Matematikari baten apologia [10-18 atalak]*

G. H. Hardy

A Mathematician's Apology.
Cambridge: Cambridge University Press, 1940

(A Mathematician's Apology [Sections 10-18])

10

Matematikari batek, margolari edo poeta batek bezala, ereduak egiten ditu. Bere ereduak besteenak baino iraunkorragoak badira, *ideiekin* eginda daudelako da. Margolari batek forma eta koloreekin egiten ditu ereduak, poeta batek hitzekin. Margo batek «ideia» bat adieraz dezake, baina normalean ideia hori arrunta eta garrantzirik gabea izan ohi da. Askoz gehiago dira ideiak poesian; baina Housman-ek azpimarratu zuen bezala, ideiek poesian duten garrantzia puztu egin ohi da: «Ideia poetiko bezalako gauzak badirela pentsatzeak ez nau konbentzitzen... Poesia ez da esandako hori, hori esateko modua baizik.»

Not all the water in the rough rude sea
Can wash the balm from an anointed King.

Izan al litezke lerroak hobeak, eta izan al litezke aldi berean ideiak arruntagoak eta faltsuagoak? Ideien pobretasunak nekez izan dezake eraginik hitzezko ereduaren edertasunarengan. Matematikariak bestalde, ez dauka ideiak ez beste materialik lanerako, eta beraz litekeena da bere ereduak gehiago irautea, ideiak hitzak baino gutxiago higatzen baitira denborarekin.

Matematikariaren ereduek, margolari edo poetarenak bezalaxe *ederrak* izan behar dute; ideiek, koloreek eta hitzek bezalaxe, modu harmoniatsuan bat etorri behar dute. Edertasuna da lehen proba: ez da leku iraunkorrik munduan matematika itsusiarentzat. Eta honaino iritsita oraindik oso hedatua dagoen (nahiz eta ziurrenik duela hogei urte baino askoz gutxiago izan) gaizki ulertze batez arduratu behar dut,

* Itzulpen hau Enetz Ezenarrok egin du, *A Mathematician's Apology* liburuaren 1967ko ediziotik. Eskerrak eman nahi dizkio Jesus Mari Larrazabali lan hau egiteko emandako laguntza eta aholkuengatik.

Whiteheadek «superstizio literario» deitu zuenaz, hain zuzen ere. Honen arabera matematikarekiko maitasuna eta honen balorazio estetikoa «belaunaldi bakoitzean eszentriko gutxi batzuei mugatutako monomania» bat da.

Zaila izango litzateke gaur egun, matematikaren erakarpen estetikoaren aurrean erabat entzungor litzatekeen gizon jantzirik aurkitzea. Oso zaila izango da agian edertasun matematikoa *definitzea*, baina berdin gertatzen da edozein modutako edertasunarekin —ez dakigu zehazki zer ulertzen dugun poema eder bezala, baina horrek ez digu eragozten poema eder bat antzematea irakurtzen dugunean—. Hogben profesorea bera ere, matematikan osagai estetikoaren garrantzia edozein preziotan minimizatzearen aldekoa dena, ez da ausartzen bere errealitatea ukatzera. «Badira matematikak erakarpen hotz inpertsonal bat eragiten dien zenbait gizabanako... Matematikaren erakarpen estetikoa oso erreala izan daiteke aukeratu gutxi batzuentzat.» Baina «gutxi» direla gogoratzen digu, eta eragindako erakarpena «hotza» dela (eta benetan jende zentzugabea dela, unibertsitate hiri txiki eta zozoetan, espazio zabal eta irekietako haize freskotik babestuta bizi dena). Honetan Whiteheaden «superstizio literarioa» errepikatu besterik ez du egiten.

Kontuak kontu, gutxi dira matematika baino «maitatuagoak» diren gaiak. Jende gehienak estimuan dauka matematika, doinu atsegin batez goza dezakeen modu berean; eta seguru asko jende gehiago egongo da benetan matematikan interesatua dagoena, musikan interesatua dagoena baino. Itxura batean aurkakoa dirudien arren bada honentzat azalpen errazik. Musika jendearen emozioa suspertzeko erabil daiteke eta matematika aldiz ez; musikarako ezintasuna ez da hain lotsagarritzat hartzen, eta bestalde jende gehienak matematikaren izenari dion beldurrak, gaiaren inguruan duen ezjakintasuna zintzotasunez puztera darama.

Hausnarketa txiki bat nahikoa da, «superstizio literarioaren» zentzugabekeria agerian uzteko. Xake jokalari asko dago edozein herri zibilizatutan —Errusian ia populazio eskolatu osoa; eta xake jokalari orok antzeman eta prezia dezake joko edo problema «eder» bat—. Haatik xake problema bat matematika hutsezko ariketa bat *baino ez da* (partida bat ez da guztiz hala, psikologiak ere zeresan handia baitu), eta problema bat «ederra» dela esaten duen edonork, edertasun matematikoa txalotzen du, nahiz eta alderatuz gero maila apaleko edertasuna den. Xake problemak matematikaren ereserki-doinuak dira.

