Logika eta logikak. Begirada bat logika ez-klasikoei

Xabier Arrazola*

ILCLI. UPV/EHU

(Logic and Logics. An overview of non-classical logics)

Abstract
In this paper we present an overview on some non-classical logics starting from the analysis of the fundamental theoretical bases of First Order Logic. We also discuss the fundamental debates from which the new logics arise. Finally we briefly explain the basic ideas of some non-classical logics such as: many-valued systems, modal logic, epistemic logic, intuitionistic logic, and non-monotonic logics.

Keywords: *logic, non-classical logic, many-valued systems, modal logic, epistemic logic, intuitionistic logic, non-monotonic logics*

1 Sarrera

Egun ezagutzen ditugun logikak XIX. mendearen bukaera aldean edo XX. mendearen hasieran eraiki ziren logikak dira salbuespenik bada ere. Aurreko mendean garatu izan dira arrakasta handiagoz ala txikiagoz, baina gehienek izan dute bere 'lekua' eta zeregina. Logika ezberdinetatik batek hartu du ohorezko lekua, Lehen Ordenako Logika bezala ezagutzen duguna eta Fregeri (1879) eta Whiteheadi eta Russelli (1903-10) zor dieguna, beste askoren artean noski. Logika Klasikoa ere deitzen zaio. Beste logikek beren izenak kalifikatu egin behar izan dute Klasikoarekiko bereizteko. Adibidez Logika Intuizionista dugu edo Balio Anitzeko Logikak ere. Logika ezberdinak daude beraz.

*Lan honek UPV/EHUko laguntza (GIU 08/23) jaso du. Eskerrak eman nahi dizkiet GOGOAko txontengile anonimoei.

Logika ezberdinak daudela nabaria da eta nahiz eta bakar batek ohorezko lekua hartua izan, badira leku hori lortzeko asmoarekin aurkeztu izan direnak. Logiken katalogoan badira logika batzuk Logika Klasikoaren alternatiba direnak, hau da, hura baztertu eta bere lekua hartu nahi izan dutenak. Beste batzuk aldiz Logika Klasikoa osatzeko asmoarekin eraiki dira, Lehen Mailako Logikak dituen mugak gainditzeko asmoz, hedatu egin dituzte honen baliabideak. Logika Klasikoaren hedapenak deitzen zaie hauei. Artikulu honen helburua Logika ez-klasiko batzuen aurkezpena egitea da.

2 Logika Klasikoa: Lehen Mailako Logika

Dakigunez Logikaren ardura nagusien artean argudioa dago, bereziago, baliozko argudioen eta ez baliozkoen arteko bereizketaren azterketa sistematikoa. Horretarako ondoriotasun logikoaren erlazioa aztertu eta definitu ondoren baliozkoen eta ez baliozkoen bereizketarako beharrezkoak izango zaizkigun irizpide formalak eskainiko dizkigu. Hizkuntza Naturala dugu arrazoibidearen tresna edo baliabide naturala baina helburu zientifikoetarako ez da oso fidagarria.

Labur bada ere Logikaren hizkuntza eta baliabideak aurkeztuko ditugu. Logika hizkuntza da. Hizkuntza aztertzeko erabiltzen dugun tresna ere bada,[1] nahiz naturala nahiz matematikoa.

Hizkuntza oro bezala, logikak alfabeto bat du, hau da, sinbolo multzo bat du adierazpenak eraikitzeko, haien konbinaketaren bitartez. Sinbolo hauek kategoria ezberdinetakoak izango dira. Hizkuntza bat erabiltzen dugunean, zerbait esaten dugu, zerbaiti (edo norbaiti) buruz zerbait diogu normalean. Zeri buruz ari garena adierazteko sinbolo kategoria bat aukeratuko dugu; indibiduoen kategoria izango dena. Indibiduo horietaz dioguna adierazteko beste sinbolo kategoria bat definituko dugu, predikatuena. Beraz, sinbolo indibidualak eta predikatu sinboloak. Demagun a sinbolo indibiduala dela eta P predikatu sinbolo bat. Orduan, indibiduo bati buruz predikatu bat asetzen duela, Pa bezala idatziko da gure hizkuntza logikoan. Indibiduo zehatz bati buruz hitz egiteaz gain, zehaztu gabeko bati buruz hitz egitea nahiko genuke edo predikatu bat asetzen duten indibiduo guztiez, edo ... Hau da, hizkuntza naturalean egiten dugun moduan, ondokoak esan: "*Jone alemaniarra da*", "*Baten bat alemaniarra da*", "*Alemaniarrak europarrak dira*". Baina baita ere "*Baldin Jone alemaniarra bada orduan baten bat*

[1] Fregek (1879) berak Hizkuntza Naturalaren alternatiba moduan ikusi zuen logika, anbiguotasun eta zehaztasun gabeziak saihesteko bidea eskainiko ligukeelako logikaren erabilerak.

alemaniarra da" eta "*Jone alemaniarra da eta June italiarra*". "Baldin ... orduan" eta "eta" sinbolo bereziak dira. Sinbolo logikoak dira.

Hizkuntza formala izanik, alfabeto bat aukeratu ondoren, honekin eraiki daitezken adierazpen ongi formatuen multzoa, formulen multzoa zehaztuko dugu.

