Matematikaren barne oinarrien bilaketa XIX. mendean

ENETZ EZENARRO

ILCLI. EHU

(In search for internal foundations of Mathematics through the XIXth century)

Abstract

The aim of this short notice is to present the evolution of the process of arithmetization of Analysis during the XIXth century, especially in what concerns the different approaches to the conceptual foundations of continuity, through the internal work in Mathematics done mainly by Bolzano, Cauchy, Weierstrass and Dedekind.

Keywords: *Foundations of Mathematics, arithmetization of Analysis, Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Dedekind*

§**1** *Continuum* delakoa da analisiko kontzeptu zentrala. Continuumak jarraia esan nahi du, etengabea, zulorik edo hutsunerik gabea. Besteak beste, espazioa eta den-bora jarraitzat hartuak izan dira aintzinatetik. Prozesu naturalak, orokorrean, modu jarraian ematen direla defendatu izan dute filosofo askok: *Natura non fascit saltus*[1]. Kontzeptu honek, Matematikaren historian gero eta definizio zehatzagoak jaso izan ditu, eta azken batean, esan daiteke kontzeptu hau hobeto ulertu nahiak gidatu duela, bereziki XIX. mendean asko bizkortu zen Matematikaren Barne Oinarrien bilaketa sistematikoa.

XIX. mendean izandako aurrerapenez ohar gaitezen, aipatzekoa da XVIII. men-de amaieran oraindik ere, funtzio jarraiak argumentuaren aldaketa infinitesimalek aldaketa infinitesimalak eragiten dizkietenak zirela, funtzioaren kontzeptua bera ez zela batere argia eta, zer esanik ez, infinitesimoaren kontzeptu iheskorra zerabiltela. Hain zuzen ere, infinitesimo hauek continuumarekin duten sakoneko lotura aztertzetik bideratuko da XIX. mendean zehar analisiaren errigorizazioa ekarriko duen mugimendu kritikoa. Infinitesimoaren

[1] Leibnizen esaera ezaguna.

kontzeptua iluna izanda ere, ez da ahaztu behar XVII. mendean eman zen kalkuluaren garapenean paper garrantzitsua jokatu zuela eta aipagai dugun mugimendu kritikoak Matematikatik erauzi arren, XX. mendearen azken aldera Analisi Ez Estandarraren bidetik zilegitasun osoz berreskuratua izan dela.

§**2** 1800 urte ingururako zenbait matematikari arduratzen hasiak ziren Analisi deitutako matematikaren esparruko kontzeptuen eta metodoen lausotasuna eta tinkotasunik eza ikusita. Analisian guztiz zentrala zen funtzio kontzeptua, bera, ez zen batere argia. Serie edo batura infinituak ere,edozein modutan erabiltzen ziren, beraien konbergentziaz edo dibergentziaz ezer esateko beharrik ikusi gabe, eta horrela jarduteak, gaizkiulertuak ez ezik, zenbait paradoxaren agerpena ere ekarri zuen. Are gehiago nahastu zituzten bazterrak, Fourierren beroaren azterketa lanen ondorengo funtzioak serie trigonometriko bidez errepresentatzeko ohiturek. Gainera, deribatua edo integrala bezalako funtsezko kontzeptuak ez ziren inoiz definizio zehatz baten bidez aurkeztu.

Nahasmendu honetan ordena ezartzen hasteko determinazioa hartu zuten zenbait matematikarik. Analisi osoa kontzeptu aritmetikoen gainean berreraikitzea zen asmoa. Ez da seguruenera kasualitate hutsa izango, analisiaren aritmetizazio saiakera honek, denboran, geometria ez-euklidearraren agerpenarekin bat egitea. Gauss izan zen bi eraikuntzetan parte hartu zuen bakarretako bat, eta badirudi, gainontzean, guztiz talde independenteak aritu zirela bi lan hauetan. Hala ere, Analisiaren oinarritzat geometria baztertuz aritmetika hobesteko erabakia, geometria euklidearraren balioaren erlatibizazio horretan sostenga daiteke, nahiz garai hartarako ezagunak ziren geometria euklidearraren zenbait akats (Kline 1972).