Ikasgai berbera ikas dezakegu, maila apalagoan baina jende gehiagorentzako, bridge jokoarekin, edota oraindik gehiago jaitsiz, egunkarietako buruhausteen atalekin. Joko hauen ospe ikaragarria oinarrizko matematikaren erakarpen indarrari eginiko omenaldia da, eta Dudeney edo «Caliban» bezalako buruhauste sortzailerik onenek, ezer gutxi erabiltzen dute matematikaz gain. Beren lana ezagutzen dute; jendeak nahi duena «kolpe» intelektual txiki bat baino ez da, eta beste ezerk ez du matematikak eskainitako «kolpe» hori eskaintzen.

Benetako teorema matematiko bat aurkitzea edo berraurkitzea baino atsegin handiagorik ez dela gehitu nezake; ez eta gizon ospetsuenentzat ere (hauen artean matematikarentzako erdeinuzko hitzak izan dituztenak). Herbert Spencerek bere autobiografian hogei urte zituenean frogatu zuen zirkuluen inguruko teorema bat berrargitaratu zuen (Platonek bi mila urte lehenago frogatua zuela jakin gabe). Berriagoa eta interesgarriagoa da Soddy profesorearen kasua (baina kasu honetan, bere teorema berea da benetan)[2].

11

Xake problema bat benetako matematika da, baina esan genezake matematika «xumea» dela. Nahi bezain burutsua eta korapilatsua delarik ere, nahi bezain mugimendu original eta harrigarriak eginda ere, bada falta duen oinarrizko zerbait. Xake problemak garrantzirik gabekoak dira. Matematikarik onena serioa da ederra izateaz gain —«garrantzitsua» nahi izan ezkero, baina hitz hau oso anbiguoa da, eta «serio» hitzak askoz hobeto azaltzen du esan nahi dudana—.

Ez naiz matematikaren ondorio «praktikoekin» pentsatzen ari. Itzuliko naiz puntu honetara beranduago: oraingoz, xake problema bat zentzu gordinean «alferrikakoa» dela onartzen badugu, gauza bera esan genezake matematikarik onenaren inguruan; matematikaren oso zati txikia da erabilgarria praktikan, eta zati txiki hori matematika aspergarria da hortik kanpo geratzen denarekin alderatuta. Teorema matematiko baten «seriotasuna» ez datza bere ondorio praktikoetan, normalean hutsalak direnak, baizik eta teorema honek uztartzen dituen ideia matematikoen *esanahian*. Zakar esanda, ideia matematiko bat «esanguratsua» dela esan dezakegu, modu natural eta argigarri batean, beste ideia matematiko batzuen multzo handi batekin uztartu daitekeenean. Horrela bada, teorema matematiko serio batek, hau da, ideia esanguratsuak lotzen dituen teorema batek, bai matematika eta baita beste zientzia batzuk ere aurrerapen garrantzitsuetara gida ditzake. Xake problema batek ez du sekula pentsamendu zientifikoaren garapen orokorrean eraginik izan; Pitagoras, Newton, nahiz Einstein-ek ordea, bere garaian zientziaren norabidea guztiz aldatu zuten. Teorema baten seriotasuna ez datza, noski, bere ondorioetan; hauek bere seriotasuna berresteko frogak baino ez dira. Shakespearek ikaragarrizko eragina izan zuen ingeles hizkuntzaren garapenean, Otwayk bestalde hutsaren hurrena, baina ez da hau Shakespeare poeta hobea izateko arrazoia. Askoz poesia hobea idatzi zuelako da poeta hobea. Xake problemaren apaltasuna, Otwayren poesiarena bezala, ez datza bere ondorioetan bere mamian baizik.

[2] Ikus «Hexlet»aren inguruko bere gutunak, *Nature* aldizkarian 137-9 liburukiak (1936-7).

Bada beste puntu bat oso labur baztertuko dudana, ez interesgarria ez delako, zaila delako eta estetikaren inguruko eztabaida serio baterako gaitasunik ez dudalako baizik. Teorema matematiko baten edertasuna neurri handi batean bere seriotasunaren *araberakoa* da, poesian bertan ere bertso baten edertasuna, neurri batean, gordetzen dituen ideien esanahiaren araberakoa den bezalaxe. Shakespeareren bi bertso aipatu ditut arestian, hitzezko eredu baten zentzugabeko edertasunaren adibide gisa; hala ere

After life's fitful fever he sleeps well

bertsoak oraindik ederragoa dirudi. Ereduari dagokionean lehen bezain ederra da, eta kasu honetan ideiek zentzua daukate eta tesia sakona da, horregatik hunkitzen gaitu askoz modu sakonagoan. Ideiak ereduarentzat garrantzitsuak dira, baita poesian ere, eta askoz gehiago, noski, matematikan; baina ez dut auzi hau serioski argudiatuko.