Dakigunez, lehen mailako hizkuntzak asko dira eta ezberdinak. Halere, ezberdintasunak kontsideratzen dituzten sinbolo ez-logikoen funtzioan ematen dira. Guk aurkeztuko dugun sintaxia lehen mailako hizkuntzarik konplexuenak behar duena izango da eta horrela, aukera ezberdin guztiak kontsideratuta geratuko dira. Hau da, hizkuntza tipoaren arabera, hizkuntza batean aurkeztuko ditugun sinbolo batzuk ez dira existituko, eta ondorioz, sinbolo horietarako eskainitako definizioak ez dira aplikagarriak izango. Ez dira beraz kontuan izango eta kitto.

Hizkuntza formal guztiek bezala, lehen mailako hizkuntzek alfabeto bat izango dute eta alfabeto horren gainean, lehen mailako formulak eraikiko dira. Tipoaren arabera murriztuko da beraz aurkeztuko dugun alfabetoa. Ikus dezagun beraz zein alfabeto kontsideratzen den eta nola eraikitzen diren formulak edo adierazpen ongi formatuak.

2.1 Alfabetoa

Gure alfabetoan sinbolo logikoak eta sinbolo ez-logikoak ditugu. Sinbolo logikoak konektagailuak eta kuantifikatzaileak dira: $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall\}$ eta sinbolo ez-logikoak, aldagai indibidualak, konstante indibidualak eta predikatu sinboloak:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots; a_1, a_2, a_3, \ldots; F_1^1, F_2^1, F_3^1, \ldots, F_1^2, F_2^2, F_3^2, \ldots\} \tag{1}$$

Alfabeto honen bitartez ondokoak bezalakoak adieraz daitezke:

Jone alemaniarra da	$F_1^1 a_1$
Baten bat alemaniarra da	$\exists x_1 F_1^1 x_1$
Alemaniarrak europarrak dira	$\forall x_1 (F_1^1 a_1 \rightarrow F_2^1 x_1)$
Jone alemaniarra da eta June italiarra	$F_1^1 a_1 \wedge F_3^1 a_2$
Baldin Jone alemaniarra bada (...)	
(...) orduan baten bat alemaniarra da	$F_1^1 a_1 \rightarrow \exists x_1 F_1^1 x_1$

Horrela, lehen mailako hizkuntza bat, lehen mailako aldagaiak soilik dituena da. Hizkuntza bat bigarren mailakoa da baldin lehen eta bigarren mailako aldagaiak baditu.

Lehen mailako hizkuntza guztiek osatzen dute *Lehen Mailako Logika* (Hodges 2001, 9 or.). Tradizionalki Logika argudiatzearen estudiotzat jo izan da, argudio zuzenaren erregelen azterketa horrela nahi bada eta Lehen Mailako Hizkuntzak erabil daitezke azterketa honetan, eta hemendik datorkio *Lehen Mailako Logika* izena. Hizkuntza hauek beste zereginetarako ere erabil daitezke eta erabili izan dira. Russell eta Hilbert adibidez, azterketa eta definizio kontzeptualerako erabili zituzten horrelakoak eta egun, konputazio zientzietan erabiltzen dira ezagutzaren errepresentazioan edo sistemen portaeraren zehazketan.

Hodgesek (2001, 10 or.) dioen bezala, lehen mailako formulek ez dute esanahirik, ez dira esanahia izateko definitu. Benetako helburua *[the] conditions which things can satisfy or fail to satisfy* (2001, 10 or.) adierazteko pentsatuak daude. Eta hauxe bi urratsetan ematen da.

1. Lehen mailako hizkuntza bakoitzak *konstante ez-logikoak* deitzen diren sinbolo batzuk ditu. Lehen mailako formula bat eraikitzerakoan, formula horretan azaltzen diren konstante ez-logiko bakoitzari zerbait *asignatzen* zaio. Zerbait hori, pertsona bat, zenbaki bat, kolore bat, edozer izan daiteke. Konstantearen izaeraren araberakoa izango da asignatzen zaion objektua. Honi, *interpretazioa* deitzen zaio (Termino teknikoagoa erabiltzen da normalean, *egitura*).

2. Lehen mailako formula bat, ϕ, eta Interpretazio bat emanik, I, *semantikak* zehaztuko du Interpretazioak formula egiazkoa egiten duen ala ez. Egiazkoa egiten badu, Ik ϕ *asetzen* duela esango dugu edo I ϕren *eredua* dela, edo ϕ *egiazkoa* dela In.

Lehen mailako hizkuntzen arteko ezberdintasuna dituzten konstante ezlogikoen multzoan oinarritzen da, multzo honi *signatura* edo *similaritate tipoa* deitzen diogu, hizkuntza *tipoa* guretzat hemendik aurrera. Horrela, τ hizkuntza tipo bat bada, hizkuntza tipo honi egokitutako interpretazioari, τ-*interpretazioa* deituko diogu eta honek izango ditu zehazki τ tipoko hizkuntza bateko ϕ formula batek egiazkoa ala faltsua den erabakitzeko beharrezkoak diren asignazioak.

Lehen mailako hizkuntza ezberdinek halere badituzte elkarren arteko sinboloak, *konstante logikoak*. Hauek dira Logikaren (Logika bakoitzaren) mamia. Lehen Mailako Logikak hiru konstante logiko ditu: ukazioa ($\neg$), baldintzatzailea ($\rightarrow$) eta zenbatzaile unibertsala ($\forall$). Sinbolo hauek beti dute esanahi berdina. Ez dute bere esanahia aldatzen Interpretazioa aldatzen bada ere. Multzo honek eta duten esanahiek dira eztabaidan jartzen direnak Logika ezberdin bat proposatzen denean.