§**3** Kalkuluaren oinarrizko kontzeptuak errigore handizgoaz lantzearen bidea urratzen lehenbizikoetarikoa izan zen Bernhard Bolzano (1781-1848): filosofo eta matematikari bohemiarra. Gaussek, Algebraren Teorema fundamentalaren frogapena eman zuenean, egin zituen kontsiderazioak geometrikoak zirela eta, Bolzanok ez zuen behin betiko frogapen bezala onartu. Frogapen matematikoetan espazio eta denborazko intuizioak erabiltzearen aurka zegoen, eta hori izango zen berak landuko zuen bidea. Espazio eta denborazko intuizioak arrazonamendu matematikoetatik erauzteko jarraitasunaren definizio egokia behar zela ohartu zen Bolzano (Boyer 1949).

Kalkulua magnitude geometriko jarraiak zenbaki (diskretu) bidez landu nahi izatetik sortu zela onartzen bada, esan daiteke Newtonek mugimenduaren jarraitasunaren intuizioa erabiliz problemak desbideratzea (baina inola ere ez konpontzea) lortu zuela. Leibniz, bere aldetik, jarraitasunaren postulatuaz baliatu zen aurrera egiteko, arazoa bere horretan utziz.

Bolzano izan zen, bada, funtzio jarraiaren definizioak funtsean limitearen kontzeptuan lur hartzen zuela argi azaldu zuen lehenbizikoa. $f(x)$ funtzio bat jarraia zen tarte batean Bolzanorentzat, tarte horretako edozein x baliotarako, $f(x + \Delta x) - f(x)$ aurrez finkatutako edozein balio baino txikiagoa egiten bada, behar bezain Δx txikia (positiboa edo negatiboa) hartuz. Hau da, gutxi asko, gerora Cauchy-k emango zuen eta gaur egun oraindik indarrean dagoen funtzio jarraiaren definizioa. Ez da hor bukatuko, baina, Bolzanoren ekarpena; izan ere, deribatu kontzeptuaren lehenbiziko formulazio esplizitua ere eman baitzuen, Kalkuluaren oinarrizko ideiak diferentzia finituen proportzioen limite moduan azal zitezkeela ohartuta. $f'(x)$, $f(x)$-en deribatua, Δx zerorantz hurbiltzen den heinean (goitik nahiz behetik) $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ proportzioak hurbiltzen duen balio bezala definitu zuen.

Bolzanok argitu zuen beste puntu garrantzitsu bat funtzio jarraien eta deribagarrien arteko erlazioa izan zen. Ordura arte, eta beti ere jarraitasunaren intuizio fisiko batek gidatuta, funtzio baten jarraitasuna baldintza nahikotzat hartzen zen funtzio horrek deribatua izateko. Bolzanok kontrako adibide bat eman zuen, uste hau okerra zela erakusteko nahikoa zena: jarraia izanik deribagarria ez zen funtzio bat eraiki zuen.

Bolzanoren ideiek Kalkuluak hartuko zuen norabidea argiro erakusten bazuten ere, egia esan behar bada bere lanek oso zabalpen txikia izan zuten bere garaian, eta inor gutxik ezagutu zituen hasiera batean. Augoustin-Louis Cauchy (1789-1857) matematikari frantziar handia izango zen Bolzanoren ordez, orden kronologikoz honi zegokion aitorpena jasoko zuena. Beranduago izan arren garai beretsuan ideia beretsuak garatu zituen, eta gainera Kalkuluaren oinarri berri bezala onartuak izan ziren orokorrean bere lanak.

§**4** XIX. mendeko matematikari handienetakoa izan zen A. L. Cauchy frantziarra, bere garaiko matematikaren alor gutietan lan eskerga egin eta emaitza garrantzitsu asko lortutakoa. Bolzanok ez bezala, Parisen lan egin zuen, garai hartako matematikaren hiriburuan, eta horri zor zaio bere lanek aurrekoarenek baino era-gin handiagoa izatea komunitate zientifikoan. Bere ekarpen handietako bat, esan bezala, Kalkuluan sarrarazi zituen errigore handiko metodoek osatzen dute. Hiru tratatu handitan biltzen dira lan hauek guztiak: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), eta *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). Hauen bidez lortu zuen Cauchyk gaur erakusten den Kalkuluaren lurruna orduko matematikarien jardunean txertatzea.