12

Garbi dago honez gero aurrera egiteko aukerarik izango badugu, «benetako» teorema matematikoen adibideak jarri beharko ditudala, edozein matematikarik lehen mailakotzat onartuko dituen teoremen adibideak. Erronka handia da hau, lan hau idazteko ezarri ditudan murrizketak kontutan hartuta. Alde batetik nire adibideek oso sinpleak izan behar dute, eta jakintza matematiko espezializaturik gabeko irakurlearentzat ulergarriak; hasierako azalpen landurik behar ez dutenak izan behar dute; eta irakurleek frogak eta enuntziatuak jarraitzeko modukoak izan behar dute. Baldintza hauek, esaterako, zenbakien teoriako teoremarik ederrenetako asko baztertzen dituzte, hala nola, Fermaten «bi karratuen» teorema edo elkarrekikotasun koadratikoaren legea. Bestetik, nire adibideek matematika «onenetik» ateratakoak izan behar dute, hau da, matematikari profesionalen matematikatik; eta baldintza honek adibide asko kanpoan uzten ditu, ulergarriak egitea nahikoa erraza izan arren, logika edo filosofia matematikoaren esparruetan barneratzera eramango baikintuzke.

Greziarretara jotzea izango dut hoberena. Matematika greziarraren bi teorema ezagun eman eta frogatuko ditut. Teoremak «sinpleak» dira, bai ideiari dagokionean eta bai frogapena egiteko moduari dagokionean ere, baina ez dago dudarik mailarik altueneko teoremak direla. Biak ere aurkitu zirenean bezain esanguratsuak eta freskoak dira —bi mila urtek ez dute zimurrik marraztu ez batean eta ez bestean—. Azkenik, edozein irakurle bizkorrek, bai enuntziatuak eta bai frogapenak ere ordu bakarrean beregana ditzake, bere ekipamendu matematikoa nahi bezain ahula izanda ere.

1. Lehenengoa zenbaki lehenak infinitu izatearen Euklidesen froga da[3].

Zenbaki lehenak edo *lehenak*

(A) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

zenbakiak dira, biderkagai txikiagoetan deskonposatu ezin direnak[4]. Horrela bada, 37 eta 317 lehenak dira. Zenbaki lehenak, beste edozein zenbaki oso biderkadura bidez eraikitzeko erabilitako materiala dira: horrela $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$. Lehena ez den edozein zenbaki, gutxienez zenbaki lehen batez (normalean bat baino gehiagoz) zatigarria da. Infinitu zenbaki lehen dagoela frogatu behar dugu, hau da, (A) segida ez dela inoiz amaitzen.

Suposa dezagun segida hori amaitu egiten dela, eta

$$2, 3, 5, \ldots, P$$

dela segida osoa (beraz P da zenbaki lehen handiena); eta hipotesi honen gainean ondoko formularen bidez definituriko Q zenbakia kontsidera dezagun

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot P) + 1$$

Argi dago Q ez dela 2, 3, 5, ..., P zenbakiez zatigarria, 1 hondarra uzten duelako horietako edozeinez zatitzerakoan. Baina bera lehena ez bada ere, *lehenen batez* zatigarria da, eta beraz bada zenbaki lehen bat (Q bera izan daitekeena) aurrez zerrendatutakoak baino handiagoa dena. Baina hau gure hipotesiarekin kontraesanean dago, alegia, P baino zenbaki lehen handiagorik ez izatearenarekin; eta beraz gure hipotesia faltsua da.

Absurdura Eramanez egin dugu froga, eta A*bsurdura Eramatea,* Euklidesek hain gogoko zuena, matematikariak duen tresnarik dotoreenetakoa da[5]. Xakeko edozein taktika baino dotoreagoa da: xake jokalari batek peoi edo beste piezaren baten sakrifizioa eskainiko du agian, baina matematikariak *jokoa* eskaintzen du.

13

2. Nire bigarren adibidea Pitagorasek[6] emandako $\sqrt{2}$ren «irrazionaltasunaren» froga da.

«Zenbaki arrazional» bat a/b zatiki bat da, non a eta b osoak diren; a-k eta b-k zatitzaile komunik ez dutela suposa dezakegu, izango balute ezabatu egin

---

[3] *Elementuak* IX 20. *Elementuak*eko frogapen askoren benetako jatorria oso iluna da, baina ez dirudi arrazoi berezirik dagoenik, honako hau Euklidesena ez dela uste izateko.

[4] Arrazoi teknikoak daude 1 zenbakia lehena ez kontsideratzeko.

[5] Metodo hau saihesteko moduan antola daiteke froga, eta zenbait eskolatako logikariek nahiago izango lukete hala eginez gero.

[6] Frogapen hau Pitagorasena dela uste izan da tradizionalki, edo behintzat bere eskolaren emaitza. Teorema hau, askoz forma orokorragoan agertzen da Euklidesen (*Elementuak* X 9).

ahal izango genuke eta. «$\sqrt{2}$ irrazionala dela» esatea, 2 zenbakia $(a/b)^2$ moduan adierazi ezin dugula esateko beste modu bat da, eta hau esatea

(B) $$a^2 = 2b^2$$

ekuazioa betetzen duten eta biderkagai komunik ez duten a eta b osorik ez dela esatearen berdina da. Aritmetika hutsezko teorema bat da hau, eta ez du «zenbaki irrazionalen» inongo ezagupenik eskatzen, edo eta hauen izaerari buruzko ezein teoriarenganako menpekotasunik erakusten.

