek. Kontuan izan, K gorputza aldatuz gero, B_K multzoa aldatu egingo litzatekeela. Esaterako, $r(x)$ polinomioaren kasuan, bere erroek $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4\sqrt{2}$ erlazio polinomikoa ere betetzen dute, aurrez zerrendatutakoez gain, hortik eratorritako polinomioa ez legoke $B_{\mathbb{Q}}$ multzoan, baina bai ordea $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ multzoan. Argi ikusten da, kantitate "ezagunen" gorputza handituz doan heinean, honi dagokion polinomioen multzoa ere handituz joango dela.

$p(x) = 0$ ekuazio polinomiko baten konplexutasuna, bere erroen artean aurki zitezkeen erlazio polinomial kopuruarekin txikitzen bada, B_K multzo handia duten ekuazioek konplexutasun txikia izango dutela ulertu behar da. Ekuazio baten konplexutasunaren neurria emango liguke horrela bere B_K multzoak. Kontuan izan behar da, hala ere, ez dela inola ere lan erraza, $p(x)$ polinomio bat eta kantitate "ezagunen"K gorputz bat finkatuta, $B_K(p)$ multzoa determinatzea[8]. Galois gauza izan zen, hala ere, ekuazio polinomiko baten "konplexutasuna" modu sinpleagoan karakterizatzeko, horretarako, $B_K(p)$ multzoa zuzenean erabili beharrean, $B_K(p)$ inbariante uzten zuten, $p(x)$ polinomioaren erroen permutazioek konposaketarekiko zituzten erlazioak aztertuta. Permutazio horiek osatuko zuten $B_K(p)$ multzoari lotutako Galoisen $Gal(B_K(p))$ *taldea*.

Ekuazio polinomiko baten K kantitate "ezagunen" gorputz baten gaineko *Galoisen taldea*, definizioz, B_K multzoko polinomioak, B_K multzoko polinomioetan transformatzen dituzten $\{x_1, \ \ldots, \ x_n\}$ erroen permutazioek osatzen dute[9]. Hau da, hasierako ekuazioaren erroen arteko K gaineko erlazio polinomialak, hasierako ekuazioaren erroen arteko K gaineko erlazio polinomikoetara daramatzaten

[8]Terminologia argitze aldera erabilitako adibideetan antzematen zen hori, erlazio polinomialak lortzeko moduaren erreferentziarik eman ez dugunean.

[9]$x_1, \ldots, x_n$ erroen permutazioei, edo berrordenaketei buruz hitz egiteko nahikoa zaigu $1, \ldots, n$ lehen n zenbaki arrunten permutazioei buruz hitz egitea. Gogoratu S_n denotatu ohi dela lehenbiziko n zenbaki arrunten permutazioen multzoa. S_n multzoko σ permutazio bakoitza $\{1, \ldots, n\}$ multzotik multzo berbererako aplikazio bijektibo bat bezala ikus daiteke; azken batean, lehen n zenbaki arrunten ordenaketa bat baino ez dena. Horrelako σ batek polinomioen n erroen hurrengo permutazioa emango digu: $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

permutazioek osatzen dute K gorputz gaineko Galoisen $Gal(B_K)$ taldea. Permutazio hauek talde bat osatzen dutela konturatu zen Galois[10], eta talde estruktura horretan zetzala arazoaren muina. Batetik argi dago permutazioen konposaketak beste permutazio bat emango duela beti, ezinbestean. Bestetik permutazioen konposaketa elkarkorra da edozein azpimultzotan. Identitatea beti egongo da barruan. Eta taldeko permutazio batek, taldearen definizioagatik, B_K-ko elementu bat B_K-ko elementu batean transformatzen badu, halaxe egingo du alderantzizko permutazioak ere. Gezurra badirudi ere, Galoisen talde honek ekuazioaren ebazgaritasunari buruzko informazio guztia gordetzen duela erakutsi zuen Galoisek.

B_K multzoan aurki daitezkeen polinomioen araberakoa da, beraz, $Gal(B_K)$ permutazio taldea. Bi klasetako polinomioak bereiztea interesatuko zaigu. Batetik polinomio simetrikoak edo tribialak deituko ditugunak bereiztuko ditugu; edozein permutazioren eraginpean inbariante dirautenak izango dira eta ez dute, horren ondorioz, problemaren ebazpenean aparteko garrantziarik. Eta bestetik, problemaren ebazpenean zeresana izango dutenak: polinomio ez-simetrikoak. Argi dago B_K multzoko polinomio guztiak simetrikoak diren kasuan $Gal(B_K)$ taldea permutazio guztiek osatutakoa izango dela. Aldiz, adibidez, Vandermondek erradikalen bidez ebatzitako $r(x)$ polinomioaren kasuan, ikusi daiteke, emandako definizioaren arabera, bost erroen 120 permutazio posibleetatik, soilik bostek mantentzen dutela $B_{\mathbb{Q}}(r)$ inbariante. Galoisen taldea polinomioaren konplexutasuna handitzearekin txikituko litzatekeela dirudi. Taldeen kasuan gertatu ohi denez, ordea, tamainak baino garrantzia handiagoa izango du talde estrukturak berak soluziorako bide izate horretan.

Galoisen taldeak esandako informazio hori gordetzen duela hobeto ulertzeko, ekuazio polinomikoaren ebazpen prozesua urrats indibidualetan banatzea komeni da. Prozesu horretan emandako urrats bakoitza, kantitate "ezagunen" multzoari balio berri bat "eranstearekin" aldera daiteke. Izan ere, ekuazio baten K kantitate "ezagunen" gorputzari balio bat "eranstean" E kantitate "ezagunen" gorputzera pasatzen bagara, jakinekoa da, B_E B_K baino handiagoa edo berdina izango dela, lehenengoak bigarrenak jasotzen zituen erroen arteko erlazio polinomialez gain beste batzuk jaso ditzakeelako, $r(x)$ polinomioaren kasuan, $\mathbb{Q}$ gorputzetik honen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ hedadurara pasatzerakoan ikusi dugun bezala. Baina horrela jokatuz Galoisen taldean egoteko permutazioei eskatutako baldintzak gogortzen dizkiegu, posible izanik lehen zeuden polinomioentzat baldintzak betetzea, baina polinomio berrientzat permutazioren batek huts egitea. Ebazpen prozesuan aurrera egi-

[10]Hemen berriz ere, aurreko oin-oharreko bidea aukeratu dezakegu, eta S_n multzoa aplikazioen konposaketarekiko talde bat dela ikusi. Finean esaten ari garenaren bertsio abstraktua izango da, gaurko matematikan egiten den moduan.

nez, kantitate “ezagunen” gorputzean “eransketak” eginez, ekuazioaren Galoisen taldea txikituz joango da. Galoisen taldearen erredukzio posible bakoitza, urrats bakoitzean kantitate “ezagunen” gorputzari “erantsitako” balioen propietateei hertsiki lotuta agertzen da.

Bewersdorffek (2004) ematen duen adibide bat baliatuko dugu, konputazioak saihestuz, ekuazio polinomiko baten urratsez urratseko erradikalen ebazpenean, kantitate “ezagunen” gorputzari “erantsitako” balio bakoitzak, Galoisen taldearen erredukzioan duen eragina ikusteko. Har dezagun $s(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 2 = 0$ ekuazio koartikoa. Cardanoren formula erabilita erradikalen bidez ebazgarria da:

$$x_{1,3} = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{3 + \sqrt{2}} \qquad x_{2,4} = 1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

dira lau erroak. Kalkuluak eginda ikus daiteke 8 permutazio daudela S_4 taldean, $B_{\mathbb{Q}}$ erroen arteko erlazio polinomialen multzoa inbariante uzten dutenak: σ_i izendatuko ditugunak $i = 0, \ldots, 7$ izanik, non, σ_0 identitatea izango den. Honakoak dira permutazio horiek:

	1	2	3	4
σ_0	1	2	3	4
σ_1	3	2	1	4
σ_2	1	4	3	2
σ_3	3	4	1	2
σ_4	2	1	4	3
σ_5	4	1	2	3
σ_6	2	3	4	1
σ_7	4	3	2	1

Zortzi permutazio hauek osatuko dute beraz $Gal(B_{\mathbb{Q}}(s))$. Hortik aurrera ekuazioaren erroek adierazten dute kantitate “ezagunen” gorputzaren ondoz-ondoko zein hedadura kontsideratu beharko liratekeen, ekuazioa erradikalen bidez ebatzi ahal izateko.

Lehenbiziko urratsean, $\sqrt{2}$ kantitatea “erantsi” behar diogu $\mathbb{Q}$ oinarriko gorputzari, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gorputz hedadura lortuz. Kalkuluak eginda ikusten da, zortzi permutazioetatik lauk baino ez dutela uzten inbariante $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s)$: σ_i non $i = 0, \ldots, 3$. Ikusi daitekeenez, kantitate “ezagunen” gorputzari bigarren erro bat eransteak erdira jaisten du azken honi dagokion $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s))$ Galoisen taldea.

Bigarren urratsean $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ "erantsi" behar diogu, kantitate "ezagunen" gorputzari. Eta hori egitearekin, $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}})}(s)$ polinomioen multzoaren inbariantzari eusten dieten permutazio bakarrak σ_0 eta σ_2 dira. Berriz ere, beraz, bigarren erro bat eransteak $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}})}(s))$ Galoisen taldearen tamaina erdira jaistea dakar.

Azken urrats batean $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ "eransteak" berriz ere efektu bera izango du eta, jadanik, polinomioa ebazgarria litzatekeen kantitate "ezagunen" gorputzari erlazionatutako Galoisen taldea, talde tribiala litzateke, σ_0 identitate permutazioak osatua. Berriz ere bigarren erro bat eransteak, erdira jaisten du dagokion Galoisen taldea.

Galoisek ateratako ondorioak ulertzeko garrantzitsua da, berak egin zuen moduan, taldeen taularen errepresentazioa erabiltzea. Gure aurkezpenean darabilgun multzo teoriazko tresneriarik ezean, taldearen taulak permutazioen arteko erlazioak ulertzea eta manipulatzea ahalbideratzen duelako.

Goiko adibidean, emandako urratsei dagozkien Galoisen taldeen *taulak* adieraziz gero, honelako zerbait izango genuke:

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
σ_1	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2	σ_6	σ_7	σ_4	σ_5
σ_2	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0	σ_7	σ_6	σ_5	σ_4
σ_4	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_5	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1
σ_6	σ_6	σ_7	σ_4	σ_5	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2
σ_7	σ_7	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

izango litzateke hasierako $Gal(B_{\mathbb{Q}}(s))$ Galoisen taldeari dagokiona,

$\circ$	σ_0	σ_2	σ_1	σ_3
σ_0	σ_0	σ_2	σ_1	σ_3
σ_2	σ_2	σ_0	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_3	σ_0	σ_2
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	σ_0

izango litzateke $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s))$ Galoisen taldeari dagokiona,

$\circ$	σ_0	σ_2
σ_0	σ_0	σ_2
σ_2	σ_2	σ_0

izango litzateke $Gal(B_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{2}})}(s))$ Galoisen taldeari dagokiona, eta azkenengo urratsean $\{\sigma_0\}$ Galoisen talde tribialera iritsiko ginateke.

Adibide honetan gertatzen zen bezala, pausuz pausu Galoisen taldea identitate permutazioa baino ez duen talde tribialera eramateko aukera ematen duten kasuak identifikatu zituen Galoisek, erradikalen bidez ebazgarriak ziren ekuazioak karakterizatzen zituztenak. Gaur egungo terminologian, *talde ebazgarriak* izango lirateke hauek. Honela formulatu dezakegu, hainbestean, gutxi gorabehera, Galoisen lanen emaitza nagusia: ekuazio irreduzible bat erradikalen bidez ebazgarria da, zehazki, bere Galoisen taldea, urratsez urrats, identitate permutazioa soilik duen Galoisen taldera erreduzitu daitekeenean, urrats bakoitza ordura arteko kantitate "ezagunen" gorputzari m. erro bat "eransteari" edo (behar bezala ordenatutako) taldearen taularen m^2 "karratuko" deskonposaketa bati dagokiolarik, hauetako "karratu" bakoitzak aurreko permutazio kopururaren m-ren bat izanik.

Goiko adibidean, esaterako, hiru bigarren erro erantsi ditugu urrats banatan, eta ondorioz urrats bakoitzean 4 "karratutan" banatu da taula, karratu hauetako bakoitzak aurrerokoaren permutazio kopuru erdia duelarik. Ez hori bakarrik ikusi daiteke taula karratuetan ezkerrean eta goian geratzen den karratua hurrengo gorputz hedadurari dagokion Galoisen taldearen taula dela. Gainera urratsez urrats Galoisen talde tribialera iritsi garenez, ekuazioa erradikalen bidez ebazgarria dela ondorioztatuko genuke: bagenekiena.

Honenbestez, polinomio baten Galoisen ondoz ondoko taldeen segidaren funtzioan, ekuazio polinomikoaren erradikalen bidezko ebazgarritasuna karakterizatzea lortu zuen Galoisek, praktikan, soluzioen konputorako bide eraginkorrik ez eskaini arren. Galoisen emaitzaren argitan ikusi daiteke, ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko ebazgarritasunaren harira, polinomioaren Galoisen taldea zergatik suertatzen den hain erabakiorra: taldeen tauletan antzeman daitezkeen eta erabat izaera konbinatorioa duten kontsiderazioek erakusten dute balizko erradikalen bidezko soluzioa lor daitekeen eta kasu horretan honek zenbagarren erroak izan beharko lituzkeen.

Dedekind, Artin eta Noetherren lanen bidez aurkituko zen, gerora, polinomio baten Galoisen taldeen azterketa konbinatorio hori modu eraginkor batean egin eta antolatzeko modua, aljebra estrukturalaren baitan.

Van der Waerdenek (1985) Galoisen lanetan jartzen du aljebra modernoaren (estrukturalistaren, esango genuke guk) abiapuntua. Bere hitzetan, bere aurrekoek ekuazio polinomikoen ebazpenak bilatzen zituzten bitartean, bera izan zen talde eta gorputz estrukturak eta hauen arteko erlazio estuak aztertzen lehenbizikoa. Ekuazio polinomiko batek erradikalen bidezko ebazpenik duen jakiteko honen Galoisen taldearen estruktura aztertu behar zela erakutsi zuen. Corryren arabera (1996), ordea, Galoisek, estrukturak aurkitu eta hauek problema jakinak ebazteko erabiltzeko modua agerian jarri zuela onartzen badu ere, ez dator Van der Waerdenekin bat matematika estrukturalista Galoisengan jartzean. Honen arabera, gutxi gorabehera mende bat iraungo zuen trantsizio prozesu bat eman zen, Galoisen aurkikuntzetan oinarrituta aljebraren izaera guztiz eraldatu bitartean. Ekuazioak ebaztera zuzendutako alor bat zena, Galoisenak moduko estruktura eta metodo estrukturalak ekuazioen ebazpenean aplikatzetik, aplikazioetatik harago, axiomatikoki definitutako estruktura aljebraikoak, beraiek, eta hauen arteko erlazioak sistematikoki aztertzera zuzendutako alorra izatera pasa zen aljebra mende horretan. Eta, gauzak nola diren, Corry-k Van der Waerden beraren *Moderne Algebra* (1930-1931) lan esanguratsua jartzen du aljebraren izaera aldaketaren lehenbiziko erakusle eta mugarri nagusi bezala.