Logikaren eremua definitzea ez da gauza erraza: aukeratzen dugun logikaren arabera izango dugu dagokion erantzuna. Hala eta guztiz ere logika klasikoak —lehen aipatutako zentzuan, alegia, Lehen Mailako (Identitatedun) Logikaren zentzuan— badu zerbait klasikotzat hartzeko normalean horrela kontsideratzen baita. Azter ditzagun Lehen Mailako (Identitatedun) Logikaren ezaugarri nagusiak. Orokorrean, lau dira aipatzen diren ezaugarri primarioak edo funtsezkoenak:

1. Objektutzat hartzen dituen enuntziatuak apofantikoak dira, alegia, egia-balioa duten enuntziatuak. Aristoteles jarraituz, *De Interpretatione* liburuan dioen arabera, logika egiarekin zerikusirik duten esaldien logika da, esaldi apofantikoen logika beraz. Ondorioz, eskaerak, aginteak, galderak etab. adierazten duten enuntziatuak logikatik at geratzen dira.

2. Logika honetan bi egia-balio kontsideratzen dira: egia eta faltsua.

3. Ez dago enuntziatu baten egia mailakatzerik.

4. Enuntziatuen arteko konexioak egia-funtzioen terminoetan definitzen dira. Enuntziatu xinpleen egia-balioek determinatuko dute enuntziatu konplexu baten egia-balioa.

Honen arabera, logika klasikoak ondorengo ezaugarriak ditu:

Apofantikoa da: Objektutzat hartzen dituen enuntziatuak apofantikoak dira, alegia, egibalioa duten enuntziatuak. Aristoteles jarraituz, *De Interpretatione* liburuan dioen arabera, logika egiarekin zerikusirik duten perpausen logika da, perpausa apofantikoen logika beraz. Ondorioz, eskaerak, aginteak, galderak etab. adierazten duten enuntziatuak logikatik at geratzen dira.

Bibalioduna da: Logika honetan kontsideratzen diren egia-balioak bi dira: egia eta faltsua.

Asertorikoa da: Ez dago enuntziatu baten egia mailakatzerik. Asertorikoa da.

Estentsionala da: Enuntziatuen arteko konexioak egia-funtzioen terminoetan definitzen dira. Enuntziatu xinpleen egia-balioek determinatuko dute enuntziatu konplexu baten egia-balioa. Estentsionala da.[2]

[2] Adierazpen (izena, predikatu edo enuntziatu) batek estensioa edo hedapena du (hau da, izen baten hedapena indibiduo bat, predikatu batena multzo bat eta enuntziatu batena egia-balio bat) eta intentsioa edo edukiera (izen batena, adierazten duen "kontzeptu indibiduala", predikatu batena adierazten duen ezaugarria eta, enuntziatu batena, adierazten duen proposamena). Banaketa hau onartzen badugu, logika klasikoa hedapenaren eremuan geratzen da.

3 Logika Klasikoa eta Logika Ez-Klasikoak

The Encyclopaedia of Philosophy begiratuz adibidez, logika hitzaren sarrera ezberdinak ikusiko genituzke, bakoitzak kualifikazio berezi bat duelarik. Historia alde batera utzita, izenondo hauen bidez logika ezberdinak izendatzen dira: konbinatorioa, deontikoa, balioanitzekoa, modala, tradizionala eta modernoa. Badira gehiago ere beste testuetan aurki daitezkeenak, hala nola, intuizionista, errelebantea, epistemikoa, kuantikoa, intentsionala, eta abar. Zer esan nahi du honek? Nola ulertu behar dugu logiken aniztasun hau? Logika bakarra ez bada, hots, logika ezberdinak badaude, zer da logika? Zein da logikaren eremu edo zabalgunea? Zeintzuk dira logikaren helburuak? Zer gertatzen da logikatzat genuen ikasitako Lehen Mailako Logikarekin? Nolako estatusa du edo zergatik du estatus berezia? Galdera hauei erantzutea Logikaren Filosofiaren ardura dira. Zer da Logika, noraino doa eta zer nolako helburuak ditu. Haacken ustez (1978), Logikaren Filosofia Logikaren eremuaren arazoaz arduratzen da: zer da Logika; zein sistema formal dira sistema logikoak eta zer dute logikotzat hartzeko. Galdera hauei erantzutea ezinbestekoa da arazoa argitzeko. Haackek (1978) definizio intuitibo bat eskaintzen du bi kategoria kontsideratuz:

1. Interpretatu gabeko sistema formalak - ikur edo seinaleen multzoak: ezin dira logika formal batekin identifikatu nahiz eta teoria matematiko edo fisiko baten formalizazioan izan daitezken.

2. Sistema formal interpretatuak - Interpretazio bat izanik, honen arabera kontsidera daiteke sistema hauek baliozko argudioaren "canon"ak (neurriak, irizpideak) ezarri nahi dituztela.

Adibide bezala, Haackek balioanitzeko logikak hartzen ditu zeinentzako, dituzten interpretazioen arabera, beraien balioak egia-balioak, aldagaiak esaldiak, konektagailuak ukazioa, konjuntzioa, etab., diren. Quinek (1970) aldiz, ez ditu guzti hauek logikatzat hartzen, ezta Bigarren Mailako Logika ere, azken hau arazo ontologikoengatik. Bere iritziz, logika honek konpromisoa hartzen du objektu —propietate— abstraktu eta intentsionalen ontologia batekin. Haackek, abiapuntu bezala, "guztia" onartzen du Logikaren eremuan:

- Logika Tradizionala — Aristotelesen Silogistika.

- Logika Klasikoa — Bibaliotako Proposamenen Kalkulua, Predikatuen Kalkulua, Identitatedun Predikatuen Kalkulua, Bigarren Mailakoa, eta abar.