Absurdura Eramanez argudiatuko dugu berriz ere. Demagun (B) egia dela, a eta b faktore komunik gabeko zenbaki osoak izanik. (B)-tik ondorioztatzen da a^2 bikoitia dela ($2b^2$ 2az zatigarria izateagatik), eta beraz a ere bikoitia dela (zenbaki bakoiti baten karratua bakoitia denez gero). a bikoitia bada,

(C) $$a = 2c$$

beteko da c zenbaki osoren batentzat, eta beraz

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

edo

(D) $$b^2 = 2c^2$$

Horrela bada b^2 bikoitia da, eta beraz (aurreko arrazoi beragatik) b bikoitia izango da. Hau da, a eta b biak dira bikoitiak, eta 2 zatitzaile komuna dute hortaz. Hau gure hasierako hipotesiarekin kontraesanean dago eta hortik hipotesi faltsua dela ondorioztatzen da.

Pitagorasen teorematik ondorioztatzen da karratu baten diagonala honen aldearen bidez neurtu ezina dela (bien arteko zatiketa ez dela zenbaki arrazionala, ez dagoela biak multiplotzat dituen unitaterik). Izan ere, karratuaren aldea gure luzera unitatetzat hartzen badugu eta d bada diagonalaren luzera, orduan, Pitagorasi atxikitutako oso teorema ezagun baten bidez[7],

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

eta beraz d ezin da izan zenbaki arrazional bat.

Zenbakien teoriako nahi adina teorema eder aipa ditzaket, esanahia edozeinek ulertzeko modukoak. Adibide bezala, «aritmetikaren oinarrizko teorema» deitutakoa dago, edozein zenbaki oso, zenbaki lehenen biderkadura bezala *modu bakarrean* deskonposa daitekeela dioena. Horrela bada $666 = 2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}37$ eta ez dago beste deskonposaketarik; ezinezkoa da $666 = 2{\cdot}11{\cdot}29$ edo $13{\cdot}89 = 17{\cdot}73$ izatea (eta biderkadurak kalkulatu gabe ikus dezakegu). Teorema hau bere izenak inplikatzen duen moduan, goi mailako aritmetikaren oinarria da;

[7] Euklides, *Elementuak* I 47.

baina bere froga «zaila» ez izanda ere, sarrera bat eskatzen du eta matematikarekin ohitu gabeko irakurlearentzat aspergarria suerta daiteke.

Beste teorema ezagun eta dotore bat Fermaten «bi karratuen» teorema da. Zenbaki lehenak bi klasetan sailka daitezke (2 zenbaki lehen berezia baztertuz gero)

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \ldots$$

4arekin zatitzean 1 hondarra uzten duten zenbaki lehenak, eta

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, \ldots$$

3 hondarra uzten dutenak. Lehenbiziko klaseko zenbaki lehen guztiak, bi osoren karratuen batura moduan idatz daitezke, eta ezinezkoa da hau bigarren klasekoentzat: honela

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2,$$

$$17 = 1^2 + 4^2, \quad 29 = 2^2 + 5^2;$$

baina 3, 7, 11 eta 19 ezin dira modu honetan adierazi (irakurleak aprobak eginez egiazta dezakeen moduan). Hau da Fermaten teorema, zuzentasun osoz aritmetikako teoremarik ederrenetako bat bezala hartua dena. Tamalez frogapena ez da edonork ulertzeko modukoa, matematikari trebeentzakoa baizik.

Badira «multzoen teorian» (Mengenlehre) ere teorema ederrak, Cantorren continuumaren «zenbagarritasun ezaren» teorema kasu. Hemen daukagun zailtasuna justu aurkakoa da. Frogapena aski erraza da behin hizkuntza menderatzera iritsitakoan, baina teoremaren *esanahia* argitu bitartean azalpen asko eman behar izaten da. Horrela beraz, ez naiz adibide gehiago ematen saiatuko. Emandako adibideek neurgailu bezala balio dute, eta hauek preziatzeko gai ez den irakurleak nekez preziatuko du ezer matematikan.

Matematikaria ideiaz osatutako ereduen egilea dela esana dut arestian, eta edertasuna eta seriotasuna direla eredu horiek epaitzeko irizpideak. Zaila egiten zait, bi teoremak ulertu dituen inork, teorema hauek jarritako proba gainditu izana ezbaian jar dezakeela sinistea. Dudeneyren buruhausterik burutsuenekin, edo xake maisu handiek aurkeztutako problemarik dotoreenarekin alderatuz, gure bi teoremen nagusitasuna nabaria da bi alderditatik: bada erratu ezinezko maila diferentzia bat. Teoremak askoz serioagoak dira, eta baita askoz ederragoak ere; defini al dezakegu pixka bat zehatzago nagusitasun hori non datzan?