2.2. Richard Dedekind

Dedekind eta bere lanari buruzko aipamen batekin hasiko gara, Dedekinden metodologia estrukturalista deitzen dugun hori zer den azaltzen:

> Matematikaren historian ia beste inork ez bezala, Dedekindek bere diziplina sistematikoki garatzeko ahalegina egin zuen, eta bereziki lurra prestatu zuen gaur egungo matematika 'abstrakturako' – batez ere 'aljebra modernorako', van der Waerdenenen liburuaren zentzuan ulertuta. Aljebraren oinarrizko nozio garrantzitsuenak argitzeko ezinbesteko ekarpenak egin zituen – gorputzak, eraztunak, moduluak, idealak, taldeak – eta matematikaren oinarriak landu zituen – zenbaki errealak, multzo teoria Cantortarra, multzo-teoriazko topologia. Zentzu honetan, Dedekind Bourbakiren aurreko eta aitzindari garrantzitsutzat har dezakegu.[11]

[11]Erstens hat sich Dedekind wie kaum ein zweiter in der Geschichte der Mathematik um einen systematischen Aufbau seiner Wissenchaft bemüht und insbesondere die heutige 'abstrakte' Mathematik – vor allem die 'moderne Algebra' im sinne des Buches von van der Waerden – vorbereitet. Er hat wesentlich zur Klärung der wichtigsten algebraischen Grundbegriffe - Körper, Ringe, Moduln, Ideale, Gruppen - beigetragen und sich mit Grundlagenfragen der Mathematik - reelle Zahlen, Cantors Mengenlehre, mengentheoretische Topologie - beschäftigt. In diesem Sinne können wir Dedekind als Vorfahren und wichtigen Wegbereiter Bourbakis ansehen. (Scharlau 1981, 2-3. or.), (Ferreirós 1999, 81. or.)-n aipatua.

Matematikaren oinarrietan eta zenbakien teoria aljebraikoan egin zituen bere ekarpen nagusiak Dedekindek. Guztietan antzeman daiteke Dirichleti egotzi izan zaion hurrengo printzipioa: 'kalkulu itsu kopuru minimoa eta ideia argi kopuru maximoa erabili problemak mendean hartzerakoan' (Minkowski 1905). Dirichletek kontzeptuak kalkuluen aurretik jartzeko eginiko ahalegina ikusi daiteke adibidez funtzioa zenbakien arteko erlazio bat bezala abstraktuki definitu daitekeela iradokitzen duenean, ordura arteko espresio analitikoaren beharra baztertuz.

Dedekindek doktoradutza Gaussekin egin bazuen ere, garai hartarako Gauss astronomiara eta matematika aplikatura emana zegoen beste arloetara baino, eta matematikari gazteengan izan zezakeen eragina ez zen hain handia. Hau erretiratu ostean Dirichletek hartu zuen Göttingeneko unibertsitateko matematika atalaren ardura. Oso irakasle ona omen zen, eta azken garaiko Gauss ez bezala, erabakiorra suertatuko zen inguruan zituen matematikari gazteengan, Dedekind eta Riemann tartean zirelarik. Riemannek eta Dedekindek esparru desberdinak jorratu bazituzten ere (lehenbizikoa batez ere funtzioen teoria eta fisika matematikoan aritu baitzen eta bigarrena aljebran eta zenbakien teorian), posible da guri interesatzen zaigun metodologiaren ikuspuntutik antzekotasunak aurkitzea bien artean, lehen aipatutako Dirichleten "beste printzipioak" markatutako matematika ikuspuntu kontzeptual batetik lantzeko bidetik.

Riemannek eta Dedekindek, biek bateratu eta garatu zuten Gauss eta Dirichletengandik jasotako matematika kontzeptualaren aldeko apustua, eta beren lanek XX. mendeko matematikariengan izandako eragin handiak, bereziki Riemannek funtzioen teorian eta Dedekindek aljebran, matematika berriaren konfigurazioan oinarrizkoa bihurtzeko posizioan jarri zuen. Teoria matematikoak markorik orokorrenean formulatzen ahalegindu ziren, horretarako objektu berriak aukeratuz eta objektu hauen "barne" propietate karakteristikoen definizioa teoriaren hasieran ezarriz. Hauek izango dira guk metodologia estrukturalista deitu dugunaren ezaugarri garrantzitsuak. Riemann gazterik hil zen eta Dedekindek oso poliki publikatu zituen bere lanak eta ez zuen ikasle nabarmenik izan. Honek azaltzen du neurri batean metodologia kontzeptual abstraktu berriak zabaltzeko izan zituen zailtasunak (Ferreirós 1999).

Dedekinden lanak aztertuta ikusi daiteke multzo teorian oinarritutako eraikuntza bat bailitzan ikusten zuela Dedekindek matematika, gerora, Bourbakik zabaldutako irudiarekin desberdintasun garrantzitsuak izan arren. Desberdintasun hauen artean garrantzitsuena, gure ustez, matematikan estrukturek jokatzen duten paperarena izango litzateke. Hau da, guk hemen, Dedekinden metodologia estrukturalista zela defendatu nahi dugu, Bourbakiren kasuan, metodologia honek mate-

Dedekindek 1872ko artikuluaren sarreran aipatzen du Züricheko unibertsitatean kalkulua irakasten jarri zutelarik, bateratze horren beharra lehen eskutik ezagutu zuela, kalkuluan irakasten zen zenbait teorema, intuizio espazial orotatik kanpo, modu zorrotz batean frogatu nahi izatekotan. Ez zuen baztertzen intuizio espazialaren balio pedagogikoa, baina, esaterako, segida monotono bornatuen konbergentzia frogatzeko oinarri sendoagoak behar zituela ikusi zuen.

Jarraitasunaren nozioa hartu zuen Dedekindek bere lanaren ardatz bezala. Nozio horren argitzeak zenbaki arrazional eta irrazionalak bateratzeko bidea irekiko zuela sinestuta. Zenbaki arrazionalen "sistema" zuzen geometriko bateko puntuekin alderatu zuen, honek argitu nahi zuen jarraitasunaren nozioa jasotzen zuela jakitun. Zertan bereizten dira bi hauek? Horrek emango du, zenbaki arrazionalen sistemari zenbaki errealetara iristeko falta zaiona ulertzeko modua. Horretarako zuzen geometrikoan jatorri bat, luzera unitate bat eta norabide bat finkatuta, bi sistemak modu bakarrean erlaziona daitezke, zenbaki arrazional bakoitzari zuzeneko puntu bat egokituz, eta sistema bakoitzeko ohiko orden erlazioak preserbatuz. Kontrakoa egia ez zela erakutsi zuen Dedekindek zenbaki arrazionalen gainean definitzen ziren 'ebakiduren' ideia erabilita. Zehatzago formulatuta, zenbaki arrazionalen sistema bi parte disjuntutan banatzeko modu bakoitzak, parte bateko zenbakiak bestekoak baino txikiagoak izanik[13], zenbaki arrazional batek determinatua ote zen ikusi nahi zuen Dedekindek. Nahikoa da $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ eta $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$ ebakidura kontsideratzea, galderaren erantzuna ezezkoa dela erakusteko. Hori da zenbaki arrazionalen sistema jarraia ez izatearen arrazoia: ez delako gure jarraitasunaren eredu den zuzen geometrikoaren isomorfoa.

Dedekindek egindako horretan berrikuntza metodologiko garrantzitsuak ageri dira. Batetik multzo infinituak matematikako objektu zilegiak bezala hartzearena, zenbaki arrazionalen sistema, eta ez zenbaki arrazionalak modu soltean, kontuan hartuz. Bestetik, sistema hau bera, estrukturadun multzo edo estruktura bezala hartzearena, batuketa eta biderketarekiko itxia den multzo (linealki) ordenatua bezala hartzen baitu. Zenbaki arrazionalen sistemaren gainean definitutako ebakiduren sistema ere erabiltzen du, hau da, zenbaki arrazionalen parteen multzoa eta honen maila handiagoko kardinal infinitua jokoan sartuz. Posible da gainera multzo berri honetan batuketa eta biderketa definitu eta orden erlazio lineal bat inkorporatzea. Dedekinden metodologian oso esanguratsua eta komentatua izango den ezaugarri bat sartuko da hemen. Dedekindek zenbaitek iradoki bezala ez baititu, puntu honetara iritsita, zenbaki errealak ebakidura bezala definituko, horren partez, ebakidura bakoitzari (zenbaki arrazionalei nahiz irrazionalei dagozkienei), eraikitako ebakiduren estrukturari isomorfoa izatea beste ezaugarririk ez

[13]Hori da zuzen geometrikoaren ebakidura baten formulazio abstraktua.

duen estruktura erabat formala "sortuko"[14] baitu, eta hemengo elementuak izango dira azkenik zenbaki errealak Dedekindentzat. Horrela lortutako sistemak gorputz estruktura du bi eragiketekiko eta linealki ordenatua dago, zenbaki arrazionalen nahiz irrazionalen sistemaren kopia isomorfo bat gordetzen du, eta hauek ez bezala, jarraia da: ez du zulorik. Horrela lortzen da entitate abstraktu berri honen bidez ehundaka urtean bilatutako zenbaki arrazional eta irrazional, kantitate diskretu eta magnitude jarraien arteko bateratzea.

Hasitako lanak amaitzeko ohitura zuen Dedekindek eta ez erdizka uztekoa. Hori dela eta, zenbaki errealen bateratze eraikuntza osatu ostean, hasierako asmoa betetzen dutela erakutsiko du, oraingoan bai, analisiaren aritmetikarako erredukzioa burututzat eman baino lehen. Besteak beste, ordura arte inoiz zorroztasunez frogatu gabeko aritmetikako emaitza desberdinak frogatu zituen: erro karratuekin egindako eragiketen oinarrizko propietateak. Baina ez hori bakarrik, Züricheko kalkuluko klaseetan antzemandako hutsuneak ere bete zituen, bornatutako segida monotonoak konbergenteak zirela erakutsita. Honekin Bolzanok hasitako analisiaren aritmetizazioa burutua zen. Baina erredukzio hori ez zen soilik zenbaki arrunten gainekoa, ikusi dugun bezala, zenbaki desberdinen multzoak, edo sistemak ere beharrezkoak ziren egindako lanean.

Dedekindek zenbaki errealak arrazionalen gainean nola eraiki erakutsi bazuen, arrazionalak osoen gainean eta osoak arrunten gainean, eraikitzeko multzoteoriazko prozedimenduak, oinarrizko multzoan baliokidetasun erlazio egokia definituz eta hauei dagozkien zatidura multzoak nahiz hauen gainean modu naturalean definituriko eragiketa eta orden erlazioak kontsideratuz, eraiki zitezkeela jakinekoa zen Dedekind eta bere garaikideen partetetik[15]

Eta noski, behin multzoaren kontzeptua buruan izanda, zenbaki arruntak, oraindik oinarrizkoagoak izan zitezkeen multzoen gainean definitzeko tartea zegoela ikusi zuen Dedekindek. Fregeren programa logizista izan zen galdera honi erantzuna eman nahian garatutako proiektu bat eta Dedekinden (1888) artikulua beste bat, nahiz eta bi gizonon zenbaki arruntaren azterketa oso interes desberdinek bultzatutakoa izan. Fregeren ahalegina logizismoaren barruan kokatzen da bete betean, matematika funtsean logika baino ez zela erakusten ahalegindu zelako. Dedekindek ere artikuluaren hitzaurrean, aritmetika (aljebra, analisia) logikaren parte kontsideratzen dituela aipatzen du, "espazio eta denboraren intuizioetatik independentea eta pentsamenduaren legeen ondorio zuzena"[16]. Zentzu horretan

[14]Sortze horren inguruan psikologismoa ikusi izan du zenbaitek (Reck 2003).

[15]Hala ikusi daiteke Dedekinden *Nachlassean*. Ikusi (Reck 2011).

[16]Hona pasarte osoa hitzez-hitz Bemanen 1901eko ingelesezko itzulpeneko 14. orritik hartua: "In speaking of arithmetic (algebra, analysis) as a part of logic I mean to imply that I consider the

Dedekind ere logizista bat zela esan izan ohi da. Hala ere Dedekinden eta Fregeren logikaren kontzepzioak ez dira parekagarriak, inola ere. Fregeren ahalegina kalkulu logikorako sistema formal bat aurkeztuz, askoz ere landuago da zentzu horretan. Hein handi batean, matematika logika baino ez dela erakusteko Dedekinden ahalegina, aritmetika multzo teoria axiomatiko baten gainean nola eraiki daitekeen erakustera mugatzen da, pretentsio filosofikorik gabe, Fregerengandik urrun. Dedekindentzat logikaren oinarrizko nozioak elementuak, multzoak, eta aplikazioak izango dira, eta ondorioz osagai sinpleagotan banatuezinak eta definituezinak. Matematikaren oinarrizko jatorrizko kontzeptuak, beraz.

Multzoetan oinarrituta aritmetika nola garatu daitekeen ikustea izango da entitate hauek ulertzeko modu bat, oso zentzu Dedekindiarrean edo estrukturalistan. Ez dute estrukturak eskatzen dizkien ezaugarrietaik kanpo inongo propietaterik. Multzo infinituen inguruko eztabaida batekin hasten du Dedekindek artikulua. Baina kasu honetan multzoak edo sistemak modu orokor batean aztertuz. Multzo infinituaren existentzia 'frogatzen' ahalegintzen da Dedekind lehenbizi. Gaur egungo ikuspegi batetik ezin onartuzkoa kontsideratuko litzatekeen frogapen bat emanaz, "nik pentsatu ditzakedan objektu guztiak" bezalako zalantzazko izaera matematikoa duten objektuak erabiliz[17]. Gero multzo infinitu bat definitzen du, bere azpimultzoren batekin bijekzioan jarri daitekeena bezala karakterizatuz. Segidan multzo infinitu sinplearen txanda etorriko da, gaur multzo induktibo deitzen dena, horretarako lehenbizi 'hurrengoaren' ideia jasoko duten *kateak* definitu beharko ditu. Gaur egungo terminologian Atik Brako funtzio baten bidezko Aren irudiak Bn lukeen itxidura minimala, litzateke *katea* (minimala, ebakidurari lotutako zentzuan). Gauzak horrela, lau baldintzen bidez definitzen ditu Dedekindek multzo infinitu sinpleak: S multzo bat eta N, S-ren azpimultzo bat hartzen dira (berdinak izan daitezke). N multzo infinitu sinplea dela esaten da f, S-ra doan funtzio bat eta N-ko 1 elementu bat existitzen badira, ondokoak betetzen dituztenak: 1) N, N gainean aplikatzen du f-k; 2) N, $\{1\}$-en katea da S-n f-pean; 3) 1 ez dago N-ren f bidezko irudian; 4) f injektiboa da. Hasiera batean ezezagunak badirudite ere, ikusi daiteke Peanok zenbaki arruntentzat emandako axiomatikaren baliokideak direla, multzo infinitu sinpleen definizio baldintza hauek. Dedekindena omen da, Peanok onartu zuenez aitatasuna (Ferreirós 1999).

number-concept entirely independent of the notions or intuitions of space and time, that I consider it an immediate result from the laws of thought."