- Logika Hedatuak — Modalak, Denboralak, Deontikoak, Epistemikoak ...

- Logika Dibergenteak — Balioanitzekoak, Intuizionistak, Kuantikoak, Libreak.

- Logika Induktiboak.

Ikuspegi honek, zabaldua egonik, baditu aurkariak. Alde batetik eta ikuspegi honen arabera, Logika ez-klasikoa Logika klasikoa ez den guztia izango litzateke (Tradizionala, Hedatuak, Dibergenteak eta Induktiboak). Peñak (1994, 8-9 or.) adibidez, ez-klasikotzat hartzeko dibergentzia beharrezkoa dela eskatuko du.

Beste alde batetik, Quinek (1970) duen ikuspegiak oinarrizkoago den kritika plazaratzen du: Logikatzat har daitekeen bakarra aipatutako Logika Klasikoaren zati bat besterik ez da

Bi ikuspegi ezberdin hauek arazo batera garamatzate. Peñaren arrazoiak logika klasikoa eta ez-klasikoen artean bereizketa egiteko konstante logikoen esanahian oinarritzen dira —ukazioan bereziki— eta esanahiaren aldaketarik eskaintzen ez duten logikak klasikotzat jotzen ditu. Honen arabera, logika modala eta beste batzuk —Haacken iritzian logika klasikoaren garapenak izango liratekeenak— ezin dira ez-klasikotzat jo onartu egiten baitute logika klasikoa bere osotasunean, nahiz eta aski ez dela kontsideratu. Quinek ideia berdina erabiltzen du baina ez logika klasikoa eta ez-klasikoen artean zedarriketa definitzeko baizik eta Logikaren eremua eta izana finkatzeko. Honen iritziz, logika hauen helburua logika klasikoa baztertzea da. Arazoa beraz Logikaren definizioan dagoela dirudi. Logikaren eremua definitzea ez da gauza erraza: zein logika aukeratu, halako erantzuna lortuko dugu eta zein eremu kontsideratu, halako logika. Momentuz, demagun Logika Klasikoa Lehen Mailako (Identitatedun) Logika dela, goian aipaturiko ezaugarri nagusiak dituelarik.

4 Logika alternatiboen posibilitateari buruz

Logika Klasikoko ezaugarriak mugatzat har daitezke Logikaren historiari begiratzen badiogu. XX. mendeko hasieran sortu ziren logiken artean Emil Postek 1921. urtean bere logika m–balioduna aurkeztu zuen. Bi egia-balio baino gehiago kontsideratzeaz gain, orokortzearen bitartez, ikuspegi logiko huts batetik egia-balioen kopurua aukeratzeko orduan mugarik ez dela erakusten du. Teknika hutsa da, sinbolo logiko edo konektagailuen definizioan gertatzen den moduan.[3] Zein irizpidearen arabera esango dugu Posten sistema ez dela sistema logiko bat? Logika alternatibo bat ote? "Logikaz" ulertzen dugunaren arabera egingo dugu epaiketa.[4] Fregeren sistemarekiko antzekotasun formalak dituen edozer logikatzat hartzen badugu, orduan onartu egin beharko genuke Posten sistema sistema logiko bat dela. Hau ez litzateke zentzugabekeria izango baldin aldi berean onartuko bagenu "logika" terminoaren erabilpen berri honek ez duela arrazoibidearekin zerikusirik. Zehazkiago, sistema ezberdinen sorkuntzak ez luke bere helburuarekiko sistema fregearraren ezegokitasuna frogatuko, ezta ere bere konbentzionalitatea. Posten sistema "logikoa" dela mantentzen badugu, logika zentzu zabal batean ikusten dugu non sistemak proposamenen arteko erlazioak aztertzeko sistemak diren. Eta ondorioz, ez litzateke alternatiboa izango, sistema honek Fregeren sistema aurresuposatzen duelako. Kneale eta Knealen ustean logika klasikoa inplikazioa kasu berezitzat hartzen duen proposizioen multzoen arteko erlazioen teoria orokorra bezala aurkez daiteke. Eta hau onargarria bada logikaren ikuspegi tradizionalaren arabera –eduki klase guztientzat baliozko arrazoiketaren printzipioen zientzia–, logika klasikoarekiko alternatiboa den sistema baten posibilitatea defendatu nahi duenak, nola edo hala, inplikazioaren nozio klasikoa zalantzan jartzen du. Are gehiago, baldintzatzailea eta ondoriotasun logikoaren kontzeptuen erlazio estua kontutan izanik, logika ez-klasikoek honen aurka doazela defendatzen dutenak ere badira. Itxura denez arazoa konektagailuen esanahian kokatzen da, ukazio eta baldintzatzaile konektagailuetan bereziki. Baina baldintzatzailearen kasua bereziena da. Ikus dezagun labur bada ere, baldintzatzaile materialaren historia:

- Estoikoek aurreikusia, Fregek (1879) eta Whitehead eta Russellek (1910) formalizatu zuten, Postek (1921) eta Wittgensteinek (1921) semantika egoki bat eman zioten arte.

- MacCollek (1880) esan zuen aurrenekoz baldintzatzaile zehatzago, zorrotzago baten beharra zegoela.

- Lewisek (1918) formalizatu zuen baldintzatzaile hertsia, non modalitatea sartzen den.