Cauchyren kasuan, Bolzanorenean bezala, limitearen kontzeptua aritmetikoa zen, geometrikoa baino gehiago. Cauchyrentzat, aldagai batek hartzen zituen ondozondoko balioak, etengabe, finkatutako balio bati hurbiltzen zaizkionean, berarengandik nahi bezain hurbil izateraino, azken hau aurreko guztien limitea deituko zen. Aurrerago definizio formalagoa eta zehatzagoa ematea lortuko bada ere, definizio honek intuizio geometriko eta fisikoa bazter uzten ditu jadanik. Urrunago ere joan zen Cauchy, limite kontzeptu hau argitu asmotan, zenbaki irrazional bat, zenbaki horrengandik gero eta hurbilago zeuden zenbaki arrazionalen limitea zela esaterakoan. Emango du zeresanik adibide honek, ikusiko dugunez.

Limitearen kontzeptua zehaztuta, orden ezberdinetako infinitesimo eta infinituak[2] definitu zituen Cauchyk, beti ere, jatorrizko kontzeptu bakartzat limitea hartuz. Horrela jokatuta, arestian kontzeptuok sortutako zailtasun kognitiboak saihestea lortu zuen.

Deribatuaren definizioa ematerakoan ere aurrez Bolzanok emandakotik ez zen asko urrundu. $y = f(x)$ funtzioa eta x aldagaiaren Δx aldakuntza hartuta, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ proportzioaren limiteari, Δx zerora doanean, y-ren x-ekiko deribatua deitu zion eta $f'(x)$ bezala denotatu zuen, existitzen zenean. Hau izango zen Kalkulu Diferentzialaren oinarrizko kontzeptua Cauchyren teorian. Gero, limitea eta infinitesimoarekin egin zuen era analogoan funtzio baten diferentziala zer zen definitu zuen, eragiketak egiteko orduan Leibnizen $\frac{dy}{dx}$ notazioak eskaintzen zituen abantailei eutsi nahian, baina, beti ere, hark zituen zehaztasun arazoak gaindituz.

Kalkulu Diferentzialaren kontzeptuak argituz joan ziren heinean, funtzioaren kontzeptua bera ere aldatuz joan zen. XVIII. mendean zehar, aldagai eta garai hartan ohikoak ziren eragiketen sinboloen bidez modu sinplean idatz zitezkeen adierapenentzat gorde ohi zen "funtzio" izena. Bolzanoren kontradibidea ez zen, noski, hor kokatzen, baina hura baino lehenago ere, Joseph Fourierrek erakutsi zuen kurba ez-jarrai arbitrarioak funtzio trigonometrikoen serie infinituen bidez analitikoki adieraz zitezkeela. Kurba baten jarraitasunak ez zuen, hortaz, bere adierazteko moduarenganako dependentziarik. Jarraitasuna berdefinitu beharra zegoen. Arazo honi Cauchyk emandako erantzuna, beste behin, Bolzanorenarekin bat etorri zen: $f(x)$ tarte batean jarraia izango zen, x aldagaiaren, Δx aldakuntza infinituki txiki batek, $f(x + \Delta x) - f(x)$ funtzioaren aldakuntza infinituki txiki bat bazekarren, hau da, x a-ra doan heinean $f(x)$-en limitea $f(a)$ bada, tarte horretako edozein a baliorentzat. Definizio honen bidez, Cauchyk buelta eman zien aurreko mendeetan Newtonek eta Leibnizek jarraitasunaren zentzu lauso batean oinarrituta justifikatutakoari, hau da, aldagaien propietateak mantendu egiten zirela limitera pasatzerakoan. Cauchyk erakutsi zuen limitearen definizioari esker ematen zela hau, erlazio aritmetiko zehatz batzuk betetzen zirenean, eta ez beti.

---

[2] Esaterako, $y = f(x)$, n ordenako infinitesimala izango zen x infinitesimalarekiko, $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{y}{x^{n-\varepsilon}}\right) = 0$ eta $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{y}{x^{n+\varepsilon}}\right) = \pm\infty$ betetzen baziren, edozein ε konstante positibo txiki batentzat.