[17]Psikologismoa agertzen zaigu hemen ere, kasu honetan motibazio handiagoarekin. Horrez gainera Russellen antinomiaren atarian jartzen du, edozein objeturen bilduma multzo bezala kontsideratze honek. Konprehentsio axioma bezalako zerbait faltako litzaioke zorrotzak izanez gero, baina tresna horiek beranduago etorriko dira.

Aurrekari hauen ostean, Dedekind zuzenean zenbaki arruntak aurkeztera pasako da. Edozein multzo infinituk, multzo infinitu sinple (induktibo) bat gordetzen duela frogatuko du lehenbizi. Hurrengo, edozein bi multzo infinitu sinple (induktibo) edo Peanoren axiomen eredu, isomorfoak direla erakutsiko du: alferrikako ezaugarrietaz harago estruktura bakarra determinatzen dutela, hain zuzen ere, eta, beraz, propietate aritmetiko berberak dagozkiela guztiei, propietateok isomorfismoekiko inbarianteak diren heinean.

Eta hona iritsita, berriro ere, zenbaki errealen kasuan bezala jokatuko du, hau da, eraikitako edozein multzo infinitu sinpletatik (induktibotatik) abiatuta, honekiko (eta beste edozeinekiko) isomorfoa den objektu abstraktuen multzoa izango da Dedekinden zenbaki arrunten multzoa. "Sortutako" entitate berri hauen izaera, hauek betetzen dituzten propietate aritmetikoen bildumak karakterizatzen du. Bestela esanda, Peanoren axiomek determinatutako propietate 'estrukturalek' erabat determinatzen dituzte zenbaki arruntak. Ez dute beraz propietate arrotzik izango, multzo teoriaren baitan eraiki dezakegun, eta zenbaki arruntak sortzeko erabili dugun, multzo infinitu sinpleen (induktiboren) edozein ereduk ez bezala, hauek aritmetikarekin zerikusirik ez duten propietate arrotzak izango baitituzte. Adibidez $1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{1\}$ hartuz gero, $1 \in 2$ izango genuke, aritmetikari arrotza zaion propietatea. Hori ezinezko da Dedekinden sorkuntza medio.

Horrela zenbaki ordinal finituak hartzen ditu Dedekindek, zenbaki arrunten definizio moduan. Hori dela eta hurrengoa, hauetatik, zenbait galderari erantzungo dioten kardinal finituak nola lortzen diren ikustea izango da. Berriz ere, ordura arte frogatu gabeko emaitza aritmetikoak frogatuta erakusten du Dedekindek eraiki duen sistemaren ahalmena. Indukzio printzipioa eta errekurtsio bidezko definizioen justifikazio logiko bana ere ematen du. Artikulu hau Cantorren (1895, 1987) lanekin batera, multzo teoriaren sorrerako artikulu garrantzitsua da, beraz.

Esan dugun bezala hiru dira Dedekindek jatorrizko kontzeptutzat hartzen dituenak: multzoak, elementuak, eta aplikazioak. Multzoen erabilera zenbakien esparrutik askatzen lehenbizikoetakoa da Dedekind. Bestetik, Dirichletek analisian emandako funtzioaren definizioa espresio analitikotik libratzeko ahaleginari segika, gaur egungo bi multzo orokorren arteko aplikazio abstraktura ere asko hurbildu zen Dedekind.

(Dedekind 1872) eta (Dedekind 1888) matematikaren oinarrien inguruko Dedekinden bi artikuluetan, azken objektua definitzeko (zenbaki errealen multzoa lehenbizikoan, zenbaki arrunten multzoa bigarrenean) bietan ere "sorkuntza" edo "Dedekinden abstrakzio" prozesu bat erabiltzen dela esaten da. Eta egia da, Dedekindek berak terminologia hori erabiltzen du. Multzoen bidez eraikitako ereduari inperfekzioak kendu nahian, edo bigarren artikuluan esplizituki esaten duenez, zenbaki arrunten multzoak, hauen eredu guztiek batera konpartitzen dituzten propietateak baino ezin dituelako eduki, hau da, isomorfismo bidez kontserbatzen diren propietate estruktural-erlazionalak. Hein batean Benacerrafen problema ezagutuko balu bezala jokatu arazten diona, ia mende bat lehenago. Propietate arrotzik ez. Hortik esaten dute estrukturalismo logikorako bide bat irekitzen dela (Reck 2003). Zertan datza, bada, Dedekindi egozten zaion balizko estrukturalismo logikoa? Abstrakzioa prozesu psikologiko bat bezala ez, prozedura logiko bat bezala kontsideratzean. Ikusi dezagun zehazki, Dedekinden zenbaki arrunten inguruko 1888ko artikuluari erreferentzia eginez esaten dena zer den:

> Lehenbizi zenbaki arruntentzat erabili beharreko hizkuntza eta logika zehazten da, eta beraz zenbaki arruntekin egin daitezkeen baieztapenak eta erabil daitezkeen argudioak; bigarrenik infinitu sinple konkretu bat eraikitzen da; hirugarrenik infinitu sinple hau proposizio aritmetiko guztien egia-balioak determinatzeko erabiltzen da (hauek, hartutako infinitu sinple konkretuan dagozkien proposizioen egia-balioekin berdinduz); laugarrenik egia aritmetikoak determinatzeko modu hau, infinitu sinple guztiak isomorfoak direla erakutsiz justifikatzen da (batean egia bada, guztietan izango da).[18]

Honakoa da, beraz, Dedekindek gaur egungo posizio filosofiko estrukturalistekin alderagarria den ikuspegi bat gordetzen zuela dioten autoreek eman ohi duten esplikazioa: zerbait egia da zenbaki arruntentzat, proposizio horri dagokion oro egia denean zenbaki arrunten eredu bakoitzean. Zer dira orduan zenbaki arruntak? Beren propietateak, proposizio aritmetiko guztiek determinatutakoak dituzten objektuak dira (eta soilik horiek). Eta beraz, hedaduraz, objektu matematikoei dagokien guztia, eta soilik beren izaerari dagokiena, dagozkien egia matematikoek determinatzen dutena dira. Parte hartzen duten egiak zehaztuz 'sortzen', karakterizatzen ditugu objektuok. Posizio hori da Reckek estrukturalismo logikoa (Reck 2003) deitzen duena.

Bat gatoz Dedekinden metodologia estrukturalista zela aipatuz egin izan diren azterketekin. Reckek Dedekinden estrukturalismo matematikoa ezaugarritzeko emandako sintesia interesgarria izan daiteke, honekin esan nahi dena argitzeko. Dedekinden estrukturalismo metodologikoaren ezaugarriak hiru dira nagusiki: 1)

[18]First, the language and logic to be used are specified, thus the kinds of assertions and arguments that can be made concerning the natural numbers; second, a particular simple infinity is constructed; third, this simple infinity is used to determine the truth values of all arithmetic sentences (by equating them with the truth values of corresponding sentences for the given simple infinity); and fourth, this determination is justified by showing that all simple infinities are isomorphic (so that, if a sentence holds for one of them, it holds for all). (Reck 2011, 23-24 or.).

Multzo-teoriazko tresneriaren erabilerari lotutakoak: objektu berriak eraiki (zenbakiak, idealak, moduluak) edo hauen bildumak (eraztunak, erretikuloak), multzo infinituak erabili ezaugarri estrukturalak barne izanda (orden erlazioak, eragiketak) eta horrela sortutako sistemak goi mailako propietateen bidez aztertu; 2) Oinarrizko kontzeptuak identifikatu eta argitzeko saiakera. Definizio 'zuzenen-egokien' bila: eraginkortasuna, orokortasuna, sinpletasuna, arrotza dena baztertzearena; 3) Aurreko biak lotuz, objektu multzoak edo multzoen multzoak aztertzen ditu, oinarrizko kontzeptuak identifikatzen saiatuz, baina, biak aldi berean: aztertutako sistemen arteko aplikazioak, bereziki estruktura kontserbatzen dutenak, eta hauekiko inbariantea dena aztertzea interesatzen zaio. Zer da inbariantea isomorfismopean. Isomorfismopean inbariantea dena da inportantea estruktura batean, eta beraz az da azalean agertu ohi. Sakoneko ezaugarriok multzo-teoriaren bidez atzematen ditu Dedekindek (baliokidetasun erlazioak, zatidura estrukturak) eta honek multzoei baino funktoreei egiten die erreferentzia.

Dedekinden lanek matematikaren ikuspegi filosofiko sofistikatu bat gordetzen zutela zioten posizioak, aldiz, oso fortzatuak iruditzen zaizkigu. Dedekinden estrukturalismoa bere lan egiteko modura mugatzen zen. Hortik aurrera, bere gutun eta komentarioetan egon daitezkeen elementu filosofikoak, oso bakanak izateaz gain, ez dutelako egiten diren interpretazio interesatuak fundamentuz sostengatzeko balio.

2.3. Bartel L. Van der Waerden

Corryk dioen bezala (1996) XX. mendeko matematikaren eta bereziki aljebraren izaera estrukturalistak, hein handi batean, jatorria Galoisen lanetan badu ere, ez da aurretik zegoenarekiko ondo desberdindu daitekeen jakintza esparru bat bezala aurkeztuko Van der Waerdenen *Moderne Algebra* (1930) argitaratu arte. Beraz, lehenbiziko estrukturak (taldeak eta gorputzak, konkretuki) eta metodo estrukturalak Galoisen lanetan aurkitu baditzakegu ere, *estrukturalismo matematikoa* Van der Waerdenek ordezkatzen duen aljebra abstraktu edo modernoaren[19] baitan heldu eta aurkeztu zela esan dezakegu. Prozesu hau Alemanian eman zen nagusiki 1840 eta 1940 bitartean (Dieudonné 1979).

XVIII. mendean ekuazio polinomikoen teoriaz arduratzen zen matematikaren alorra bezala defini zitekeen aljebra, ekuazio konkretuak ebazteko erabiltzen ziren teknika anitzak, nahiz polinomio orokorren koefiziente eta erroen arteko erlazioen azterketak tartean zirelarik. XIX. mendean zehar, interesguneak hauexek

[19] *Aljebra estrukturalista* azken finean.

izaten jarraitu zuten, nahiz eta berriak ere agertu ziren (matrize eta determinateak, esaterako). Zenbakien teoria, bestalde, zatigarritasunaren, kongruentzien eta faktorizazio problemak aztertzen zituen matematikaren esparru bezala ikusi zitekeen. Atomizazio honen aurrean, sortzen ari zen aljebra estruktural berriak problema hauetako asko marko komun batean tratatzeko formulazio orokorragoak eta ikuspegi berritzaileak garatu zituen. Ikuspegi berri honek poliki-poliki ikerketa aljebraikoen helburuak, tresneria aljebraikoa, erantzun beharreko galdera interesgarrien fokua... erabat aldatu zituen. Transformazioa erabatekoa izan zen. Aljebra zaharrak eta berriak izen bera partekatzearen zilegitasuna zalantzan jartzeraino.

Izugarrizko arrakasta izan zuen *Moderne Algebra* liburuak argitaratu bezain laster. Hizkuntza askotara itzuli zen eta mundu guztiko unibertsitateetan ohiko aljebrako eskuliburua bilakatu zen. Estruktura aljebraikoen zabalkundean garrantzi handia izan zuen, horrenbestez. Eta Mac Lanek onartzen duen moduan, Van der Waerdenen ekarpen nagusi bezala ulertu behar dugu bere testuliburua antolatzeko aukeratutako bidea, aljebra estrukturalistarena hain zuzen ere, garai hartan ez baitzen aljebraren ikuspegi hori nagusitzen zena[20]. Aljebraren ulergarritasun eta antolaketa mailan kokatu beharreko ekarpena da hortaz berea, edo nahi baldin bada, aljebraren barne oinarrien inguruko ekarpena.

Liburuaren edukiei eta antolaketari erreparatuz, Van der Waerdenen aurkezpenean eremu aljebraiko desberdinak definitu eta hauetako bakoitzaren estruktura aurkezten dela ikusi daiteke. Eremu aljebraikoak definitzeko, gaur ohikoak bilakatu diren bi modu erabiltzen ditu. Batetik multzo ez-hutsak abstraktuki definitutako eragiketez (bat edo bi) hornituz (talde, eraztun, bektore espazio, eta abarrekin egiten duen moduan). Beste batzuetan ordea, jadanik existitzen den eremu bat erabiltzen du honen gainean berri bat definitzeko, ondo zehaztutako modu batez (hala nola, integritate eremuen zatikien gorputzak, eraztunen gaineko polinomioen eraztunak, gorputzen hedadurak etab. definitzeko).

Eremu aljebraikoen estruktura aurkezterakoan jarraitzen duen bidea ez da eremuak definitzerakoan darabilena bezain argia. Izan ere, liburuan zehar estruktura aljebraiko nozioa erabiltzen bada ere, hau modu informal batean egiten denez, ez delako eremu desberdinen estruktura zerk osatzen duen esplizituki adierazteko ahaleginik. Baina, formalizatzen ez duen metakontzeptua bada ere, ezin ukatuko zaio Van der Waerdeni, eremu desberdinen azterketa sistematikoki garatu izana, eremu guztietan orden berean lantzen dituen kontzeptu eta galdera orokorretaz baliatuta. Kontzeptu errekurrente hauen artean isomorfismoak, homomorfismoak,

[20]Ikusi (Corry 1996) liburuko lehenbiziko kapituluan egiten den Van der Waerdenena eta garaiko beste aljebrako testuliburu nagusi batzuren arteko konparaketa.

hondar klaseak, biderkadura zuzenak, etab. aurkitu daitezke, guztiak ere multzo teoriazko deitu ditzakegunak. Ez dago, hala ere, kontzeptu orokor hauek hasieratik eskura jartzeko, multzo teoriari buruzko hasierako kapitulurik edo antzekorik, gaur egungo zenbait testuliburutan, aurkezpenaren egitura argitu nahian egin ohi den moduan. Kasu bakoitzean, kasuan kasuko berezitasunekin definituz.