14

Lehenbiziko lekuan teorema matematikoek *seriotasunari* dagokionean duten nagusitasuna bistakoa eta eztabaidaezina da. Xake problema ideia multzo burutsu baina mugatu batetik eratorritakoa da, sakonean bata bestetik asko ezberdintzen ez diren ideiak, eta kanpo eraginik batere ez dutenak hain zuzen ere. Guk berdintsu pentsatuko genuke xakea inoiz asmatua izan ez balitz, eta aldiz, Euklides eta Pitagorasen teoremek gure pentsamenduan eragin sakona izan dute, baita matematikatik kanpora ere.

Horrela Euklidesen teorema funtsezkoa da aritmetikaren estruktura osoarentzat. Zenbaki lehenak aritmetika eraikitzeko ditugun lehengaiak dira eta Euklidesen teoremak lan hori egiteko nahiko material badugula esaten digu. Baina Pitagorasen teoremak aplikazio zabalagoak ditu eta adibide hobea eskaintzen digu.

Lehenbizi Pitagorasen argumentuak asko zabaltzeko aukerak ematen dituela konturatu behar ginateke; eta printzipio aldaketa txikiekin, oso «irrazional» klase zabaletara aplika daitekeela. Oso modu antzekoan (dirudienez Teodorok egin zuen bezala)

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$$

irrazionalak direla froga dezakegu edo (Teodorotik haratago joanaz) $\sqrt[3]{2}$ eta $\sqrt[3]{17}$ irrazionalak direla[8].

Euklidesen teoremak, osoen aritmetika koherente bat eraikitzeko materialez ondo hornituta gaudela esaten digu. Pitagorasen teoremak eta honen hedapenek, behin aritmetika hori eraikita, gure beharretarako nahikoa ez direla erakusten digute, izan badirelako hainbat magnitude gure arreta bereganatzen dutenak, eta osoen aritmetikarekin neurtu ezinezkoak direnak; karratuaren diagonala adibiderik begi bistakoena baino ez da. Matematikari greziarrak berehala konturatu ziren aurkikuntza honen garrantzia handiaz. Mota bereko magnitude guztiak neurgarriak direla onartuz hasi ziren (nik uste, «sen onaren» agindu «naturalak» jarraituz); edozein bi luzera adibidez, unitate komunen baten anizkoitzak direla; eta horretan oinarrituta proportzioaren teoria bat eraiki zuten. Pitagorasen aurkikuntzak agerian jarri zuen oinarritze onen solidotasun eza, eta *Elementuetako* bosgarren liburuan azaldua datorren, Eudoxoren askoz teoria sakonagoa bideratu zuen, matematikari moderno askoren iritzian matematika greziarraren lorpenik handiena dena.

Teoria honek oso izpiritu modernoa du (*), eta zenbaki irrazionalen teoria modernoaren hastapen puntutzat jo dezakegu, analisi matematikoa irauli eta azken urteotako filosofian eragin handia izan zuena gainera.

Ez dago beraz dudarik bi teorema hauen «seriotasunaz». Azpimarragarria da bestalde, ez batak eta ez besteak ez duela garrantzia «praktikorik» txikiena

[8] Ikus Hardy eta Wrighten *Introduction to Theory of Numbers*eko IV. kap., Pitagorasen argumentuaren orokorpen ezberdinen gaineko eztabaidak eta Teodororen inguruko enigma historiko bat ikusteko.

ere. Aplikazio praktikoetarako konparatiboki txikiak diren zenbakiak interesatzen zaizkigu; izaretako astronomia eta fisika atomikoa baino ez dira zenbaki «handiez» arduratzen, eta hauek duten garrantzia praktikoa, oraingoz ez da matematika huts abstraktuenak duena baino askoz handiagoa. Ez dakit zein den ingeniari batek inoiz erabili duen zehaztasun mailarik handiena —oso eskuzabal jokatuko dugu, hamar zifra esangarri esaten badugu—. Horrela bada

3,14159265

(pi-ren balioa 8 hamartarrekin emanda)

314159265/1000000000

hamar digituko bi zenbakik osatutako zatikia da. 50847478 dira 1000000000 baino txikiagoak diren zenbaki lehenak: ingeniari batek ez du gehiago behar eta gustura egon daiteke gainontzekorik gabe. Hau guztia Euklidesen teoremari dagokionez; eta Pitagorasenari dagokionean, bistakoa da zenbaki irrazionalak ez direla interesgarriak ingeniarientzat, hurbilketek baino ez baitituzte kezkatzen, eta hurbilketa guztiak arrazionalak dira.

15

Teorema «serioa» ideia «esanguratsuak» dituen teorema da, eta ideia matematiko bat esanguratsu egiten duten ezaugarriak zehatzago aztertzen saiatu beharko nukeela pentsatzen dut. Oso zaila da hau, eta ez dirudi nik egin dezakedan ezein azterketa oso baliagarria izango denik. Ideia «esanguratsu» bat ikusteaz bat ezagutu dezakegu, eman ditudan bi teoremen kasuan gertatu den bezalaxe; baina ezagupen ahalmen honek sofistikazio matematiko maila nahiko handia eta ideia hauen konpainian emandako urte luzeekin baino lortzen ez den hurbiltasuna eskatzen du. Dena delarik ere, azterketaren bat egiten saiatu behar dut; eta posible izan behar litzateke, nahiz eta ezegokia izan, ahal den neurrian sendoa eta ulergarria den azterketa bat egitea. Dena dela badira bi gauza funtsezkoak dirudienak, halako *orokortasun* bat eta halako *sakontasun* bat; baina ez bata eta ez bestea ez dira zehazki definitzen errazak.