Kalkuluaren sorrerako urteetan diferentzial eta deribatuaren kontzeptuen inguruko eztabaida, integralarenaren gainetik egon zen. Greziarren garaitik azalera hurbilduak kalkulatzeko, azpiazaleren batuketetan oinarritutako metodoak ezagutzen ziren. Baina limitearen ikuspegi berritzaileak bultzada garrantzitsua eman zion azaleren kalkuluari ere. Azpiazaleren batuketetan oinarritutako metodo horiek limitearen ikuspuntutik interpretatuta, integral mugatu deitutakoari bide eman baitzioten.

Barrow, Newton eta Leibniz, besteak beste, konturatuta zeuden ordurako, azalerak kalkulatzearen problema, kurben zuzen ukitzaileak kalkulatzearen alderantzizko problema baino ez zela. Deribatuak kalkulatzeko algoritmoak eskura izan zirenean, hauek alderantzikatuz, integral mugatuen kalkulua sistematizatzeko bidea aurkitu zen: integral mugagabea deitu izan dena, hain zuzen ere. Integrala ulertzeko bi modu zeuden, beraz: batuketa bezala, integral mugatua, eta diferentziazioaren alderantzizko bezala, integral mugagabea. Kalkulu diferentzialaren sorrera urteetan, integrala ulertzeko bigarren modua zen nagusi, diferentzialaren alderantzizkoa dela esaten duena. Hori dela eta integrala diferentzialaren gainean oinarritu ohi zuten eta hau zen eztabaida nagusia diferentzial eta deribatuaren inguruan zntratzearen arrazoia.

XIX. mendearen hasieran, ordea, egoera aldatu egingo zen, Cauchyk integrala (mugatua) batuketa baten limite moduan birdefinitu zuenean. Pausu honi esker, deribatuaren pareko estatusa onartu zitzaion integralari. $y = f(x)$ funtzio bat, a-tik b-rako tartean jarraia izanik, ondoko batura definitzen bada: $S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$, $|x_{i+1} - x_i|$ gero eta txikiagoa izanik, S_n-ren balioak limite bat iritsiko du, f funtzioa eta a eta bbalioen menpean baino egongo ez dena. Limite hau zen, Cauchyk f-ren $[a, b]$ tarteko integral mugatu deitu zuena. Ondoren Analisiaren Teorema Fundamentala frogatu zuen. Teorema honek, integrazioa eta deribazioa modu independentean definitutako eragiketak izan arren, bata bestearen alderantzizko eragiketa bezala uler daitekeela baieztatzen zuen. Hizkuntza matematikoan esanda, $f(x)$ $[a, b]$ tartean jarraia izanik eta edozein $x \in [a, b]$ hartuta, $F(x)= \int_a^x f(t)dt$ bada, orduan $F'(x) = f(x)$ ematen da. Funtzio ez jarraietarako hedapenak ere onartzen zituen teorema honek.

Cauchyk garatutako limitearen teoriak, serie infinituen teorian ere berebiziko garrantzia izan zuen. Cauchyren integral mugatuaren definizioan agertzen ziren bezalako serie infinituak, urte asko lehenagotik erabiliak ziren matematikan, baina XIX. mende hasiera aldera arte ez zen hauen konbergentziaz arduratu beharra ikusi. Cauchy eta bere garaikideak ohartu ziren serie infinituentzat konbergentziaren definizioa eta erizpideak beharrezkoak zirela, kalkuluetan inongo arazorik gabe erabili ahal izateko. Horrela bada, serie infinitu bat konbergentetzat definitu zuen, n handitzen zen heinean $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ batura

S limite batera indefinituki hurbiltzen bazen, eta kasu horretan S bera izango zen seriearen batura.

Diferentziazioa, integrazioa edo jarraitasunaren kasuan bezala, serie infinituen konbergentziaren arazoan ere limitearen nozioa agertzen zen[3]. Honekin lotuta eman zuen Cauchyk segiden konbergentziarako Cauchyren irizpidea deitu izan dena, segida konbergenteak ezaugarrituz: segida bat konbergentea izango da behar beste n handia hartuz, p eta q, n baino handiagoak diren edozein bi baliotarako S_p eta S_q nahi bezain hurbil daudenean. Baldintza honen beharrezkotasuna konbergentziaren definiziotik berehala eratortzen bazen ere, ez zen gauza bera gertatzen baldintzaren nahikotasunarekin.