Esaterako, talde isomorfismoak, eraztun isomorfismoak eta gorputz isomorfismoak banan banan definitu ostean, kasu bakoitzean, bi eremu isomorfoak izatearen erlazioa, baliokidetasun erlazio bat dela frogatzen du Van der Waerdenek. Estruktura isomorfoak, funtsean, berdinak direneko kontzeptu orokorra[21], aldiz, esplizituki formulatu gabe dator. Eremu aljebraiko guztien azterketan modu errekurrentean erabilitako eta formalizatu gabeko metakontzeptu hauek dira, azken batean, Van der Waerdenen aljebraren ikuspegi estrukturala inplizituki karakterizatzen duen hierarkia kontzeptuala eraikitzeko balio dutenak.

Aipatu beharrekoa da baita ere aljebraren ikuspegiaren aldaketaren norainokoaren adierazgarri den hurrengo puntua. Van der Waerdenen liburuan, aljebra zaharraren gunea osatzen zuen ekuazio aljebraikoen ebazpenari lotutako kuestioak lehenbiziko aldiz bigarren plano batera pasatzen dira. Hain zuzen ere, Galoisen teoria "estrukturalari" eskainitako kapituluko atal labur batzuetara mugatzen da guztia. Modu berean, zenbaki klase desberdinen multzoek eta hauen ezaugarriek garai batean izandako presentzia erabat desagertzen da, estruktura aljebraiko orokorren adibide soil izatera pasatuz, eta beti ere, hauen ezaugarri aljebraikoetara mugatuz. Objektu klasikoen ezaugarri jakin batzuk baino ez kontuan hartzeko joera hau da estruktura aljebraikoen azterketak ekarritako beste berritasun garrantzitsu bat.

Van der Waerdenen estrukturalismoa, eremuz eremu errepikatzen diren kontzeptuetan gauzatzen diren esplizituki definitu gabeko metakontzeptuetan aurkitu daiteke. Baina ez hor bakarrik. Eremuz eremu errepikatzen diren problemen izaera analogoak ere ematen baitu eremu aljebraiko desberdinen estrukturaltasunaren berri. Esaterako, faktorizazioa eta honek eremu batean duen portaera aztertzea kuestio zentrala da estrukturen ikerketan. Zenbaki osoen eraztunean zenbaki lehenek jokatzen duten paperaren antzekoa beteko duten azpieremu klase bereziak bilatzen dira, eremuaren estruktura argitzeko, eremu horren eta bere azpieremu "lehenen" arteko erlazioa zein den erantzun nahian. Horrela bada, "lehenen faktorizazioarena" eremu desberdinetan kontsideratzen den kuestioa da. Talde teorian talde sinpleek, eraztunetan ideal lehenek eta polinomioen eraztunetan polinomio irreduzibleek jokatzen dute "elementu lehenen" papera.

[21]*Metakontzeptu* deitu diogu.

Kuestio honi lotuta agertzen zaigu, baita ere, eremu baten eta bere azpieremuen sistemaren arteko erlazioa argitzearena. Egia esan, aurrez aipatutako lehenen faktorizazioaren kuestioa kuestio zabalago honen parte bat baino ez da. Aljebraren ikuspegi estrukturalistarentzat, eremu baten eta bere azpieremuen arteko erlazioa argitzeak duen garrantziaren erakuslea da, Birkhoffek eta Orek hogeita hamargarren hamarkadan, nozio hau baliatuz[22], eta modu independentean, "estruktura aljebraiko" kontzeptua formalizatzeko egindako ahalegina.

Ohiko beste problema bat, arestian aipaturikoa, emandako eremu aljebraiko baten gainean modu estandarrean eraikitako eremu aljebraikoei (integritate eremuen zatikien gorputzak etab.) lotuta agertzen zaigu. Jatorrizko eremuaren propietateak eremu berrian zenbateraino kontserbatzen diren ikustean datza arazoa. Esaterako, eraztun bat integritate eremua baldin bada, honen gaineko polinomioen eraztunaz beste horrenbeste esan dezakegun. Edo eraztun batean ideal oro finituki sortua bada, eraztun horren zatidura eraztunetan, edo eraztun horren gaineko polinomioen eraztunetan ere hala izango den. Jatorrizko eremuaren propietateen artetik, honen gaineko eraikuntza klase bakoitzaren kasuan, heredatzen diren propietateak zeintzuk diren argitzen saiatzea izan ohi da antzerako beste ohiko kuestio bat.

Eremu aljebraiko batzuetan posible izan ohi da, datu kopuru murritz batetik, eremuaren estruktura isomorfismoz gaindi determinatzea. Hala gertatzen da, esaterako, bektore espazioen kasuan, eskalarren gorputza eta dimentsioa finkatuta. Van der Waerdenek, orain arte zerrendatutako problemekin egiten duen bezala, eremu aljebraiko bakoitzaren kasuan era honetako emaitzarik lortzea posible den ikusten ere ahalegintzen da.

Eremu aljebraiko desberdinetan errepikatzen dituen kontzeptu eta problema orokor hauek determinatzen dute inplizituki Van der Waerdenen aljebraren estrukturalismoaren izaera, orain arte aipatu ez dugun metodo axiomatikoaren erabilerarekin batera. Metodo axiomatikoaren erabilera, nola ez, aipatutako helburuak lortzeko darabil Van der Waerdenek. Metodo axiomatikoak aljebraren izaera estrukturalari dagozkion ezaugarriak modurik sinpleenean garatzeko aukera ematen du. Baina ez da ulertu behar Van der Waerdenen kasuan ematen den aljebraren ikuspegiaren aldaketa metodo axiomatikoari zor zaionik. Galoisen lanek erakutsitakoa bezalako estrukturen errelebantziak gidatu zuen, batez ere, aldaketa hori, metodo eta kontzeptu berriak funtsezkoagoak eta sakonagoak zirela eraku-

[22]Eremu aljebraiko baten azpieremu berezi batzuk osatzen zuten erretikuloa aztertzean oinarritzen ziren ahaleginok. Ikusi (Birkhoff 1935), (Ore 1935) eta (Ore 1936).

tsi baitzuten. Metodo axiomatikoak, eremu aljebraiko desberdinetan agertutako problema homologoak, ikuspuntu berberetik lantzeko aukera eman zuen, Van der Waerdenen aurkezpenaren batasuna azpimarratuz.

3. Estrukturalismoa matematikan

3.1. Nicolas Bourbaki

1930 urte ingururako argi geratu zen ikerketa matematikoan zebiltzanentzat emaitza berrien inbentarioa egin eta hauek ordenatzeko beharra, azken berrogei urteetan izandako aurrerapenen zenbatekoa ikusita. Tartean ziren Cantor eta Zermeloren multzo teoria, taldeen errepresentazio lineal eta aljebra trukakorra, topologia orokorra eta aljebraikoa, Lebesgueren integrala, ekuazio integralak, teoria espektrala eta Hilberten espazioen teoria, Lieren taldeak, etab. (Dieudonné 1982).

Bourbakiren garairako matematika, geometria, aritmetika, aljebra eta analisian banatzean zetzan sailkapen tradizionala matematikaren izaera sakonari egokitzen ez zitzaion ustea gero eta zabalduagoa zegoen. Sailkapen tradizional hau, disziplina matematikoak hauetan lantzen ziren objektuen arabera bereiztean oinarritzen zen. Horrela bada, aritmetika zenbakien zientzia, geometria objektu espazialen zientzia, aljebra ekuazioen zientzia eta analisia funtzioen zientzia izanik. Bourbakik bere gain hartuko zuen matematikaren berrantolaketa erraldoi hori aurrera eramateko proiektua.

Nicolas Bourbaki 1930. hamarkadako hasierako urteetan sortutako matematikari frantziar gazteen talde batek kolektiboki erabili zuen gaitzizena da[23]. I. mundu gerlaren ostean Frantziako unibertsitateetan erakusten zen matematika eta konkretuki, analisia[24], zaharkitua eta iluna zela pentsatuta, taldearen hasierako asmoa nahiko apala zen: analisirako testuliburu moderno bat idaztea, gai klasikoak Van der Waerdenek erakutsitako ikuspegi modernoago batetik landuta, garaiko testuliburu estandarrak ordezkatzeko.

[23]Matematikari asko izan dira sortu zenetik momenturen batean Bourbaki "taldearen" partaide izan direnak. Bourbakiren urte emankorrenetan, Armand Borelen arabera (1998), proiektuaren zama nagusia eraman zutenak aipatuko ditugu guk hemen: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsartre, Jean Dieudonné eta André Weil. Gerora Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck edo Serge Lang bezalako matematikari garrantzitsuak ere pasako ziren, "pisu" desberdinarekin bada ere.

[24]Hori zen Frantziako unibertsitateetan, tradizioz, pisu handiena izan ohi zuen alorra. Gainera, Alemanian garatzen ari zen aljebra berriaren zantzu handiegirik ez zen antzematen Frantzian garai hartan.

Konturatu ere egin gabe, ordea, XX. mendeko bigarren erdiko matematika itxuraldatuko zuen urte luzeetako lan erraldoiari eman zioten hasiera: *Éléments de mathématique* (Bourbaki 1939). 1939an argitaratu zuten lanaren lehenbiziko bolumena, eta 1998an, oraingoz, azkena. Gaur egun, guztira 7000 orritik gora batzen dituzten 10 liburuk osatzen dute lana, liburu bakoitza bolumen anitzekoa delarik. Multzo teoriari buruzkoa da lehenbiziko liburua, aljebrari buruzkoa bigarrena, topologia orokorrari buruzkoa hirugarrena, aldagai erreal bateko funtzioei buruzkoa laugarrena, bektore espazio topologikoei buruzkoa bosgarrena, integrazioari buruzkoa seigarrena, aljebra trukakorrari buruzkoa zazpigarrena, barietate diferentziagarri eta analitikoei buruzkoa zortzigarrena, Lieren talde eta aljebrei buruzkoa bederatzigarrena eta teoria espektralari buruzkoa hamargarrena (Mashaal 2002).

Matematika berrantolatzeko zeregina bere egin zuen Bourbakik. Horretarako eredutzat hartutako (Van der Waerden 1930) baino zorrotzago jokatu nahi izan zuen, hark egin bezala, besterik gabe nolabaiteko multzo teoria “intuitibo” batekin hasi beharrean, garai hartarako Zermelok, Fraenkelek eta Skolemek, Dedekinden eta Cantorren lana sistematizatuz sortutako multzo teorian fijatu ziren, hemendik beraien asmoetarako behar zituztenak bakarrik hartuz, matematikarien eguneroko praktikatik hurbilen zegoen sistema bezala, beren teoriako oinarriak finkatzeko. Multzoen teoria “naïve” bat eman zuten, multzoak manipulatzeko eta emandako multzoetatik berriak eraikitzeko erregelak eta terminologia finkatuz. Multzo ordenatuen teoria labur azalduz, eta kardinal edo ordinalen inguruko inongo aipamenik egin gabe, Zorn-en lema baliatu zuten lan horretarako. Ikusi daitekeenez, Cantorren lanaren bertsio oso laburtu bat nahikoa izan zitzaien eraikuntza matematikoa oinarritzeko. Hein handi batean, matematika arrunta, multzo teoria “naïve” horretan eraiki zitekeela ikusi izan da harrez gero.

Bourbakiren estruktura matematikoak lehen liburuan deskribatutako multzo teorian oinarritutako sistema axiomatiko interdependenteek osatzen zuten. Enbor bakarrari lotutako adar desberdinez osatutako zuhaitzaren gisara. Multzo teoriazko sistema axiomatiko interdependente hauengan lortzen zuen Bourbakik zuhaitz matematikoaren batasuna erakustea. Zuhaitzaren metafora baino, eraikuntzarena zerabilen Bourbakik.

1948an argitaratu zuen Bourbakik bere matematikaren ikuspegia eta antolaketa azaltzen duen *L’architecture des mathématiques* izeneko artikulua (Bourbaki 1948) goian aipatutako printzipio ordenatzaileak esplizitu eginez. Bourbaki taldearen manifestutzat hartu izan da artikulu hau. Aurrerago Hilbertek bezala (Corry 1996) matematikaren batasunaren kuestioa landu zuen, azken urteetan disziplinak ezagututako dibertsifikazio eta ugalketa ikusita, zerikusi gutxi zuten adarretan bereizteko arriskua egon zitekeela pentsatuta. Bere tesia zen matematika batasun handiko disziplina zela, azaleko iruditik urrun, eta batasun hori agerian jarriko zuena metodo axiomatikoaren erabilera sistematikoa zela. Hilbertek (1899) ederki asko erakutsi zuen zertarako gauza zen metodo axiomatikoa. Hilbert beraren hitzetan teoria matematiko baten aurkezpenean metodo genetikoak izan dezakeen balio pedagogikoaren ondoan, “metodo axiomatikoak, gure ezagutzaren edukien aurkezpen definitibo bat eta berme logiko osoa eskaintzearen abantailak” (Hilbert 1900, 184. or.)[25] ditu. Bourbaki Hilbert baino harago zihoan, hala ere, Van der Waerdenek erakutsi bezala, metodo axiomatikoa, bereziki, estrukturen azterketa sistematikoak egiteko baliatu baitzuen. Van der Waerdenek aljebran estruktura aljebraikoak erabiliz egindakoaren antzerako zerbait egin zuen Bourbakik matematikaren beste esparru batzuetan, estruktura aljebraikoak orokortuz. Bourbakiren ahalegina, matematikaren aljebraizazio ahalegin bezala ere ikusi izan dute[26].

Van der Waerdenen lanean ez da agertzen estruktura aljebraikoaren kontzeptua modu orokor batez formulatuta. Horren ordez estruktura aljebraikoen adibide konkretuak ematen zaizkigu eta estruktura desberdinen teoriak garatzerakoan, errekurrenteak diren eraikuntza eta problemetan inplizituki jasoa datorren aljebraren ikuspegia estrukturalista dela esan dezakegu. Baina Van der Waerdenek estrukturei buruz hitz egiten zuenean, modu intuitibo eta, ondorioz, lauso batean egiten zuen. Ez zen estrukturaren kontzeptua formalizatzen ahalegindu. Bourbakiren kasuan, bide bikoitz bat jarraitzen da, estruktura kontzeptuari dagokionean. Batetik, maila intuitiboan darabilena eta bere lanean errelebanteena suertatuko dena. Hau da hain zuzen ere (Bourbaki 1948)-n, bere matematikaren ikuspegia antolatzeko darabilen kontzeptua. Bestetik, eta askoz arrakasta txikiagoarekin bada ere, ez dugu ahaztu behar Bourbakik estruktura kontzeptua formalizatzeko ahalegina egin zuela, multzo teoriari buruzko lehenbiziko liburuan. (Corry 1996)-n luze eta zabal aztertzen da kontzeptu hau Bourbakiren estrukturalismoan lukeen garrantzia ebaluatu nahian. Ondorioa oso argia da: Bourbakik huts egin zuen estrukturaren kontzeptu abstraktua formalizatzerakoan. Hala ere, beren lanerako ez zuen eraginik izan hutsegite honek, lehenbiziko liburuan definitutako kontzeptu horrekiko erabat independentea baita ondorengo teorien garapena. Dieudonnék eta beste Bourbakitar batzuk onartuko dute estrukturen teoria orokorrik egin ez izana. Are gehiago, matematikan izandako errelebantziari begiratuta, estrukturaren kontzeptu orokorra jasoko duen kategorien teoriaren[27] nagusitasuna ukaezina zela esan zuten (Dieudonné 1970).