Ideia matematiko esanguratsu bat, teorema matematiko serio bat, «orokorra» izan behar litzateke ondoko zentzuren batean. Ideia batek eraikuntza matematiko askotan parte hartzen duena izan behar luke, modu ezberdin askotako teoremen frogapenetan erabilia dena. Teorema batek hasiera batean (Pitagorasen teorema bezala) nahiko forma berezian emana badator ere, hedapen nabarmen bat izateko modukoa izan behar luke, eta mota bereko teorema multzo oso baten ordezkaria dena. Frogaren bidez agerian geratzen diren erlazioek ideia matematiko ezberdinak uztartzeko modukoak izan behar lukete. Oso lausoa da hau guztia, eta hainbat baldintzaren menpekoa.

Baina oso erraza da teorema batek serioa izan daitekeenik ez dirudiela ikustea, ezaugarri hauen gabezia nabarmena duenean; aritmetikan hain usu aurki daitezkeen bitxikeria isolatuen adibideak hartzea besterik ez daukagu horretarako. Nik bi hartu ditut, ia-ia zoriz, Rouse Ballen *Mathematical Recreations*[9] liburutik.

(a) 8712 eta 9801 dira beren «alderanztutakoen» anizkoitz osoak diren lau zifratako zenbaki bakarrak.

$$8712 = 4 \cdot 2178, \; 9801 = 9 \cdot 1089,$$

eta ez dago 10000tik behera beste zenbakirik, propietate hau beteko duenik.

(b) Lau zenbaki baino ez daude (1 eta gero) beren digituen kuboen batura direnak, hauek dira:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3, \qquad 370 = 3^3 + 7^3 + 0^3,$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3, \qquad 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3.$$

Bitxikeriak baino ez dira, buruhauste zutabeetarako oso egokiak, eta zaleak entretenitzeko balio lezaketenak, baina ez da berauetan ezer matematikari bati deigarri zaionik. Frogak ez dira ez zailak ez eta interesgarriak ere —pixka bat nekagarriak baino ez—. Teorema hauek ez dira serioak; eta argi dago horretarako arrazoi bat (nahiz eta agian garrantzitsuena ez izan) enuntziatu zein frogen gehiegizko berezitasuna dela, orokorpen esanguratsuetarako gauza ez direnak.

16

«Orokortasuna» hitz anbiguoa da eta baita pixka bat arriskutsua ere, eta kontuz ibili behar dugu gure eztabaidan pisu handiegirik har ez dezan. Bai matematikan eta bai matematikari buruzko idatzietan zentzu ezberdinetan erabilia da, eta bada bereziki hauetako bat logikariek modu egokian azpimarratu dutena, baina guretzat erabat garrantzirik gabea dena momentu honetan. Azken zentzu honetan, definitzeko nahiko erraza dena bestalde, teorema matematiko guztiak berdinki eta erabat «orokorrak» dira.

«Matematikaren ziurtasuna» dio Whiteheadek[10], «bere erabateko orokortasun abstraktuan datza». 2+3=5 diogunean, hiru «gauza» talderen arteko erlazio bat baieztatzen dugu; eta «gauza» hauek ez dira sagarrak edo pennyak, edota klase honetako edo besteko gauza konkretuak, *besterik gabe* gauzak baizik, «edozein gauza». Esaldiaren esanahia taldeetako elementuen berezitasunetatik guztiz independentea da. «Objektu», «entitate» edo «erlazio» mate-

[9] 11. edizioa, 1939 (H. S. M. Coexeterrek zuzendua).
[10] *Science and the Modern World*, 33 or.

matiko guztiak, «2», «3», «5», «+» edo «=» bezala, eta hauek agertzen diren proposizio matematiko guztiak erabat orokorrak dira guztiz abstraktuak diren heinean. Jakina, Whiteheaden hitzen artean bada bat beharrezkoa ez dena, zentzu honetan orokortasuna abstraktutasuna baita.

Garrantzitsua da hitzaren zentzu hau, eta zuzen dabiltza logikariak azpimarratzen dutenean, jende askok hobeto jakin beharko lukeen arren ahazteko joera duen egia adierazten duelako. Nahiko ohikoa da adibidez, astronomo edo fisikari batek esatea, froga bat aurkitu duela unibertso fisikoa modu jakin batean portatu behar dela frogatzen duena. Era honetako aldarrikapen guztiak, hitzez hitz interpretatu ezkero, hertsiki zentzugabeak dira. *Ezin du* posible izan bihar eklipse bat egongo dela matematikoki frogatzeak, eklipseak eta beste fenomeno fisikoak ez baitaude matematikaren mundu abstraktuan; eta hau, nik uste, astronomo guztiek onartuko lukete estutu ezkero, nahi adina eklipse zuzen aurresan dituztelarik ere.