Bigaren parte honek zenbaki errealen sistemaren definizio bat eskatzen zuen, zenbaki irrazionalena azken batean, eta horrelakorik ezean frogapena hankamotz gelditzen zen. Arazo hau gainditzeko Cauchyren proposamena, zenbaki irrazionalak arrazionalen segiden limite bezala definitzea izan zen. Segida baten limitea, segidan aurrera eginez, berau eta segidako gaien arteko diferentzia edozein zenbaki baino txikiagoa egitea posible egiten zuena zela kontutan hartzen badugu, Cauchyren definizioak zirkularitate arazo bat zuela ohar gaitezke: definitu nahi den zenbaki irrazionalaren, beraren, aurretiko existentzia, eta beraz definizioa, beharrezkoa da zenbaki irrazionala Cauchyk egin bezala definitzeko.

Analisiaren oinarrien bilaketan arazo serio bat suposatzen zuen zenbaki irrazionalen definizio zirkular honek. Analisia oinarritzeko erabili nahi zen funtsezko definizioak ezin zuen arazo logikorik planteatu. Hori zela eta, limitearen definizioan oinarrituko ez ziren zenbaki irrazionalen definizioak ematen saiatu ziren XIX. mendeko bigarren erdiko zenbait matematikari, Analisiaren aritmetizazio prozesua bururaino eraman nahian. Karl Weierstrass (1815-1897) izan zen matematikari horien artean garrantzitsuenetakoa.

§**5** Cauchy hartu izan da, orokorrean, Kalkulu Diferentzial Zehatzaren fundatzaile bezala. Hala ere, bere azalpenetan sistematikoki agertzen diren zenbait esamoldek, zehaztapenak eskatzen dituzte, hala nola: “infinituki hurbildu”, “nahi bezain txikia”, “aldakuntza infinituki txikien azken proportzioak”. Intuizio geometriko eta fisikoaren eragina nabarmena da adierazpen hauetan. Weierstrass izan zen errigoreari zegokionez azken hitza esan zuen matematikaria; Analisiari, intuizio geometriko eta fisiko guztietatik aparte zegoen oinarri aritmetiko erabat formala eman zion. Aurrez Bolzanok egin zuen bezala, Weierstrassek ere eraiki zuen tarte batean jarraia izanik, tarte horretako puntu batean ere deribagarria ez zen funtzioa, funtzio jarraiek deribagarritasuna bere baitan zeramaten ideia oraindik orokortua oinarri gabe utziko

[3] Zenok aintzinatean proposatutako Akiles eta dortokaren paradoxa, adibidez, limitearen kontzeptuan oinarritutako ideia hauetan berrinterpretatuta askatu ahal izango da.

zuena. Fourierrek ekarritako serie trigonometrikoak erabiliz eman zuen honako kontradibidea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$$

non $x \in \mathbb{R}$, a zenbaki oso bakoitia, $0 < b < 1$, eta $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ diren.

Zehaztasun logikoa lortzeko asmotan Kalkulua zenbaki kontzeptutik abiatuta eraiki nahi zuen honek ere, geometriatik erabat bereiziz. Horretarako, Cauchyk hasitako lana bukatu beharra zegoen, besteak beste, limitearen ideiarekiko independentea zen zenbaki irrazionalaren definizio bat emanaz. Ikerketa sakonak egin zituen aritmetikaren oinarrien inguruan, bereziki zenbaki irrazionalen teoriari zegozkionak. Bere lanetan aurkitzen da, gainera, Cauchyren akatsa gainditzeko moduaren hazia: zenbaki irrazionalaren definiziotzat segidaren limitea hartu beharrean, segida bera hartzea.

Weierstrassen ekarpenen artean koka dezakegu baita ere, aldagai, limite, funtzio jarrai eta hauetatik eratorritako gainontzeko kontzeptuen lehenbiziko formulazio estatikoa. Beretzat x aldagai bat, zenbakizko balioen multzo batetan, hauetako edozein designatzeko erabiltzen zen letra bat izango zen. *L* zenbakia, $x = x_0$ puntuko $f(x)$ funtzioaren limitea izango da, hautazko ε zenbaki txiki bat emanda, ε beste zenbaki bat aurki bazitekeen, x_0-rekiko δ baino distantzia txikiagora zegoen edozein x-entzat, $f(x)$ eta L-ren arteko distantzia ε baino txikiagoa izanik. Weierstrassen aldagai eta limitearen teoria estatikoak infinitesimoa bezalako kontzeptu iheskorrak alboratzea ahalbidetu zuen.