[25](Corry 1996, 164. or.)-n aipatua.

[26]Scwhartzek, esaterako, analisiaren aljebraizazioaz hitz egiten du (Schwartz 1997)-n.

[27]Mac Lanek (1996) ere alderatzen du Bourbakiren estruktura formala, kategorien teoriarekin.

Corry-k (1996) ondorioztatzen duen moduan, formalizatu gabeko estrukturaren ideia da garrantzitsuena Bourbakirengan. Azken batean, Galoisen garaitik ezagutzen ziren estruktura aljebraikoak orokortzetik ateratzen zen. (Bourbaki 1948)-n azaltzen den moduan, ezaugarri jakinik gabeko multzo bat emanda, estruktura bat definitzeko multzoko elementuen artean erlazio bat edo batzuk ezartzen dira, eta hauek bete beharreko propietate edo axiomen (estrukturaren axiomak) zerrenda bat ematen da. Bukatzeko estruktura baten teoria axiomatikoa egitea, estruktura horren axiometatik, eta soilik horietatik, ondorio logikoak deduzitzean datza, inplikatutako objektuek izan dezaketen beste edozein propietate, bereziki hauen "izaerari" buruzkoak, baztertuz. Estrukturen teoria formal eragin-korrik ezean, Van der Waerdenaren antza hartzen du. Estruktura guztietan teoria garatzeko moduan, egiten dituen konstrukzioetan (estrukturak, azpiestrukturak, estrukturen biderkadura kartesiarrak, zatidura estrukturak, estrukturen arteko isomorfismoak), erantzun nahi dituen problemetan inplizituki jasota dator Bourbakiren estrukturalismoaren beste partea, parte metodologikoa.

Bourbakik duen matematikaren ikuspegia estrukturen hierarkiaren printzipio ordenatzailean oinarritzen da. Hierarkia honen oinarrian hiru *ama-estruktura* kokatzen ditu: estruktura aljebraikoen ama-estruktura, estruktura topologikoen ama-estruktura eta orden estrukturen ama-estruktura. Multzoen gainean estrukturak definitzeko ezartzen diren erlazioen izaeraren arabera sailkatzen dira hiru klaseok. Estruktura aljebraikoetan, esaterako, multzoko elementuen arteko erlazioak, "konposaketa legeak" izan ohi dira, hau da, multzoko edozein bi elementuri hirugarren bat modu bakarrean erlazionatzen dion erregela bat. Era honetakoak dira Van der Waerdenek deskribatutako taldeak, eraztunak, gorputzak... Orden estrukturetan, elementuen artean definitutako erlazioak, orden erlazioak[28] izan ohi dira, hau da, erlazio bitar erreflexibo, antisimetriko eta trantsitiboak. Zenbaki multzoak ohiko orden erlazioekin, multzo baten parteen multzoa partekotasun erlazioarekin edo zenbaki osoen multzoa hauen arteko zatigarritasun erlazioarekin, esaterako, orden estrukturak direla ikusi daiteke. Azkenik, estruktura topologikoetan, multzoko elementuen arteko erlazioak, espazioaren pertzepziotik datorkigun "hurbiltasunaren" edo "ingurunearen" nozioa kodifikatzeko balio duten azpimultzo irekien bildumak finkatuz ezartzen dira[29].

Bada aspektu bat, sailkapen honetan arreta sortarazten duena. Izan ere, Bourbakik, hasiera batean, hiru ama-estrukturak parez-pare jartzen baditu ere, hauek

[28]Orden partzialak.

[29]Oso laburra da kasu honetan Bourbaki, eta ez du erakusten, aurrekoetan ez bezala, "multzoen arteko erlazioak" zein zentzutan ulertu beharko liratekeen.

matematikan duten garrantzia eta aniztasunari dagokienean oso desberdinak baitira. Estruktura aljebraikoetan elementuen arteko erlazioak "konposaketa legeak izatea" baino ez eskatzeak, "askatasun gradu" asko uzten dituen bitartean, orden estrukturetan, edozein kasutan bete beharreko axioma batzuek ezarten zaizkio erlazioari, kasu honetan, aipatutako "askatasun graduak" askoz gutxiago izanik. Antzerako zerbait gertatzen da estruktura topologikoekin.

Hauek izango lirateke estrukturarik sinpleenak Bourbakiren hierarkian, eta estruktura konplexuagoen jatorrian egongo liratekeenak. Sinpleenak izatearekin batera, estruktura hauek orokorrenak ere badira. Azken batean, estrukturaren axioma kopurua txikiagoa den heinean, sinpleagoa izatea dakar, eta aldi berean, baita orokorragoa izatea ere. Eta alderantziz estruktura konplexuagoek, axioma gehiago dituzte, eta beraz konkretuagoak izan ohi dira.

Bourbakiren deskribapenarekin jarraituz, ordea, ama-estrukturak konbinatzetik estruktura berriak lor daitezke. Aljebra topologikoa, adibidez, aljebra batetako eragiketak topologia jakinetako funtzio jarraituak izatea eskatzen duten estrukturekin, edo alderantziz, topologia aljebraikoa, espazio topologiko baten gainean definitutako objektuen arteko eragiketak eta aljebrak definituz. Konbinazioak aberastuz eta konplikatuz doazen heinean, sarritan estruktura kategorikoekin topo egingo da, kasu honetan isomorfismoz gaindi, bakarra kontsidera daitekeen estruktura baten azterketa zelaiak izango dira hauek. Hor kokatzen ditu Bourbakik analisi erreala edo konplexua, geometria diferentziala, edo zenbakien teoria klasikoa. Bide batez, zelai hauek historikoki matematikaren barruan izan duten errelebantzia kolokan jartzea lortzen da honela: estrukturen bidez antolatutako matematikaren taxonomia berrian leku marginal bat dagokie. Hierarkian betetzen zuten lekutik ondorioztatzen zen errelebantzia eman zien Bourbakik matematikako zelai desberdinei, sarritan historia eta tradizioarekin hautsiz. Matematikaren izaera dinamikoa onartuta, euren asmoa ez zen matematikaren argazki definitibo bat ematea. Estrukturen hierarkiaren ideia mantenduz deskribatutako panorama etengabe aldatzen ari zela onartuz, eta denborarekin antolaketa berriak eta hobeak lortuko zirela uste zuten, egoera definitibo baten asmorik bilatu gabe. Hori bai estrukturen hierarkian printzipio ordenatzaile garrantzitsua aurkitu zuela uste zuen, arkitekturaren metaforak laburtzen zuena:

> Horrela, [...] matematikaren barne bizitzaz hobeto jabetu gaitezke, bai bere batasunaz eta bai bere aniztasunaz. Hiri handi bat bezalakoa da, etengabe garatzen ari diren kanpoko auzo eta aldiriak, modu kaotiko samarrean, inguruetako lurretara zabalduz, erdigunea aldizka berreraikitzen den bitartean, gero eta egitasmo argiago bati eta gero eta antolaketa dotoreago bati jarraituz, kalezulozko laberintodun auzo zaharrak eraitsiz eta periferiarantz

> etorbide berriak hedatuz, gero eta zuzenagoak, zabalagoak eta erosoagoak.[30]

Dieudonnék gerora aitortuko duenez (1970) Bourbakiren asmoa ez zen lan entziklopediko bat egitea, non momentuko ezagutza osoa jasoko zen. Tresna kaxa bat bailitzan pentsatu zuten Bourbakitarrek beren lana. Hau da, matematikariek eguneroko ikerketa lanean, edozein esparrutan zebiltzalarik ere behar izango zituzten emaitzak jasoko zituen bilduma ordenatu bat. Definizio eta teoremarik garrantzitsuenak leku bakarrean jasoko zituen erreferentziazko lan bat, aplikazio eremurik handiena izateko eta lekuan lekuko matematikariek egokitzapen lan handiegirik egin gabe erabili ahal izateko behar bezain era orokorrean aurkeztuak. Adibidez, analisi funtzionalean egin zituzten lanetan Hilbert, Riesz, Helly eta beste batzuek "aukeraketa printzipio" deitu zuten asmakizun bat erabili behar izan zuten, aurrez bakoitzak bere interesgunera egokitutako froga bat eman behar izan zuelarik. Baina "printzipio" hauek guztiak, Banachen edozein espaziotan unitate bola itxiak, beren dualean ahulki tinkoak direla dioen teoremaren kasu partikularrak baino ez dira. Azken hau da beraz Bourbakin aurkituko dugun teorema, eta ez kasu partikular guztiak.

Behin baino gehiagotan aurki daiteke Bourbakin parte hartu izan zutenen hitzetan, Bourbakik matematikan egindako lanaren eta Von Linneo naturalista suediarrak XVIII. mendean izaki bizidunen sailkapenari dagokionean eginiko ekarpen garrantzitsuaren arteko alderaketa. Hona, adibidez, Schwartzek bere autobiografian dioena, hitzez-hitz:

> Bourbakiren matematikaren sailkapena Linnaeusek 1758an, izaki bizidun guztiak, animaliak nahiz landareak, sailkatu zitueneko bere *Systema naturae*-n sarrarazitako iraultza handiarekin pareka daiteke. Adarrak, klaseak, ordenak, familiak, generoak, espezieak eta subespezieak, edozein izaki bizidun edozein mailatan situatzea posible egiten zuenak, aurrez animalia eta landereen artean nagusi zen kaosa ordezkatu zuen. Ornodunen azpierreinuak bost klase ditu: ugaztunak, hegaztiak, narraztiak, batrazioak eta arrainak. Lehenago baleak arrainak zirela uste zen uretan bizi zirelako. Baina beren barne egiturak ugaztun egiten du balea, ez arrain. Baleen azterketa honetan oinarritzen da. Baleek ez dute ilerik, beste ugaztun batzuk duten moduan,

[30]Thus, [...] we can become better aware of the internal life of mathematics, of its unity as well as of its diversity. It is like a big city, whose outlying districts and suburbs encroach incessantly, and in a somewhat chaotic manner, on the surrounding country, while the center is rebult from time to time, each time in accordance with a more clearly conceived plan and a more majestic order, tearing down the old sections with their labyrinths of alleys, and projecting towards the periphery new avenues, more direct, broader and more comodious. (Bourbaki 1948). Guk ingelesezko itzulpenetik (1950) hartu dugu: 230. or.

> baina arrainek ezkatak dituzte. Ugaztunen hezurdurek hogeita hamairu orno dauzkate, arrainenek ez bezala. Baleek birikak dituzte eta airea arnasten dute, arrainek brankiak dituzte eta ura arnasten dute. Arrainek arraultzak jartzen dituzte eta ez dituzte beren txikiak zaintzen – bestera, sarritan irentsi egiten dituzte – bale emeek beren txikiak beraiekin daramatzate eta zaindu egiten dituzte. Linnaeusen sailkapenak baleak ornodunen azpierreinuan, ugaztunen klasean eta zetazeoen ordenean kokatzen ditu. Zetazeoak familia desberdinetan banatuta daude; baleak genero jakin batekoak dira, eta genero hau bale espezie desberdinetan banatua dago. *Systema naturae* 1758an agertu zen lehen aldiz – hamargarren ediziorako, baleak ugaztunen artean sailkatuak aurki ditzakegu, 1753an Daubentonek oraindik arrain deitzen zituen bitartean. Antzera, saguzahar bat ez da hegazti bat, ugaztun intsektu-jale bat baizik. Sailkapena nahiko erraza gertatzen da. Adibidez lehoia ornodunen azpierreinukoa da, ugaztunen klasekoa, haragijaleen ordenekoa , felinoen familiakoa, *Panthera* generokoa, eta *Panthera leo* espeziekoa. Tigreek sailkapen bera daukate generora arte, baina beren espeziea *Panthera tigris* deitzen da. Katuak *Felis felis* dira, pumak *Felis puma*. Txakurrek ornodun, ugaztun eta haragijale bezala sailkapena partekatzen dute, baina familia kaninokoak dira, beren generoa*Canis* da eta espeziea *Canis domesticus*, otsoak *Canis lupus* espeziekoak diren bitartean. Bourbaki da matematikako Linnaeus.[31]

Aurreko testuan ikusten den bezala, Von Linneoren eskutik naturalistek izaki bi-

[31]Bourbaki's classification of mathematics can be compared to the inmense revolution introduced by Linnæus in his *Systema naturae* in 1758, in which he classified all animal and vegetable living organisms. Branches, classes, orders, families, genera, species, subespecies, which make it possible to situate a given organism at every degree, replaced the chaos which reigned amongst animals and vegetables before. The subkingdom of vertebrates contains five classes: mammals, birds, reptiles, batrachians and fish. Previously, whales were thought to be fish because they lived in water. but its internal structure makes the whale into a mammal, not a fish. The study of whales is based on this fact. Whales do not have fur, like other mammals, but fish have scales. the skeletons of mammals have thirty-three vertebrae, unlike those of fish. Whales have lungs and breathe air, fish have gills and breathe water. fish lay eggs and do not care for their young – indeed, they often devour it – female whales carry their young and nurse them. the classification of Linnæus situates whales in the subkingdom of vertebrates, in the class of mammals, in the order of cetaceans. Cetaceans are divided into several families; whales correspond to a particular genus, this genus contains several species of whales. *Systema naturae* first appeared in 1758 – by just the tenth edition, whales are found classified as mammals, whereas in 1753, Daubenton still called them fish. Similarly, a bat is not a bird, but an insect-eating mammal. Classification becomes quite easy. For instance the lion belongs to the subkingdom of vertebrates, the class of mammals, the order of carnivores, the family of felines, the genus emphPanthera, the species *Panthera leo*. Tigers have the same classification right down to the genus, but their species is called *Panthera tigris*. Cats are *Felis felis*, pumas are *Felis puma*. Dogs share the classification as vertebrates, mammals and carnivores, but they belong to the canine family, their genus is *Canis* and their species is *Canis domesticus*, whereas wolves belong to the species *Canis lupus*. Bourbaki is the Linnæus of mathematics. (Schwartz 1997). Guk ingelesezko itzulpenetik (2001) hartu dugu: 150-151. or.

zidunen sailkapenari buruzko ideiak aldatu zituzten. Azaleko antzekotasunak hartzen zituzten kontuan hasieran, baina gero konturatu ziren sailkapen arrazional bat emateko beharrezkoa zela ezaugarri anatomiko eta fisiologiko sakonagoetara, ezaugarri estrukturaletara jotzea. Horrela baino ez ziren izaki bizidunen familiaren sakoneko batasunaz jabetu. Matematikariak ere modu beretsuan jabetuko ziren, Bourbakitarren ustez, matematikaren sakoneko batasunaz, parte desberdinen ageriko desberdintasunak desberdintasun.