[3]Sinbolo logikoak egia-funtzioak dira eta horrela izanik, egia-funtzio posibleen arteko aukera egiten dugu funtzio zehatz bati *baldintzatzailea* deitzeko, adibidez. Modu berean, semantikan kontsideratzen den egia-balioen kopurua zabal daiteke nahi adina. Egia-balio berri hauek nola ulertuko diren beste arazo bat da.

[4]Kneale eta Knealeren (1962) argudioa jarraituko dugu.

- Lewisen ahalegina erraiketa errepresentatzeko eginiko proposamena izanik, bere mugen ondorioz baldintzatzaile errelebantea sortu zen, Anderson and Belnap (1962), Ackermann (1956).

Baina honek ez du arazoa gainditzen, baldintzatzaile hertsiak materialak dituen arazo berdinak ditu eta, gainera, Logika Modalak hedatu egiten du, besterik ez, Logika Klasikoa. Hau da, onartu egiten du Logika Klasikoa bere osotasunean, bere eremua zabalduz modalitateak sar daitezen, egiaren modu ezberdinak aztertzeko aukerak eskainiz. Modalitateak sartzeak ez dio funtsezko arazorik sortzen Logika Klasikoari nahiz eta eztabaidagarria izan daiteken modalitateak logikaren objektu izan behar duten ala ez. Arazoak beste nonbaitetik datoz. Oso eztabaidatua izan da Logikaren izaera bibalioduna. Aristotelesek berak etorkizun kontingenteen arazoa aztertu zuenean zalantzan jarri zituen Bibaliotasunaren Printzipioa eta Hirugarrena Baztertze Printzipioa. Quineren (1970) iritziz, lau dira egia/faltsua dikotomia eztabaidatzeko arrazoiak:

1. Mailaketak badira: gauzak ez dira beltzak ala zuriak. Quinek ez du kontutan hartzen.

2. Ezagutza eta egiaren arteko nahasketa:

   > *ondorengoen artean (a) zerbait egiazkoa ala faltsua dela jakin eta (b) zerbait egiazkoa dela jakin edo zerbait hori faltsua dela jakin*

3. Semantikaren eta Multzo teoriaren paradoxak: Russell, $\{x : \neg(x \in x)\}$ eta klase hori bere buruaren barnekoa dela dioen esaldia. Bochvar (1939)-lanak proposatua. Ukazioa hiru balioko logikarena da jada eta honek paradoxa gainditzea permititzen du. Proposamen hau Quinek "mutilazio minimoaren maxima" deitzen duenaren aurka doa. Paradoxaren arazoa ez da egia-funtzioen eta zenbatzaileen logika klasikoarena propioki, semantika orokorra eta multzo teoriarena baizik: asma dezaten eremu horietan soluzioa.

4. Mekanika Kuantikoa. Heisenberg-en Indeterminazio Printzipio paradoxikoa. Badira neurriak aldiberekotasunez ezagutzerik ezinezkoak direnak, eta ezinezkotasun hori ez da gizakion mugen arazo soila, lege fisiko bat baizik. Quineren arabera, Logika Kuantikoen eraikuntza asmoek suposatzen duten konplexutasun mailak ez du merezi gainditzen dituzten arazoak kontutan izanik.

5. Intuizionismoa.

Hirugarren Baztertze printzipioak jaso ditu kritika gehien. Ez da onartua ez Balioanitzeko Logika ez eta Intuizionismoa defendatzen dutenen aldetik. Quineren arabera, hirugarrena baztertze legea arbuiatzen duenak gaiaz aldatzen du; horrek ez du esan nahi horrela jokatzeko arrazoirik ez duenik. Baina "p edo $\neg p$" gaitzetsiz, ukazio klasikoa baztertzen ari da, edo behar bada disjuntzio klasikoa, edo agian biak. Arrazioak izan daitezkeela horretarako onartzen du (Quine 1970,144 or.). Balioanitzeko logika beraz, antzekotasunagatik soilik da logika: interpretatu gabeko teoria da, algebra abstraktua.

5 Dibergentzia versus Hedapenak

Demagun $L1$ eta $L2$ bi logika direla. Hiru posibilitate ditugu teoremen multzora begiratzen badiegu:

1. $L1$ logikaren formulen multzoak $L2$ logikarena propioki barneratzen du. Berdin gertatzen da teoremen multzoekin. Teorema berriek, batez ere $L1$ hizkuntzaren alfabetoko sinbolo berriko okurrentziak dituzte. Kasu honetan $L1$ $L2$ren hedapen bat dela diogu.

2. Formulen multzoa berdina izanik, teoremen multzoa ezberdinak dituzte. Orduan dibergenteak direla diogu. Lukasiewiczen hiru balioko logika logika klasikoarekiko dibergentea da, bere teoremen multzoa logika klasikoaren azpimultzo propioa delako.

3. $L1$ logikaren formulen multzoak $L2$ logikarena propioki barneratzen du, baina teoremen multzoen arabera:

   (a) $L1$k teorema berriak ditu alfabeto berriekin osatuak.

   (b) $L1$k teorema berriak ditu $L2$ren alfabetoko sinboloek osaturik.

   Kasu honetan logika sasi-dibergentea dela diogu. Sistema ez-estandarrak zehazteko ondoko erregela kontsideratzen da: sistema bat ez–estandarra izango da baldin sistema horrek logika klasikoaren teorema karakteristikoren bat ez badu. Bi aukera:

   (a) sistema dibergente batek logika klasikoaren teorema baten kontraesana izatea

   (b) Sistemak logika klasikoaren teoremaren bat ez izatea.