Greziarrek aldakortasun edo bariabilitatearen ideia matematikatik baztertu zuten beren garaian, Zenoren paradoxak saihestu ezinak suertatzen zitzaizkielako. Kontzeptu honek berak, Erdi Aroan biziberritu eta itxura geometrikoa hartu ostean, XVII. mendean Kalkuluaren sorrera eragingo zuen. Ia bi mendetako eztabaidaren ostean, Weierstrassen aldagaiaren eta limitearen teoria estatikoarekin amaituko zen eztabaida. Zenoren paradoxak teoria berriaren argitan ez ziren jadanik gaindiezinak suertatuko. Eta beste behin, eztabaidak pizteko eta teoria egokiagoak aurkitzeko motibazio gisa hain emankorra suertatutako kontzeptua, aldakortasun edo bariabilitatea, matematikatik kanporatua izango da, landutako teoria baterako desegokia delako.

Continuum edo jarraitasunaren ideiek oraindik ere lausoak izaten segitzen zuten eta beharrezkoa izango zen kontzeptu hauek ere, aipatu berri dugun aldakortasunarenak bezala, beren formalizazio prozesua izan zezaten matematikaren barne oinarriak era formal batean finkatuta gelditzeko. Richard Dedekind (1831-1916) eta Georg Cantor (1845-1918) izan ziren Weierstrassek urratutako bideari jarraituz, Heinek, Merayek eta Russell berak egindako ekarpen apalagoak ahaztu gabe, kuestio hauek sakonki aztertu eta emaitzarik garrantzitsuenak eman zituzten matematikariak. Biek ere Weierstrassek zenbaki irrazionalak definitzeko egindako ahaleginari jarraipena eman zioten eta bakoitzak bere bidetik, Analisiaren aritmetizazioa bururaino eraman zuten.

§**6** Limiteen eta zenbaki irrazionalen gaineko Cauchyren arrazonamendu zirkularrak ekidin asmotan antzeko bideak hartu zituzten, besteak beste, Cantorrek eta Heinek. Segida infinitu baten limitea izango zen, *S* zenbaki baten existentzia postulatu beharrean, segida konbergente hori bera[4], hartu zuten S-ren definiziotzat.

Agian interesgarriagoa da, garai beretsuan Dedekindek egindako arazoaren azterketa eta emandako soluzioa zein zen ikustea. Funtsean bi definizioak baliokideak direla ikus badaiteke ere, Cauchyren arazoa gainditzeko zenbaki irrazionalak definitzeko moduan zentratu beharrean, jarraitasunaren definizio matematiko bat ematen ahalegindu zen Dedekind, magnitude geometriko jarraien eta diskretuaren arteko funtsezko desberdintasuna non zegoen galdetuz. Puntu batek zuzen bat ebakitzen duen moduan pentsatuz askatu zuen korapiloa. Zuzen bateko puntuak bi klasetan sailkatzen badira, bietako bateko edozein puntu besteko edozein punturen ezkerraldean egonik, beti ere, zatiketa hori ematen duen puntu bat eta bakarra dagoela konturatu zen. Hau ez da hala gertatzen zenbaki arrazionalen multzoan. Horrela bada, eta zuzen bateko puntuak zenbaki errealekin bijekzioan jar daitezkeen Cantor-Dedekinden axioma erabilita, esan daiteke, zenbaki arrazionalen multzoa, bi klasetan banatzen den orotan, lehenbiziko klaseko edozein zenbaki bigarrengoko edozein baino txikiagoa izanik, zatiketa hori (Dedekinden ebakidura) ematen duen zenbaki erreal bat eta bakarra dagoela. $\sqrt{2}$ denotatzen duguna izango litzateke, adibidez, propietate honen arabera karratua bi baino txikiagoa eta handiagoa duten zenbaki arrazionalen zatiketa edo Dedekinden ebakidura emango ligukeen zenbaki erreala (Dedekind 1901).