Honenbestez, esan dezakegu Bourbakiren lana ez zela ikerketa lana, berrantolaketa lana baino. Multzo teoriazko estrukturen hierarkia printzipio ordenatzailetzat harturik eginiko teoria matematikoen garapen axiomatikoa da Bourbakiren *Éléments de mathématique*. Agian, estruktura matematikoaren definizio zehatz egoki bat erabili izanak matematikaren berfundazio horri lagundu ziezaiokeen, agian kategorien teoria jaso eta esplotatu izanak[32].

Mac Lanek ondo adierazi zuen (1996), ama-estruktura eta hauen konbinaketan oinarritutako matematikaren antolaketa matematikaren adar nagusi batzutan esanguratsua eta sakona suertatu bazen ere, ez zela hala gertatu beste zati garrantzitsu batzutan. Estrukturen bidez ondo deskribatzen diren matematikaren adarretan egindako lana da Bourbakiren ekarpenik handiena: aljebran, topologian, analisi abstraktuan. Baina matematikaren batasuna erakusteko bidean, adar esanguratsu asko geratu ziren, matematika purua deitzen den horren barruan ere beren obratik kanpora[33]. Bourbakiren erako estrukturetara eta garapen axiomatikoetara hain ondo moldatzen ez ziren zelaiak ere bazeuden. Esaterako, aldagai konplexu bateko analisia bezalako matematikaren esparru garrantzitsu bat, Bourbakiren lanetik kanpo geratu zen. Ekuazio diferentzialen kasuan, kaosaren, fraktalen edo sistema dinamikoen inguruan beste horrenbeste esan daiteke. Orokorrean eta analisi funtzionala bezalako salbuespenak badiren arren, analisi modernoak Bourbakiren eskemetan kokatzeko zailtasunak dituela esan dezakegu. Elie Cartanen lanen ondorioz sortutako geometria modernoarekin erlazionatutako esparruek, edo topologia aljebraikoa bezain adar garrantzitsuek ere arazoak dauzkate Bourbakiren erako multzo-teoriazko estrukturen bitartez behar bezala azalduak eta garatuak izateko. Hauek guztiek Mac Laneren eta Eilenbergen kategorien teoriaren baitan,

[32]Le point de vue des structures conduisant inexorablement, comme je crois l'avoir montré, à son propre dépassement dans la théorie des catégories. D'où la question: pourquoi Bourbaki, alors qu'il admet implicitement et hypocritement l'existence et l'importance des catégories, alors que les catégories doivent tant aux travaux de ses membres les plus actifs entre 1945 et 1970, ne saute-t-il pas le pas? Je crois que la réponse tient dans son exigence monolitique de rigueur. (Cartier 1998, 28. or.)

[33]Beraiek onartzen dute hori, baina, teoria horiek oraindik martxan daudela esanaz, eta oraindik ez daudela berregituraketa baterako prestatuta esanaz, justifikatu izan dute (Dieudonné 1982)

edo Grothendiecken topoien teoriaren baitan modu naturalagoan integratzen dira, Cartierren arabera (Cartier 1998). Eta zer esanik ez azken urteotan hainbeste garatu diren konputazio zientzien inguruko esparruetan.

Azken finean, azken urteotan matematikak izandako eboluzioak argi erakusten du, estrukturak matematikan garrantzitsuak izanik ere, badirela hau ulertzeko modu desberdinak batetik, eta ez dutela zertan Bourbakiren erako estrukturak izan; eta bestetik, hainbat teoria matematiko azaltzeko eta garatzeko markorik egokiena ez dutela estrukturek eskaintzen (Mashaal 2002). Bourbakik uste izandakoaren aurka, beraz, estrukturek ez dutela matematikaren printzipio ordenatzailea osatzen, eta Bourbakiren matematikaren ikuspegi estrukturalista, zenbait esparrutan, “aljebraikoenetan”, argigarria suertatu arren, ezin dela ikuspegi hori, besterik gabe matematika osoan inposatu.

3.2. Estrukturalismo kategoriala

Ikusi dugun bezala Bourbakiren estrukturalismo matematikoak matematikaren ikuspegi metaforiko izateko ere balio dezake. Van der Waerdenek aljebraren kasuan egin zuen moduan estrukturen azterketara zuzendutako jakintza arlo bezala erakusten du Bourbakik matematika puroa, baina honetan lagungarria izan zitekeen estruktura orokorren teoria matematikorik marko bezala hartu gabe, estruktura kontzeptuaren orokorpena alferrikako abstrakzio bat bailitzan. Corryk bere liburuan aztertzen duen moduan, era honetako estrukturen teoriak emateko saiakera desberdinak egon dira historian. Horien artean esanguratsuena eta arrakastatsuena Bourbakiren garaikidea den Eilenberg eta Mac Lane matematikarien kategoria eta funktoreen teoria izanik. Bat baino gehiago izan dira Bourbakik kategorien teoriaren aldeko apusturik egin ez izana deitoratu duten matematikariak (Mac Lane 1996, Cartier 1998), tartean, Cartier bezala, burbakitarrak izandakoak ere. Kritika hauetako batzuk iradokitzen dute Bourbakiren lana, estrukturalismorako marko orokor moduan, kategorien teoria hartuta, iritsi zena baino hurrunago iritsi ahal izan zela. Hau da, multzo teoriazko estruktura bourbakitarren ordez, objektu eta morfismoz osatutako estruktura kategorialak hartuz. Cartierrek aipatzen duenez, uko egite kontziente honen jatorrian kategorien teoriako sorrerako artikulutik bertatik (Eilenberg eta Mac Lane 1945) kategorien teoriak erakutsitako zailtasun logikoak egon zitezkeen. Eta onartu ezinak ziren eraikuntza matematikoa errigore osoz eta hutsunerik gabeko argudio kate baten bidez eraiki nahi zuen Bourbakirentzat. Estrukturalismo matematikoa kategorietara hobeto moldatzen dela diotenen ikuspegi desberdinak dira, azken batean, azken urteotan estrukturalismo kategorial goiburupean sailkatu izan diren matematikaren barne antolaketaren inguruko ikuspegiak.

Eilenbergek eta Mac Lanek topologia aljebraikoan izandako kolaborazioaren ondorioz argitaratu zuten 1945ean kategorien teoriari hasiera eman zion artikulua. Mac Lanek garatutako metodo aljebraikoak espazio konkretu batzuren homologia taldeak kalkulatzeko aplikatzerakoan zentzuren batean "naturalak" ziren talde homomorfismo batzuk agertzen zitzaizkien. Naturaltasunaren kontzeptua modurik orokorrenean definitu nahian idatzi zuten aipatutako artikulua. Isomorfismo naturalak, estruktura desberdinak erlazionatzeko balio duten funktoreen arteko transformazio batzuk bezala definitu zituzten azkenean, eta funktoreak berriz, estrukturen arteko transformazioak bezala. Funktoreek, hain zuzen ere, kategorien kontzeptu orokorra eskatzen zuten, multzo teoriazko ikuspegi batetik morfismoak bi domeinuren artean baino ezin baitaitezke definitu. Horrela bada, funktoreak definitu ahal izateko beharrezko izango dituzten domeinuak izango dira kategoriak. Ikusi daitekeenez, beraz, kontzeptualki kategoriak funktoreei subordinatuta agertzen zaizkie sorreran. Kategoria kontzeptuak, Russellen paradoxaren bidetik, arazoak sortzen zituela jakitun izan arren, praktikarako arazorik ez zekartela eta kategorien teoriaren ikuspuntu pragmatiko horrekin aurrera egin zuten. Multzoak ez bezala, kategoriak ez ziren matematikaren oinarrien inguruko eztabaiden harira sortu, estruktura desberdinen arteko elkarrekintzak hobeto deskribatzeko beharretik baizik. Eta bide honetatik autore batzuek (kategoristak gehienak, dena esan behar baldin bada) hizkuntza, terminologia eta metodo kategorialek, gaur egungo matematikaren izaera, Bourbakiren erako multzo teoriazkoek baino hobeto jasotzen dutela defendatzen dute. Hauentzat matematika modernoaren izaera estrukturala, gero eta gehiago, arreta aplikazioetan (eta hauen klaseetan) jartzean eta objektu matematikoak, hauek onartzen dituzten transformazioen bidez determinatzen direneko ideia defendatzen dute.

Ikuspegi hauen atzean matematikaren oinarrien inguruko posizio desberdinak aurki daitezke. Bat gatoz hauetako batzurekin (Awodey 1996, 2004), neurri batean, gaur egungo matematika oinarrizko objektu eta proposizioa batzutatik dedukzioz eraiki daitekeen gorputz homogeneo bat ez dela diotenean. Gaur matematikan esparru anitzak aurki ditzakegu, bai objektuei, bai metodoei eta bai antolatzeko irizpideei dagokienean, eta denborarekin etengabe eboluzionatzen dute gainera. Ez du zentzurik azken soluzioaren ideiak. Horiek guztiak eraikin matematikoaren metaforan errotutako ideiak baino ez dira, Euklideren eta agian hasierako Bourbakiren garaian, baliagarriak izanagatik, gaurko matematikaren ikuspuntutik baztertu beharrekoak.

Gure ikuspegiak Fefermanenarekin (1977, 2013) bat egiten du kategorien teoriak gaurko matematikaren izaera estrukturalista hobekien jasotzen duen esparrua dela diotenek, partzialtasunez jokatzen dutela esaterakoan. Cartierrek dioena egia izan daiteke: topologia aljebraikoan, aljebra homologikoan, geometria aljebraikoan... teoriak modurik sinple eta argienean aurkezteko modua eskain dezake aparatu kategorialak. Ez dezagun ahaztu sorreratik bertatik esparru horiek argitzeko bokazioarekin zetorrela kategorien teoria. Eta, aldiz, gure ustez, matematikaren esparru askotan kategoria teoriaren hizkuntza eta metodoek ez dute erakutsi autore hauek aitortzen dioten eraginkortasunik. Bourbakik ere esaten zuen, esparru bat bere estrukturetara behar bezala egokitzen ez zela ikusten zuenean, denbora kontua zela, teoria horrek garapen maila handiagoa behar zuela eta emaitzen hierarkia logikoa agerian utziko zuen estruktura konkretua bilatzea zela kontua. Behin puntu horretara iritsita beren lanean modu egokian integratzeko moduan izango zela (Dieudonné 1970). Denborak ez zion arrazoirik eman ordea. Kategorien teoriari dagokionean, beste horrenbeste esan daitekeelakoan gaude. Hala ere matematikaren izaera azaltzeko orduan garrantzitsua iruditu zaigun puntu bat dakar lehen lerrorra aipatutako ikuspuntuak. Matematikan funtzioaren ideia orokor batek duen garrantzia, hain zuzen ere. Kategorien teorian funktorearena da oinarri-oinarrizko ideia, estruktura matematikoen arteko erlazio eta elkarrekintzak aztertzeko ezinbesteko kontzeptua dena.

Sarreran esan dugunez, estrukturalismo kategorialaren baitan matematikaren oinarrien inguruko bi posizio nagusi bereiz daitezke; posizio “fundamentista” eta posizio “ez fundamentista” deitu ditugu ditugunak. Askoz gehiago izan dira lehen bidea jorratu izan duten autoreak. Hau da, Bourbakik eta jarduneko hainbeste matematikarik defendatutako multzo teoria axiomatikoan oinarritutako matematika baten aurrean, kategorien teoriazko matematikaren oinarritzeak hobetsi dituztenak, baina matematikaren oinarrien beharra zalantzan jarri gabe. Proposamenak anitzak izan dira zentzu honetan. Lawvereren topos jakinen sistema axiomatiko desberdinen bidezko matematikaren oinarritzeak aipatu ditzakegu (Lawvere 1964, 1966). Edo kategorien multzo kontzeptuarekiko dependentzia logikoa onartu gabe, kategorien teoriari buruzko metateoria kategorialak proposatu dituztenak (Makkai 1997a, 1997b, 1997c, 1998).

Berrogeita hamargarren hamarkadaren bigarren erdian, batez ere, Grothendiecken (1957) eta Kanen (1958) lanekin, kategorien teoria bere eboluzioaren bigarren fasean sartu zen (Landry & Marquis 2005). Grothendiecken kategoria abeldarrek estrukturak, osagai zituzten elementuen bidez karakterizatu beharrean, hauek, beren arteko erlazio funktorialen bidez karakterizatzeko bidea ematen zuten. Hortik aurrera ez zen hain garrantzitsua izango jakineko kategoria bat karakterizatzeko, hauetako objektuak zerez osatuta zeuden deskribatzea, nolabait, azpian zeukan multzo teoriaren garrantzia kolokan jarriz. Kanek bere aldetik, kategorien teoria egituratzeko balioko zuen funktore adjuntuaren kontzeptua aurkeztu zuen. Bide honetatik hirurogehigarren hamarkadan kategorien teoria esparru jakin batzuetan erabilgarria zen hizkuntza abstraktu (oso abstraktu, nahi bada) komenigarri bat izatetik, berezko ikerketa esparru autonomoa bilakatu zen, estruktura orokorren arteko erlazioak aztertzen zituena. Awodeyk (2004) aipatzen duen moduan, teoriak estrukturatzeko multzo teoriazko "behetik gorako" ikuspegiaren ondoan, kategorien teoriak eskainitako "goitik beherako" ikuspegia agertu zen. Kategorien teorian lan egiten zutenentzat, matematikaren ikuspegi berri honek emaitza berriak lortzeko balio izateak, argi erakusten zuen ordura arte pentsatu izan zenaren kontra, matematikan multzoak ez zirela ezinbestekoak, eta beraz ez zutela zertan multzoek izan matematikako kontzepturik oinarrizkoena, esaterako, Bourbakiren lanean esaten zen moduan. Posible zela, batez ere, matematika estrukturen zientzia zela onartzen bazen, kategorien teoriak matematikaren ikuspegi sakonago bat, ulergarriago, eta azken finean, antolaketa egokiago bat ematea.

Azkenik kategoriak matematikara ekarritako "goitik beherako" ikuspegi hau matematikara eta bereziki matematikaren oinarrietara zabaldu beharra dago matematikaren oinarritze kategorialerako proposamen desberdinen azpian.