Begi bistakoa da ez gaudela «orokortasun» klase honekin arduratuta orain. Teorema matematiko batek eta beste batek «orokortasunari» dagokionean dituzten ezberdintasunen bila gabiltza, eta Whiteheaden zentzuan berdinak dira guztiak horretan. Halaxe, 15 §-ko (a) eta (b) teorema «xumeak» Euklides eta Pitagorasenak bezain «abstraktuak» edo «orokorrak» dira, eta beste horrenbeste gertatzen da xake problemaren kasuan. Xake problema batean berdin dio piezak txuri eta beltzak edo gorri eta berdeak diren, edota «pieza» fisikorik baden edo ez; aditu batek buruan erraz asko daraman problema eta guk taularen laguntzaz nekez berreraiki behar duguna problema *berbera* da. Taula eta piezak gure irudimen motela bizkortzeko bitarteko hutsak dira, eta xake problemarentzat ez dira, arbela eta klariona matematika klase batetako teorementzat direna baino funtsezkoagoak.

Ez da teorema matematiko guztientzat komuna den orokortasun klase hau guk bilatzen diharduguna, 15 §-an zirriborratzen saiatu naizen orokortasun klase sotil eta harrapagaitza baizik. Eta kontuz ibili behar dugu orokortasun klase hau *gehiegi* azpimarratu gabe (Whitehead bezalako logikariek, nire ustetan, egin ohi duten bezala). Ez da soilik «sotiltasuna sotiltasunaren gainean pilatzea orokortasunari dagokionean», bestalde matematika modernoaren lorpen nabarmenena dena. Orokortasunak neurriren batean presente egon behar du goi-mailako edozein teorematan, baina *gehiegiak* zozoa bilakatzeko arriskua du. «Gauza guztiak direna dira eta ez beste zerbait», eta gauzen arteko ezberdintasunak, beraien arteko antzekotasunak bezain interesgarriak dira. Ez ditugu gure lagunak aukeratzen gizadiko ezaugarri atsegin guztiak dituztelako, direnak direlako baizik. Beste horrenbeste gertatzen da matematikan; objektu gehiegik komunean duten propietatea nekez suertatuko da oso zirraragarria, gainera ideia matematikoak lausoak izatera irits daitezke nahikoa indibidualtasunik izan ezean. Hemen dena dela, Whiteheaden hitzak aipa ditzaket neure alde: «Orokorpen zabala da, zorioneko berezitasun batek mugatua, kontzepzio emankorra osatzen duena».[11]

17

Ideia esanguratsu bati eskatzen nion bigarren ezaugarria *sakontasuna* zen, eta hau are zailagoa da definitzen. Badu *zailtasunarekin zerikusiren bat*; ideia sakonak normalean harrapatzeko zailagoak dira: baina inola ere ez da gauza bera. Pitagorasen teoremaren eta honen orokorpenen azpian dauden ideiak nahiko sakonak dira, baina ez dago gaur zailak irudituko litzaizkiokeen matematikaririk. Bestalde gerta liteke teorema bat funtsean azalekoa izanik, frogatzeko nahiko zaila izatea (teorema «diofantiar» asko, hau da, zenbaki osoen gaineko ekuazioen soluzioak, diren bezala).

Badirudi ideia matematikoak nolabait estratuetan antolatuta daudela, estratu bakoitzeko ideiak erlazio-multzo baten bidez, beraien artean eta gaineko eta azpiko ideiekin erlazionatuta daudelarik. Estratuetan beherantz goazen heinean sakonagoak (eta orokorrean zailagoak) dira ideia horiek. Horrela bada, «irrazionalaren» ideia osoarena baino sakonagoa da; eta arrazoi honengatik Pitagorasen teorema Euklidesena baino sakonagoa da.

Jar dezagun gure arreta zenbaki osoen, edota estratu berezi batetako beste objektu talderen baten arteko erlazioetan. Posible da erlazio hauetakoren bat guztiz ulergarria izatea, hau da, esaterako osoen propietateren bat antzeman eta frogatu ahal izatea, beheragoko estratuen inolako ezagutzarik gabe. Honela, Euklidesen teorema soilik osoen propietateak kontsideratuz frogatu genuen. Badira ordea osoei buruzko hainbat teorema, sakonera jo eta han gertatzen dena kontutan hartu ezean, modu egokian ezin uler ditzakegunak, eta are gutxiago frogatu.

Erraza da adibideak aurkitzea zenbaki lehenen teorian. Euklidesen teorema oso garrantzitsua da, baina ez da oso sakona: infinitu zenbaki lehen daudela froga dezakegu, «zatigarritasuna» baino nozio sakonagoetara jo gabe. Baina aurreko galderaren erantzuna ezagutu orduko galdera berriak sortzen zaizkigu. Infinitu zenbaki lehen dago, baina nola dago banatua infinitu hau? N zenbaki handi bat emanda, 10^{80} edo $10^{10^{10}}$ adibidez[12], zenbat zenbaki lehen dago gutxi gora behera N baino txikiagoa dena?[13] Galdera *hauek* egiten ditugunean, ez gaude jadanik aurreko egoeran. Erantzun ditzakegu, eta zehaztasun harrigarriz gainera, baina askoz sakonago jotzen badugu bakarrik; zenbaki

[11] *Science and the Modern World*, 46. or.