Dedekinden postulatuaren bidez zenbaki arrazionalen multzoa osatuz, zuzenek duten jarraitasun propietate bera izango zuten zenbaki errealek, espazio eta den-bora intuizioak alde batera utzita, eta posible zen errigore osoz limiteen inguruko teoremak frogatu eta hauetatik eratorritako Kalkulua eraikitzea.

Aipatu beharrekoa da, definizio hauen ostean (bereziki Dedekindena eta gero), zenbaki kontzeptuan, ezaugarri nagusia magnitudea zela pentsatzetik, benetan in-porta zuena ordena zela ohartzera pasa zela. Limite kontzeptua bera ere, kontzeptu ordinal bat bezala definitua zegoen, eta Kalkuluaren oinarrizko bi definizioak hauek izanik, hauetatik, jadanik hutsune logikorik gabe,

---

[4] Zehatzak izateko, Cauchyren baldintza betetzen duten zenbaki arrazionalen segiden artean definitutako baliokidetasun erlazio bat erabiltzen da, lortutako baliokidetasun klaseen bidez zenbaki errealak definitzeko.

eraikitzen zen teoria ere, ordura arte uste zen bezala kantitatearen zientziaren adar bat baino gehiago, erlazioen logikaren adar bat izango zen.

Hasieran esan dugun bezala, Dedekinden ekarpenak, limitearen definizioarekiko independentea zen zenbaki errealaren definizioa emateaz gain, magnitude jarraiaren izaeraren inguruko azalpen formal bat ere eskaintzen zuen. Ordura arte aldagai independente jarrai bat, balioak zuzenki bati zegozkion tarte batean har zitzakeena zen. Dedekindek modu formal batean azaldu zuen aldagai edo multzo jarraien izaera, honako hiru baldintzekin ezaugarrituz: multzo bat jarraia izateko, multzo ordenatua, dentsoa eta perfektua[5] izan behar zen. Horra, bada, jarraitasunaren formalizazio matematikoa.

Jarraitasunaren teoria matematikoa, beraz, logikoki garatutako zenbakien eta multzoen teorian oinarritzen zen. Azken kontzeptu hau formalizatzeak, bere aldetik, bilduma infinitu bat zer zen argitzea eskatzen zuen (Grattan-Guinness 1980). Cantorrek osatu zuen lehenbizikoz infinituaren teoria formal bat, bere azpimultzo ez propio batekin bijekzioan jar daitezkeen multzoak multzo infinitu definituz. Cantorren teoria beharrezkoa izan zen Kalkuluan egiten zen infinituaren erabilerari oinarri logiko tinko bat eman ziolako. Noski, infinituaren formalizazio matematiko bat zen heinean, ez zuen infinituaren kontzeptuak berez dakartzan zailtasun kontzeptualak gainditzeko balio, baina zenabaki irrazionalak eraikitzerakoan edo limite kontzeptuaren baitan infinituari egindako erreferentziak erabat justifikatuak zeuden Cantorren lanarekin. Multzo teoria modernoaren oinarriak ere ezarri zituen bide batez.

Dedekind eta Cantorren lanarekin Analisian zenbakiak eta hauen multzo finitu nahiz infinituak baino ez daudela frogatuta geratu zen. Burutua zegoen, bada, aritmetizazio prozesua, Matematikak ordura arte ezagutzen ez zuen zehaztasun for-mala tarteko.

Erreferentziak

[1] BOYER, C.B. (1949) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover Publications, New York.
[2] DEDEKIND, R. (1901) *Essays on the Theory of Numbers*. Open Court Publishing Company, Chicago.
[3] GRATTAN-GUINNESS, I. (1980) *From the Calculus to Set Theory, 16301910: An Introductory History*. Duckworth, London.
[4] KLEIN, M. (1972) *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York.

[5] Multzo *ordenatua* izateak, multzoko elementuen artean orden erlazio bat izatea eskatzen du; multzo *dentsoa* izateak, bi elementuren artean beti hirugarren bat aurkitu ahal izatea eskatzen du; eta azkenik, multzo *perfektua* izateak, Dedekinden jarraitasunaren postulatua betetzea.