Normalena bigarren kasua da. Dena den, dibergentzia ez da nahikoa arerioa izateko. Areriotasunaren aurkako argudio nagusia: Ez da zalantzarik sistema dibergente eta sasi-dibergenteak arerio bezala aurkeztu direla baina esan daiteke benetan ez dela horrela logika klasikoarekiko duten ezberdintasuna konstante logikoen esanahien aldaketan oinarritzen direlako. Quineren (1970) esanahiaren aldaketari buruzko argumentua horrelakoa da labur esanda:

1. dibergentziarik bada, orduan konstante logikoen esanahiaren aldaketa ere bada,
2. konstante logikoen esanahiaren aldaketarik bada ez dira gauza beraz ari,
3. ondorioz ez da konfliktorik logika dibergente eta klasikoaren artean.

Haacken iritziz, (1) faltsua da: konektagailuen esanahiaren aldaketa ez da nahikoa sistema klasiko eta dibergenteen arteko konflikto eza frogatzeko. Gogoratu Peñak (1994) zioena, ez da ukazioaren esanahiaren aldaketarik baizik eta ukazio ezberdin baten kontsiderazioa, Logika Klasikoak baztertzen zuena. Ba al da Logika klasikoa aldatzeko arrazoirik? Arazoa serioa da: ez dira edozein Logika absolutuki egiazkoa dela eta, beraz, aldaezina dela defendatu dutenak: Kant (1781) adibidez. Egia da Kanten garaian ez zela Aristotelesen logikaz beste, baina argumentuak balioa du *Principia* kontsideratzen badugu: logikako egiak a priorizkoak dira. Baina, adimena (ulermena) logikako legeen arabera soilik funtziona badezake, nola azaldu jendeak ez-baliozko argumentuak eraikitzea, logikako legeen aurka aritzea? Bestetik, Fregek (1884) lege logikoen agerikotasuna defendatzen du, logizismo fregearraren oinarrizko tesia: programa honek aritmetikako axiomak termino logiko hutsetan adierazi eta termino logikoetatik deribatu nahi ditu, nolabait aritmetikak logikaren ziurtasuna beregana dezan. Bi arazo: onartutako ageriko printzipio batzuk faltsuak bihurtzen dira eta, bigarrenik, ez dago batere argi zein printzipio diren agerikoak. Quinek (1970) berdintsua defendatzen du: nabaritasuna.[5]

Asmoa Logika Formala eta beste sistemen artean (Aritmetika, Geometriaren sistemak edota Biologia eta Fisikako axiomatizazioen artean besteak

[5] *[...] every logical truth is obvious, actually or potentially. Each, that is to say, is either obvious as it stands or can be reached from obvious truths by a sequence of individually obvious steps. To say this is in effect just to repeat some remarks of Chapter 4: that the logic of quantification and identity admits of complete proof procedures, and some of these are procedures that generate sentences purely from visibly true sentences by steps that visibly preserve truth.* (Quine 1970, 83 or.)

beste) bereizketa egitea da. Baina zedarriketa irizpidea ez da logikaren nahitaezko izaeraren ideia sakon batean oinarritzen; nahiz eta ez den, ezta ere, zerbait arbitrarioa. Haacken arabera bada oinarri arrazional pragmatiko bat logikaz hitz egiten duten autoreek inplizituki adostuta erabiltzen dutena: Logika Klasiko edo Estandartzat hartzen diren sistema logiko ezagunak, hots, logika formal elementaleko kurtsoetan azaltzen direnak, logikatzat hartu behar badira, egokia dirudi ere hauekiko analogoak diren sistemak onartzea. Hauen artean: Logika klasikoaren hedapenak, hau da, alfabeto, axioma eta erregela berriak gehiagotzen dituzten sistemak. Logika Klasikoarekiko sistema dibergenteak, alfabeto eta adierazpen berdinekin axioma eta erregela —gehienetan murritzagoak— ezberdinak proposatzen dituzten sistemak. Logika Induktiboak, aldiz, ondoriotasun logikoaren kontzeptu analogo baina ahulago baten berri eman nahi duten sistemak. Logika Klasikoarekiko duten antzekotasunagatik, ez bakarrik formala baizik eta helburu eta interpretazioei dagokienez, naturala deritzo Haackek logikatzat hartzea. Honek irizpidea zehazteko bidea eskaintzen digu.

Logikari buruzko ikuspegi tradizionalaren arabera, Logika argumentuen baliozkotasunaz arduratuko litzateke, argumentuen formari begiratuz eta hauen edukia baztertuz. Beraz, Ryleren (1949) hitzetan, Logika topikoarekiko neutrala da. Izaera honek Logikaren eremua zehazteko printzipio bat eskainiko luke Haacken iritzian: arrazoibideari —edukia edozein delarik— aplikagarriak diren sistemak hartuko ditugu Logikatzat. Irizpide hau egokiagoa bada ere, analogiarena bezain zalantzagarria da. Topikoarekiko neutrala izanik, Logikak kontsideratzen dituen argumentuen baliozkotasuna formala da, hau da, argumentu bat formalki baliozkoa da baldin bere baliozkotasuna argumentu horretan azalpena duten konstante logikoen esanahian eta beste adierazpenen azalpen ereduan oinarritzen bada. Itxura denez, konstante logikoen multzoa finkatuko bagenu eta, noski, haien esanahiak, bide bat zabalduko genioke Logikaren eremuaren definizioari. Baina, berriro, konstante logikoak zeintzuk diren eztabaida filosofiko oso gogorra da.[6]

6 Balio Anitzeko Logikak

Logikaren hastapenetatik eztabaidatua izan da proposizioek har dezaketen egibalioen kopurua. Grezian[7] bibalentziaren printzipioa, egia-balioen kopuruari buruzko eztabaida, determinismoari lotua zegoen. Epikurearrek biba-

[6] Hemen utziko dugu eztabaida, jarraitu nahi duenak, Newton–Smith (1985) eta Sainsbury (1991) hartu ditzake abiapuntu.