[12] Unibertsoko protoi kopurua gutxi gorabehera 10^{80} dela suposatzen da. $10^{10^{10}}$ zenbakiak luzetaka idatzi ezkero bataz besteko neurriko 50000 liburuki beteko lituzke.

[13] 14 §-an esan bezala, 1000000000 baino txikiagoak diren 50847478 zenbaki lehen daude; baina hau gure ezagutza zehatza iristen den lekua baino ez da.

osoak aldi baterako gure gainean utzi eta funtzioen teoria modernoaren tresnarik indartsuenak erabiliz. Honela gure galderak erantzuten dituen teorema («Zenbaki Lehenaren Teorema» deitua) Euklides eta Pitagorasen teorema baino askoz teorema sakonagoa da.

Adibide gehiago jar nitzake, baina «sakontasunaren» ideia hau harrapagaitza da antzemateko gai den matematikari batentzat ere, eta ez dut uste honen inguruan beste irakurleei lagungarri gerta lekiekeen ezer gehiago esan nezakeenik hemen.

18

«Benetako matematika» eta xakearen arteko alderaketa hasi nuen 11 §-tik puntu bat geratzen da oraindik. Jakintzat har dezakegu orain funtsean, seriotasunean eta esangarritasunean benetako matematikak duen nagusitasuna eztabaidaezina dela. Trebatutako inteligentzia batentzako ia hori bezain begi bistakoa da, matematikak edertasunean ere abantaila handia duela; baina abantaila hau definitzen edo zehazten askoz zailagoa da, izan ere, xake problemaren akats *nagusia* bere «xumetasuna» baita eta maila honetan bien artean dagoen kontrasteak, epai estetiko hutsena ere nahastu eta lardaskatu egiten baitu. Zer ezaugarri «estetiko huts» aurki ditzakegu Euklides eta Pitagorasena moduko teoremetan? Elkarrekin loturarik ez duten ohar gutxi batzuk ematera baino ez naiz ausartuko.

Bi teoremetan (eta teoremetan, noski, frogak ere sartzen ditut) bada *ustekabe* maila handi bat, *saihestezintasun* eta *ekonomiarekin* lotuta. Horrela bada, arrazonamenduek forma bitxi ea harrigarria hartzen dute; erabilitako tresnek oso sinpleak dirudite lortutako emaitzen errelebantzia handiarekin alderatuz; baina ez dago ondorioei ihes egiterik. Ez dago konplikaziorik ñabarduretan —lerro bateko erasoa nahikoa da kasu bakoitzean—; eta hau egia da askoz teorema zailagoen kasuan ere, goi-mailako gaitasun teknikoa eskatzen duten hainbat teoremaren kasuan ere. Teorema matematikoen frogetan ez dugu «aldakuntza» askorik nahi: «kasuz kasuko» froga, arrazonamendu matematikoak hartzen duen formarik ergelenetakoa da. Froga matematiko batek konstelazio sinple eta argi baten itxura izan behar luke eta ez Esne Bidean barreiatutako ingurune sakabanatu batena.

Xake problema batek ere badu ustekabe izaera eta nolabaiteko ekonomia; funtsezkoa da mugimenduak ustekabekoak izatea, eta taulako pieza bakoitzak bere partea jokatzea. Baina eragin estetikoa metakorra da. Funtsezkoa da baita ere (problema interesgarria izateko sinpleegia izan ezean) giltzarri den mugimendua aldakuntza kopuru on batekin laguntzea, bakoitza dagokion erantzunarekin. «Baldin P-B5 orduan Kt-R6; baldin ... orduan ...; baldin ... orduan ...» —efektua alferrik galduko litzateke erantzun ezberdin kopuru on bat ez balego—. Hau guztia benetako matematikatik hurbil dago eta bere meritua dauka; «kasuz kasuko froga» (azken batean, sakonean ezertan ezberdintzen ez diren kasuak)[14] hori da, hain zuzen ere, benetako matematikari batek arbuiatu ohi duena.

Xake-jokalarien beraien sentimenduek nire arrazonamendua berrindartzeko balioko luketen ustekoa naiz. Seguru asko xake maisu batek, joko eta partida handien jokalari batek, azken finean gutxietsi egiten du problema ebazle baten matematikoa baino ez den artea. Arte horretatik asko du berak erreserban eta emergentzia une batean atera dezake: «berak halako eta halako mugimendua egin izan balu, nik halako eta halako mugimendu garailea nuen buruan». Baina xakean «joko nagusia» psikologikoa da batez ere, trebatutako bi adimenen arteko gatazka, eta ez teorema matematiko txikien bilduma soil bat.

[14] Gaur, tipo berdineko aldakuntza ezberdinak izatea *meritu* bezala kontsideratua dela pentsatzen dut.