Lawvere izan zen bide hau jorratzen lehenbizikoa 1963ko bere tesian matematika osoa kategorien kategorian garatzea proposatu zuenean, multzo teoriazko markoak baztertuz. Funktore adjuntuak zehazki definitu, hauen propietateak garatu eta teoria garatzeko sistematikoki erabili zituen Lawverek. Ikuspegi berritzaile batetik erabili zituen Lawverek kategoria eta funktoreak, esaterako, teoria aljebraikoak, eredu partikularrak funktoretzat dituzten kategoria bezala interpretatzeko modua eskainiz. Gerora ezin da esan Lawvereren oinarrien inguruko ikuspegia monolitikoa izan denik, baina beti gorde izan du matematikaren oinarrien inguruko azterketak egiteko berezko eremua eskaintzen duela kategorien teoriak. Beretzat oinarriak ezartzea eremu matematiko bat kategorialki karakterizatzeko, eta beraz, bertako kontzeptuen "goitik behera" aztertu ahal izateko testuinguru bat eskaintzea da. Hala egingo du, esaterako, ETCS (Elementary Theory of Categories of Sets) (Lawvere 1964) edo CCAF (Category of Categories As a Foundation) (Lawvere 1966) bezalako oinarritze kategorialerako topos espezifikoak eskainiz.

Matematikaren oinarritze kategorialen artean badira ikuspegi gehiago ere. Lambekek, adibidez, logizismoa, intuizionismoa, formalismoa eta platonismoa matematikaren topos teoriazko ikuspegi batekin nola batera daitezkeen ikusten ahalegindu da. Horretarako maila altuko tipoen teoriak toposekin identifikatuta, ikuspegi guztientzat onargarria litzatekeen topos librearen posizioa garatu du (Lambek 1994), batetik, eta platonismo klasikoa asetzeko moduko topos absolutorik ez dela erakusten ahalegindu da bestetik (Lambek & Scott 1986).

Bellek 1981ean matematikaren oinarri bezala kategorien teoria hartzearen kontra hitz egin bazuen ere (Bell 1981), bere posizioa aldatuz joan da, denborarekin, toposak eta hauei erlazionatutako maila handiko tipoen teoria intuizionistak, modu lokalean bada ere, kontzeptu matematikoen esanahia aztertzeko koordenatu sistemen sare bat eskaintzen dutela onartuz. Bellek ez du ordea topos konkretu baten aldeko hautua egingo. Matematikaren oinarrietan goitik-beherako ikuspegi pluralista bat da berea (Bell 1988).

Makkaik eginiko ekarpenak ere ekarri ditzakegu gogora. Honen arabera topos teoriazko matematikaren oinarritze batek arazo tekniko gaindiezinak izango lituzke eta, beraz, ez da hau berak proposatzen duen bidea. Makkairen arabera kategorien teoriaren oinarrien inguruko galdera da erantzun beharrekoa. Helburu honekin, Lawvereri jarraituz, kategorien kategoriaren deskribapen metateoriko bat eskaini nahi du. Horretarako FOLDS (First Order Logic with Dependent Sorts) teoriarentzako sintaxi bat, teoria interpretatu ahal izateko azpiko unibertso bat (ZFCren kasuan multzoen hierarkia kumulatiboaren parekoa litzatekeena), eta kategorien teoriarako egokia litzatekeen teoria bat eskainiz.

Matematikaren oinarritze kategorialak bilatzen dituzten ikuspuntu desberdinek mantentzen duten oinarrizko elementu bat da, kontzeptu matematikoak aztertzeko goitik-beherako ikuspegi batetik sistema matematiko abstraktuek elkarbanatzen duten estruktura hauen arteko morfismoen bidez azaldu daitekeela.

Bada ordea, estrukturalismo fundamentista hauei guztiei aspalditik aurpegiratu izan zaien kritika nagusi bat, Fefermanek Mac Lanerekin izandako eztabaida baten harira publiko egindakoa (Feferman 1977), eta gure ustez aipagai izan ditugun erako matematikaren oinarritze kategorial fundamentista guztiei hein berean eragiten diena. Fefermanen arabera bilduma eta eragiketaren nozioak, nozio estrukturalen aurrekoak, eta ondorioz nozio kategorialen aurrekoak dira. Beste era batera esanda, bilduma eta eragiketaren nozioen gainean definitzen dira nozio kategorial guztiak. Lehentasun logiko eta psikologikoaz hitz egiten du Fefermanek. Ez dugu uste lehentasun psikologikoetaz hitz egiteak eztabaida honi inolako argirik ekartzen dionik. Logikoki lehenak izatean, ordea, nozio estrukturalak definitzeko bilduma eta eragiketa nozioak ezinbestekoak direla esan nahi dugu. Azken batean kategorien definizioan objektuen bildumak eta edozein bi objektu emanda, propietate jakinak betetzen dituzten hauen arteko morfismo eta gezien bildumak postulatzen baitira. “Bilduma” eta “eragiketa” hitzak darabiltzalarik Fefermanek berariaz “multzo” eta “funtzio” hitzak saihestu nahian diharduela dirudi, balizko multzo teoria axiomatiko baten aldeko aurrelerrokatzerik ez erakusteko. Ez dihardu multzoez eta funtzioez, kontzeptu hauen aurrekoak liratekeen ideia orokorrei buruz baino.

Azken urteotan matematikaren multzo teoriazko edo kategoria edo topos teoriazko oinarritzeen inguruko eztabaida berriz piztu da, argumentu berri gehiegirik ez den arren. Aurrerago aipatutako kategorien teoriak duen gaur egungo matematika estrukturalarekin bat egiteko erraztasunaren haritik ireki da berriro eztabaida. Gaur egungo matematikaren izaera estrukturala modurik egokienean jasotzeko markoa eskaintzen du kategorien teoriak. Matematikaren filosofia estrukturalistak ere kategorien teoriak eginiko ekarpenei arreta gehiago jarri behar liekeela argudiatu izan da (Awodey 1996). Hellman (2003) ados dago ikuspuntu honekin, baina Fefermanen 1977ko kritikaren harira kategorien teoria multzo teoriazko nozioekiko autonomoa dela erakusteko dago oraindik. Hori egiteko modu bat proposatzen du Hellmanek bere estrukturalismo modalaren baitan kokatutako domeinu handien teoria proposatuz. McLartyk (2004, 2005) Hellmani emaniko erantzuna argia da: matematikaren topos teoriazko (ETCS edo CCAF) sistema axiomatikoen bidezko oinarritze ahaleginak ez dira kategorien teoria abstraktuarekin nahastu behar. Egia da kategorien teoria abstraktuak bilduma eta eragiketaren nozioak aurresuposatzen dituela. Baina matematikaren oinarritzat proposatutako sistemetan, axiometan zerrendatutako kontzeptuak baino ez dira aurresuposatzen eta horietan ez da ez bilduma eta ez eragiketen noziorik. Awodeyk bere aldetik Hellmanen ahalegina gaizki bideratu dela argudiatzen du. Estrukturalismo kategorialaren bidea ez baita matematikari multzo teoriazkoaren alternatiba litzatekeen kategoria teoriazko oinarritze bat eskaintzea, kategoria teoriazko matematikaren interpretazio batek oinarririk behar ez duela erakustea baino. Horregatik deitzen dugu Awodeyrena estrukturalismo kategorial ez fundamentista. Awodeyren arabera matematikan arrazoitzeko moduak ez dira “globalak” eta uniformeak, “lokalak” baizik. Horregatik ezin da matematika behetik gorako eraikuntza homogeneoetan oinarritu. Teorema matematikoak “eskematikoak” direla defendatzen du Awodeyk. Kategoria teoriak agerian jarriko lukeen “goitik behera” arrazonatzeko moduaren arabera nahikoa da emaitza matematiko bakoitza frogatzeko beharrezkoa den informazio errelebante minimoa ematearekin: egoeraren funtsezko ezaugarriak zehaztearekin. “Goitik beherako” ikuspegi honen arabera, Fefermanen bildumak ez dira logikoki kategorien aurrekoak, hori “behetik gorako” ikuspegi fundamentistari baitagokio. Eta beraz, kontzeptu kategorialek ez dute multzo teoriazko kontzeptuekiko dependentzia logikorik.

4. Ondorioak

Galoisen lanek ondo erakusten dute estruktura aljebraikoak zenbateraino garrantzitsuak suerta daitezkeen problema matematiko konplexuak argitzerakoan. Talde eta gorputz estrukturak izan ziren Galoisek modu esplizituan erabili zituen estruktura aljebraikoak. Aurreko matematikariek ondo erlazionatzen ez zekizkiten ekuazio aljebraikoen erradikalen bidezko soluzio partikularrek ezkutatzen zuten sekretua azaleratzeko gauza izan zen Galois, problema orokorraren izaera abstraktua agerian jartzeko balio izan zuten ekuazioen erroen permutazio jakinetan eta hauen arteko konbinaketetan fijatuz. Permutazio berezi hauek, gerora matematikan beste hainbat eta hainbat objektuk bete izan dituen propietateak betetzen zituztela konturatu zen Galois, aurrerago talde axiomak izango zirenak hain zuzen ere. Ekuazio aljebraiko bakoitzarentzat, honen erroei lotutako permutazio berezi batzuk identifikatu zituen, ekuazioaren Galoisen taldea definitzeko. Modu abstraktuan (taula erabilita) kontsideratutako talde honen propietate konbinatorioek, problema karakterizatzen zutela ikusi zuen Galoisek, estruktura aljebraiko abstraktuek problema matematikoak ulertzerakoan izan dezaketen errelebantzia agerian jarriz. Edozein matematikarirentzako saihestuezindako aurrekaria jarri zuen Galoisek, honela. Bide batez ekuazio aljebraikoak erradikalen bidez ebaztearen problema karakterizatuta geratu zen (soluzio konkretuak bilatzetik harago; honetarako Galoisek ez baitzuen erantzunik eman). Galoisen lanak oso kontuan hartuta emango du, esaterako, Kleinek 1872an Geometriaren berrantolaketa sakona, eta neurri batean, geometriaren "amaiera" ekarriko duen *Erlanger Programm* ezaguna. Ekuazioen erroen permutazioen taldeak beharrean, sistema geometriko baten simetrien taldeak kontsideratuta.

Galoisen lanaren esanahi sakona ulertu ahala, estruktura aljebraikoaren ideiak matematika guztiz transformatuko du XIX. mendearen erdialdetik XX. mendearen erdialdera bitartean. Galoisen erako estruktura aljebraikoak, multzo teoriaren hizkuntzak eskainitako zehaztasunarekin eta metodo axiomatikoak emandako sistematizazioarekin loratuz joango dira, esaterako, zenbakien teorian erakutsiko duten emaitzak orokortzeko eta teoriak estrukturatu eta argitzeko joerarekin. Alemanian eman zen estruktura aljebraikoen ugaltze hau, batez ere Dedekind, Noether eta Artinen lanetan. Lan guzti hauek modu sistematiko batez antolatu eta aljebra berriaren ikuspegi homogeneo bat eskainiko duen lehenbizikoa izan zen Van der Waerdenen *Moderne Algebra*. Aljebraren barne oinarrietan kokatu beharrekoa da Van der Waerdenen ekarpen nagusia. Ekuazio aljebraikoak aljebran paper zentral bat izatetik, bazterreko kasu bat izatera pasako dira, estruktura aljebraikoen bidez "estrukturatutako" esparru berrituan. Estruktura aljebraikoak aukeratzen ditu Van der Waerdenek bere testuaren printzipio ordenatzailetzat. Bi zentzutan da beraz estrukturala Van der Waerdenen lana: esplizituki, aljebra estruktura aljebraikoei buruzko esparru bezala deskribatzen duelako, eta inplizituki, multzo teoriazko hizkuntza eta metodo axiomatikoaren erabilerak metodologia estrukturalista deitu duguna ekartzen duelako teoria matematikoen garapenera. Estruktura aljebraiko guztietan problema eta konstrukzio errekurrenteen bidez, hauen ikuspegi homogeneo eta bateratu bat ematea lortzen du.

Van der Waerdenek aljebrara ekarritako estrukturalismo bikoitz hori, moldatuta, matematika osora zabaltzeko ahalegin bezala defini daiteke Bourbakirena. Estruktura aljebraikoek matematikan problema zailak ebatziz erakutsitako errelebantziaren jakitun eta Van der Waerdenek kontzeptu hau printzipio ordenatzaile bezala hartuta emandako aljebraren ikuspegi bateratua orokortu nahi izan zuen Bourbakik. Horretarako Van der Waerdenen prozedura bera baliatu zuen, ahal zen neurrian zorroztuta. Batetik, multzo teoria "naïve" baina esplizitu bat aukeratuko du, Zermelorena matematikarako beharrezkoa ez dela iritzita, estruktura matematikoak zorroztasunez eta hizkuntza homogeneo bat erabiliz deskribatzeko nahikoa izango zaiona. Van der Waerdenen estruktura aljebraikoetatik harago, beharrezkoa ikusten du, hauekin batera, topologia eta orden estrukturak ere bere hierarkia horren oinarrian jartzea. Oinarrizko estruktura hauen konbinazioetatik, orokorretik konkreturako bidea eginez, matematikaren esparru desberdinak, deskribatuz joango da. Bourbakik badaki emandakoa inola ere ez dela definitiboa, matematika etengabeko eboluzio batean egonik, posible dela estruktura klase berriak sortzea, esparru desberdinetara hobeto egokitzen direnak, eta beraiek egindakoa berregitea eskatzen dutenak. Hala ere, multzo estrukturatuaren ideia, esparru matematikoak ulertu eta hauen arteko erlazioak argitzeko, eta azken batean, matematikaren helburu, metodo eta hizkuntzaren batasuna erakusteko ezinbestekotzat jotzen du. Matematika puro osoa estrukturen bidez antolatu eta bateratzekoa da Bourbakiren estrukturalismoa.

Metodo axiomatikoari matematikaren batasuna bilatzerakoan Bourbakik ematen dion inportantziak zuzenean eramaten gaitu gainera matematika metafora arkitektoniko bat erabiliz deskribatzera. Ideia hau ez da Bourbakirena, aspalditik datorrena baizik, bereziki metodo axiomatikoari lotuta. Russellen proiektu logizistan ere badago ideia hori beste modu batez adierazia, Russellek Peanok aritmetika elementalarentzat erakutsitako bidea oinarritzat hartzen zuen logikari aplikatuz. Oinarrizko kontzeptuak eta proposizioak zerrendatuta sistema finkatuta geratzen da. Metodo axiomatikoa erabilita proposizio horien arteko erlazioak erakutsi eta, beraz, matematikarako garrantzitsua dena hain garrantzitsua ez denetik bereiztu beharko du matematikariak, aldi berean hierarkia hori azaltzerakoan esanguratsuak izan daitezkeen kontzeptu konplexuak espliziki definituz. Matematika proposizioen osotasun ideal bat bezala existitzen dela eta matematikariaren lana proposizio hauek aurkitu eta teorietan integratzea dela dioen tesiak indarrean jarraitzen du Bourbakiren lanean.