[7] Ikus Prioren (1955, 241-243) aurkezpena.

lentziaren printzipioa ukatzen zuten, indeterministak zirelako noski. Estoikoek aldiz, deterministak izanik, onartu egiten zuten. Aristotelesek ere zalantzak zituen etorkizun kontingenteei buruzko eztabaidan ikus daitekeen moduan. Zalantza hauek ez zuten ordea Logika bibalente klasikoaren garapenean eraginik izan. XX. mendeko bigarren hamarkadaren hasieran berpizten da eztabaida Emil Post eta Jan Lukasiewicz logikalarien lanei esker. Abiapuntu ezberdinetatik eta helburu ezberdinez bi logikalari hauek zalantzan jartzen dute Logika Klasikoaren semantikak duen oinarri sendoenetako bat: bibalentzia. Egia-balioak ez dira beraz bi, gehiago egon daitezke: 3 Lukasiewiczen kasuan, n (edo nahi direnak) Posten kasuan. Ikuspegi ezberdinak sortzen dira printzipio honen ukaziotik eta baita ere zenbait arazo. Zer izan daiteke *ez-egia* eta *ez-faltsua* den proposizioa? Beste modu batera, 1 egiazkoa izatea bada eta 0 faltsua izatea, zer da $\frac{1}{2}$ den proposizioa? Hiru egia-balio baino gehiago kontsideratzen badira, nola ulertu behar dugu p proposizioa *egiazkoagoa* dela q proposizioa baino? Ba al da proposiziorik bere egia-balioa alda dezakeenik? Horrela bada, nola ulertu proposizioa? Zeri buruz *predikatzen* dugu egia?

Kapitulu honetan egia-balioei buruz arituko gara, ondoren balio anitzeko logika ezberdin batzuk aurkeztuko ditugularik.

6.1 Egia-balioak eta balioaniztasuna

1921. urtean aurkeztu ziren balio anitzeko logikatzat har daitezkeen lehen lanak E. Posten eta J. Lukasiewiczen eskutik. Eztabaida daiteke, Lukasiewiczek egiten duen moduan, Posten sistema sistema logikoa den ala ez,[8] baina kontutan izateko sistema da izan duen eraginagatik. Boole, Peirce[9], De Morgan[10], McColl eta Vasil'ev logika hauen aitzindaritzat jotzen dira baina Filosofiaren Historia begiratuz egia-balioe buruzko eztabaida eta zalantza gehiago aurki daitezke eta, nola ez, Aristotelesetik hasita.[11] Grezian, aipatu dugun moduan, bibalentziaren arazoa *etorkizun kontingenteei*[12] buruzko eztabaidari loturik dago, eta eztabaida honek irekitzen dio bidea Lukasiewiczi hirugarren egia-balio berri bat proposatzeko, Lukasiewiczek horrela aurkezten du arazoa[13]:

[8] Lukasiewiczek (1930) ez du onartzen Posten (1921) sistema sistema logikoa denik.

[9] Ikus 'Letter to William James 1909', Fitting (1966)

[10] De Morgan (1847, 149 or.).

[11] Duns Scoto eta Ockham dira aipatuenak Erdi Aroari dagokionez. Batez ere azken honek *propositio neutra* proposatzen duelako, *propositio vera* eta *propositio falsa* proposizioekiko ezberdina dena.

[12] Ikus Aristoteles *De Interpretatione*, 18a27-18b4.

[13] Ikus Lukasiewicz (1930 (1970)) .

> Suposa dezaket kontraesanik gabe nire presentzia Varsovian datorren urteko momentu batean, abenduko 21eko eguerdian adibidez, ez dagoela determinaturik ez positiboki ezta negatiboki ere oraingo garaian. Beraz *posiblea* da, baina ez *beharrezkoa*, esandako garaian Varsovian egongo naizela. Asuntzio honen arabera, "Varsovian izango naiz datorren urteko abenduaren 21eko eguerdian" proposizioa oraingo garaian ezin *egiazkoa izan ez eta faltsua*. Orain egia balitz nire etorkizuneko presentzia Varsovian beharrezkoa izan beharko litzateke, kontraesankorra dena asumitu dugunarekiko. Faltsua balitz bestetik, nire etorkizuneko presentzia Varsovian ezinezkoa izan beharko litzateke, kontraesankorra dena baita ere asumitu dugunarekiko. Ondorioz aipatutako proposizioa ez da egia ez eta faltsua orain eta hirugarren egia-balio bat izan behar du, 0 edo faltsutik eta 1 edo egiatik ezberdina (...) "Posiblea dena" errepresentatzen du eta hirugarren egia-balio bezala "egia"ri eta "faltsua"ri gehitzen zaie.