Gero eta argiago dagoenez, ordea, matematika klasikoaren esparru handiak ezin izan ziren Bourbakiren estrukturetara moldatu. Mac Laneren kritikak gogoan hartuta aldagai konplexu bateko analisia, ekuazio diferentzialak, sistema dinamikoak eta analisiko beste hainbat parte nekez moldatu daitezke axiomen bidez definitutako era bateko nahiz besteko estrukturetara; gauza bera esan dezakegu Bourbakiz geroztik konputazio zientziekin eta algoritmoen teoriarekin lotutako esparruengatik ere. Cartierrek azpimarratutako geometriaren eboluzioak ere (Groethendieck eta honen ondorengoen lanetan) modu fortzatu batean baino ezin dira eraman multzo teoriazko estrukturen bidezko deskribapenetara. Cartierren hitzetan, Bourbakik (nahita) ahaztuta izan zuen kategorien teoriak askoz esparru naturalagoa eskaintzen du esparru hauetan.

Bourbakiren estrukturak ez lirateke, beraz, Bourbakik iradoki bezala, matematikaren taxonomiarik egokiena emateko gauza litzatekeen printzipio ordenatzailea. Honek ez du inola ere Bourbakiren lana baliogabetzen. Bourbakiren garaian matematikan zabaldu ziren multzo teoriazko estruktura matematikoek gaur egun paper garrantzitsua betetzen jarraitzen dute matematikaren barne antolaketan, kategorien teoriak lehen lerrora ekarritako funtzio eta funktore kontzeptuekin batera. Eta hauei lotuta, nola ez, multzo teoria ere ezinbestekoa da gaurko matematikan, izan bertsio batean edo bestean, hizkuntza homogeneo bat eskainiz, arrazonamendu matematiko zorrotzentzako estandar komunak ezarriz, eta behar den kasuan matematika lasaitasunez egin ahal izateko segurtasun eskema nahikoak ezarriz.

Gaur egungo matematikaren praktika, estrukturak eta estrukturen arteko morfismoak, dagokien lekuan kokatzen dituen, kategoria eta funktoreen teoriak hobeto jasotzen omen du zenbait autoreren ikuspegian. Hau da hurrengo aztertu beharrekoa.

Orokorrean estrukturalismo kategorial fundamentistak Fefermanek luzatutako galderak erantzun gabe jarraitzen dutela pentsatzen dugu. Hori da, hain zuzen ere, eztabaida ematen den ia artikulu guztietan Fefermanen argudioak zentruan agertzearen azken esanahaia. Bilduma eta eragiketaren nozioak nozio estrukturalekiko lehentasun logikoa dutela diotenak. Desberdina da Awodeyk defendatzen duena bezalako estrukturalismo kategorial ez fundamentistaren kasua. Onargarria iruditzen zaigu matematikaren esparru batzuk termino kategorialetan modu sinpleago batean artikulatu daitezkeelakoa. Fefermanek luzatutako kritikaren bidetik ordea, gehiegizkoa da Awodeyk esaten duen bezala, gaur egiten den matematika gehienaren kasua hori dela esatea. Fefermanek musika konposatzen ikasi dutenek musika entzun beharrik ez izatearekin konparatzen du egoera. Gaur egungo arrazonamendu matematikoak lokalak eta anitzak direneko ideiarekin ere bat egiten dugu, eta bide batez matematikaren eraikuntza axiomatiko-deduktiboa testuinguru honetan erabat fiktizioa dela uste dugu guk ere. Awodeyk azaltzen duen moduan morfismoak eta funktoreak gaurko matematikaren izaera azaltzeko ezinbesteko nozioak dira, baina haren kontra, kategoria teoriak harea gehiegi duela iruditzen zaigu, Weilek multzo teoria deskribatzeko erabilitako hitzak berreskuratuz.

Estrukturalismo kategorialean badira, beraz, gure ustetan matematikaren izaera azaltzerakoan kontuan hartu beharko liratekeen zenbait aspektu. Horien artean nagusia morfismoaren ideia orokorrak, eta funktoreak bereziki, izan dezaketen zentralitatea. Funktoreek matematikan aurki daitezkeen estruktura desberdinen arteko erlazio eta elkarrekintzak deskribatzeko ezinbestekoak ditugu. Kategorien teoriak matematika estrukturalean morfismoek duten garrantzia azpimarratzen du. Hau da guk proposatzen dugun matematikaren barne oinarrietarako funtzionalismo estrukturalista deitu dugun bidearen oinarria (Ezenarro 2013).

Bide batez esan beharra daukagu Fefermanek estrukturalismo kategorial fundamentistari eginiko kritika onartzeak ez gaituela honen posizioetara lerratzen ezinbestean. Matematikarako proposatzen dituen jatorrizko bi nozioen ideia, bildumak eta eragiketak hain zuzen ere, hasiera batean proposamen onargarria dirudien arren, onargarritasun hori ahuldu egiten bait zaio, matematikaren oinarri bezala behin eta berriz multzo teoriaren ikuspegi propioak formulatzen dituenean. Hilbertekin eta matematikaren oinarrietako proiektu logizistarekin metodo axiomatikoak izandako gorakadaren olatuan indarberritutako eraikuntza matematikoaren metaforak, batetik, Gödelen ez-osotasun teoremekin, matematikarako erabateko ziurtasunaren ametsa amaitutzat joz, eta bestetik, Bourbakiren ahalegin sistematikoak matematika bere baitan jasotzeko erakutsitako ezintasuna dela eta, goia jo zuela pentsatzen dugu. Ezinezkoa da gaur egungo matematika eraikuntza bat bezala irudikatzea: jatorrizko kontzeptu eta axioma gutxi batzuetatik gainontzeko guztia deribatu daitekeela. Matematikaren oinarriei buruz hitz egiterakoan ikuspuntu hau aldatu beharrekoa da, eta bai Fefermanen kritikaren helmugan daudenak, eta bai Fefermanek berak, matematikaren ikuspegi hau mantentzen dutelakoan gaude.

Erreferentzia bibliografikoak

AVIGAD, J. (2006), "Methodology and metaphysics in the development of Dede kind's theory of ideals". In J. Ferreiro´ s and J. Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics*. New York: Oxford University Press.

AWODEY, S. (1996), "Structure in mathematics and logic: a categorical perspective". Philosophia Mathematica 4(3): 209–237.

——— (2004), "An answer to Hellman's question: 'Does category theory provide a framework for mathematical structuralism?"'. Philosophia Mathematica 12(1): 54–64.

BELL, J. L. (1981), "Category theory and the foundations of mathematics". British Journal for the Philosophy of Science 32: 349–358.

——— (1988), *Toposes and Local Set Theories*. Oxford: Oxford University Press.

BEWERSDORFF, J. (2004), *Algebra für Einsteiger*. 2. Auflage. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag.

BIRKHOFF, G. H. (1935), "On the Structure of Abstract Algebras". Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 31: 433-454.

BOREL, A. (1998), "Twenty-Five Years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973". Notices of the American Mathematical Society 45(3): 373-380.

BOURBAKI, N. (1939-), *Éléments de mathématique*. 10 bol.. Paris: Hermann. Bourbaki, N. (1974), *Éléments d'histoire des mathématiques*. Nouvelle édition augmentée. Paris: Hermann.

——— (1948), "L'architecture des mathématiques". In F. Le Lionnais et al., *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris: Cahiers du Sud. Ingelesezko itzulpena: A. Dresden (1950), "The Architecture of Mathematics". The American Mathematical Monthly 57(4): 221-232.

CAJORI, F. (1974), *A History of Mathematical Notations*. Vol 1: *Notations in Elementary Mathematics*. La Salle, IL: Open Court.

CANTOR, G. (1895), *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Mathematische Annalen 46: 481–512. (1897), Mathematische Annalen 49: 207–246. Ingelesezko itzulpena: P.E.B. Jourdain (1915): *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Cantorren bi artikuluak jasotzen dira. Chicago: Open Court.

CARTIER, P. (1998), *Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques*. III. *Le structuralisme en mathématiques: mythe ou réalité?*. Paris: Preprints of the I.H.E.S.

CORRY, L. (1996), *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Basel-Boston-Berlin: Birkhausser.

DEDEKIND, R. (1872), *Stetigkeit und irrationale zahlen*. Braunschweig. Berrargitalpena: *Werke* 3. bol., 315-334. Ingelesezko itzulpena in: W.W. Beman (1901): *Essays on the Theory of Numbers, I. Continuity and Irrational Numbers, II. The nature and meaning of numbers*. Chicago: Open Court.

——— (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Braunschwig. Berrargitalpena: *Werke* 3. bol., 335-391. Ingelesezko itzulpena in: W.W. Beman (1901): *Essays on the Theory of Numbers, I. Continuity and Irrational Numbers, II. The nature and meaning of numbers*. Chicago: Open Court.

DIEUDONNÉ, J. (1970), *The Work of Nicolas Bourbaki*, American Mathematical Monthly 77, 134–145.

——— (1979), "The Difficult Birth of Mathematical Structures.(1840-1940)". In U. Mathieu & P. Rossi (ed.), *Scientific Culture in Contemporary World*. Milan: Scientia, 7–23 or.

——— (1982), "The Work of Bourbaki in the Last Thirty Years". Notices of the American Mathematical Society 29: 618–623.

EDWARDS, H. M. (1984), *Galois Theory*. Springer-Verlag.

EILENBERG, S. & MAC LANE, S. (1945), "General theory of Natural Equivalences". Transactions of the American Mathematical Society 28: 231–294.

EZENARRO, E. (2013), "Estrukturalismotik Funtzionalismora matematikaren barne oinarrietan". Jesus Mari Larrazabalek zuzendua. Argitaratu gabeko doktore tesia. Logika, Kognizio, Hizkuntza eta Informazio Institutua. Euskal Herriko Unibertsitatea.

FEFERMAN, S. (1977), "Categorical foundations and foundations of category theory". In R. Butts (ed.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*. Dordrecht, Holland: Reidel, 149–169.

——— (2013), "Foundations of Unlimited Category Theory: What Remains to Be Done". *The Review of Symbolic Logic* 6(1): 6–15.

FERREIRÓS, J. (1999), *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Bassel-Boston-Berlin: Birkhausser.

GROETHENDIECK, A. (1957), "Sur quelques points d'algèbre homologique, I". Tohoku Mathematical Journal 9(2):119-121.

HELLMAN, G. (2003), *Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?*, Philosophia Mathematica 11(3): 129–157.

HILBERT, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner. Ingelesezko itzulpena (1902). Chicago: Open Court.

——— (1900), *Über den Zahlenbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung 8: 180-184.

KAN, D. M. (1958), "Adjoint Functors", Transactions of the American Mathematical Society 87(2): 294–329

KIERNAN, B. M. (1971), "The development of Galois theory from Lagrange to Artin", Archive for the History of Exact Sciences 8: 40–154.

KLEIN, F. (1872), *Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen*. Erlangen. M.W. Haskell-en ingelesezko itzulpena (1892): *Bull. New York Math. Soc.* 2: 215–249.

LAGRANGE, J. L. (1795), *Lec¸ons élémentaires sur les mathématiques*. Paris: Séances des Ecoles Normales.

LAMBEK, J. (1994), "Are the traditional philosophies of mathematics really incompatible?". The Mathematical Intelligencer 16: 56–62.

——— & SCOTT, P. J. (1986), *Introduction to Higher Order Categorical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

LANDRY, E. & MARQUIS, J. P. (2005), "Categories in Context: Historical, Foundational and Philosophical". Philosophia Mathematica 13(3): 1–43.

LAWVERE, F. W. (1964), "An elementary theory of the category of sets". Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A. 52, 1506–1511.

——— (1966), "The Category of Categories as a foundation of Mathematics". Proc. Conference Categorical Algebra (La Jolla1965). New York: Springer, 1–20.

LIOUVILLE, J. (1846), "Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois". Journal de mathématiques pures et appliquées XI(1): 381–444.

MAC LANE, S. (1986), *Mathematics: Form and Function*. New York: Springer- Verlag.

——— (1992), "The Protean Character of Mathematics". In J. Echeverria et al. (eds.), *The Space of Mathematics*. Berlin: de Gruyter, 3–13. or.

——— (1996), "Structure in Mathematics". Philosophia Mathematica 4(2): 174–183.

MAKKAI, M. (1997a), "Generalized sketches as a framework for completeness theorems. I". *Journal of Pure and Applied Algebra* 115: 49–79.

——— (1997b), "Generalized sketches as a framework for completeness theorems. II". *Journal of Pure and Applied Algebra* 115: 179–212.

——— (1997c), "Generalized sketches as a framework for completeness theorems. III". *Journal of Pure and Applied Algebra* 115: 241–274.

——— (1998), "Towards a categorical foundation of mathematics". In J.A. Makowski & E.V. Ravve (eds.), *Logic Colloquium '95 (Haifa)*. Lecture Notes in Logic 11. Berlin: Springer, 153–190 or.

MASHAAL, M. (2002), *Bourbaki: Une société ecrète de mathématiciens*. Paris: Editions Pour la Science. A. Pierrehumberten ingelesezko itzulpena (2006), Providence, RI: American Mathematical Society.

MCLARTY, C. (2004), "Exploring Categorical Structuralism". *Philosophia Mathematica* 12(1): 37–53.

——— (2005), "Learning from Questions on Categorical Foundations". *Philosophia Mathematica* 13(1): 44–60.

MINKOWSKI, H. (1905), "Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik". *Jarehsbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14:149–163.

ORE, O. (1935), "On the Foundations of Abstract Algebra, I". Annals of Mathematics 36: 406-437.

——— (1936), "On the Foundations of Abstract Algebra, II". Annals of Mathematics 37: 265-292.

RECK, E. (2003), "Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense". *Synthese* 137: 369-419.

——— (2011), "Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics". *Stanford Encyclopedia of Phylosophy*.

SCHARLAU, W. (1981) (ed.), *Dedekind, R. 1831/1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

SCHWARTZ, L. (1997), *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Paris: Odile Jacob. Ingelesezko itzulpena: L. Schneps (2001), *A Mathematician Grappling with His Century*. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser.

SOICHER, L. & MCKAY, J. (1985), "Computing Galois groups over the rationals". Journal of Number Theory 20: 273–281.

STEIN, H. (1988), "Logos, *Logic*, and Logistike: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics". In W. Asprey & P. Kitcher (eds.), *Minnesota Studies in Philosophy of Science. Vol. 11*. Minneapolis, MN: Minnesota University Press, 238–259.

TIGNOL, J. P. (2001), *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1930-1931), *Moderne Algebra I*. Berlin: Springer.

——— (1985), *A History of Algebra from Al Kharisme to Emmy Noether*. Berlin: Springer.

WUSSING, H. (1969), *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Ingelesezko itzulpena: A. Shenitzer (1984), *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.