Kontuan izan beharrekoa da *posibilitate*ari buruzko eztabaida batek behartzen duela Lukasiewicz hirugarren "egia-balioa" onartzera. Baina beste bide posibleak ere badira *behar* honetara iristeko, noski hirugarren egia-balioa modu ezberdinetara interpretatuz.[14]

Gaizki-ulertuak alde batera, eztabaida egia-balioen izaerari eta egia-balioen eramaileei buruzkoa da. Ikuspegi formal huts batetik, semantikaren *intuizioa* alde batera utzita horrela esan nahi bada, egia-taulen metodoa garatzea gauza sinplea da. Hau da Postek egiten duena (1921), egia-balio gehiago kontsideratu eta sortzen diren *aldaerak* egokitu modu klasikoan egiten zenarekiko. Berez Logika Klasikoan konektagailuak definitzen dira, semantikan, egia-funtzio modura. Hau da, konektagailu bat funtzio bat da. Semantikako primitiboak 1, egia, eta 0, faltsua, badira, funtzio hauek elementu hauen funtzioak izango dira:

1. Ukazioa, konektagailu monaria izanik, proposizio bakar batera aplikatzen zaio, zehazkiago, bere egia-balioari. Eta aplikazio honen ondorioz lortzen duguna, egia-balio berri bat besterik ez da. Hau da

$$\neg : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$

[14] Aipa dezagun eztabaida honek logikarako interesik ez duela Quineren (1970) arabera. Gogoratu goian aipatutakoa.

2. Baldintzatzailea[15] proposizio bikote bati aplikatzen den konektagailua da, hau da, diadikoa da. Beraz, proposizio bikote honek izan ditzaken egia-balio konbinaketa bakoitzari egia-balio bat eskaintzen dio baldintzatzaileari dagokion egia-funtzioak. Hau da:

$$\rightarrow: \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$$

Logika Klasikoak bere aukerak egin zituen, lehenik eta behin, bi egia-balio kontsideratzerakoan eta bigarrenik, egia-funtzio hauen aukeran. Beste ezberdin batzuk baztertuak baina posibleak ziren. Aukera hau egin zenean, esplizituki ez bada inplizituki behintzat, hortxe zen konektagailuei buruzko eztabaida eta, bereziki, baldintzatzailearen definizio semantikoaren egokitasunari buruzko eztabaida. Logika modala aztertzen dugunean ikusiko dugu baldintzatzaileari buruzko eztabaida hau.

Ez da baina hemen horrelako eztabaidarik. Lukasiewiczek berak onartzen duen moduan proposatzen dena ez da zehazki hirugarren egia-balio bat, egia-balioaren eza baizik, eta honek nolabait bi egia-balio besterik ez direla kontsideratzen erakusten du. Berdina esan daiteke Kleeneri (*ez ezaguna*, 1938, 1952) eta Bochvari (*paradoxikoa* edo *esanahi gabekoa* 1939) buruz.[16]

Esan dugun bezala, etorkizun kontingenteen eztabaida ez da balioaniztasuna proposatzera eramaten gaituen bide bakarra. Filosofiatik at, badira beste motibazio batzuk. Kleenentzat (1938) adibidez, enuntziatu aritmetiko erabakiezinek eskatuko dute hirugarren *egia-balio* bat, edo, gutxienez, *egia-balio* eza. Bochvarden (1939) asmoa paradoxak aztertzea zen, inkontsistentziak edo esanahigabetasuna. Postek (1921) bere balioanitzeko sistemak proposatzen ditu bibaliotako kalkulu klasikoaren orokortze gisa, nahiz eta Postek *logikak* deitu, beste sistemekiko antzekotasunagatik soilik kontsideratzen dira *sistema logikoak*. Lukasiewiczek (1939) Posti leporatzen diona, Quinek (1970) balioanitzeko logika guztiei zabaltzen du: Balioanitzeko logika antzekotasunagatik soilik da logika, interpretatu gabeko teoria da, algebra abstraktua. Gehiago oraindik, kasu batzutan egia eta ezagutza nahasketatik sortzen dira. Argudio hau noski Lukasiewiczen kontra doa zuzen zuzenean: etorkizun kontingentei buruzko proposizioek ez dute egia-baliorik, ezin dira ez egiazko ez faltsuak izan, posibleak soilik[17]

[15]Eta beste konektagailu guztiak berdin.

[16]egia-balioei buruzko eztabaida zabaldu egin da azken urteotan, batez ere probabilitatean oinarritutako logikak aurkeztu direnetik (Ikus Leblanc 1984, 261 or.). Jarrai daiteke aurrerago egiaren kontzeptua ahulduz eta Logika Fuzzyra iritsi arte (L. Zadeh 1965) non egia-balio kualitatiboak kontsideratzen diren.

[17]Dummettek berdin pentsatzen duela dirudi:

Hirugarren *egia-balioa*ren izaerari buruz eztabaidatzea balio anitzeko Logiken interpretazioaz eztabaidatzea da ikusi dugunez. Argi dago bibaliotasuna onartzen ez duenak zerbait proposatu beharko lukeela. Zer den proposatu beharreko hori ez da hain argia. Haack (1974) lana luzez eztabaidatzen du arazo hau eta lau aukera proposatzen ditu egia-balio arrunt ez den *egia-balio* honen izaera azaltzeko.[18] Haackek (1978) dena den ez du onartzen Balioanitzeko logiken erabilerak *egia-balio* berri batekin (edo gehiagorekin) konprometitzen gaituenik, ezta bibaliotasunaren ukaziarekin.

Bochvard, Kleene eta Lukasiewiczen kasuetan argi ikusten da formula bai hirugarren egia-balio bat asignatzeak ez duela suposatzen horrelakorik existitzen denik, *egia-baliorik* ez duela baizik. Markadoreak dira. McCallek (1967) dioen bezala, inork ez du suposatzen "egiazkoa ala faltsuzkoa" hirugarren egia-balio bat denik. Kasurik gehienetan erdiko egia-balioak "egiazko" eta "faltsuzko" egia-balioen aldaketa epistemologikotzat hartzen dira.

6.2 Lukasiewicz

Sistema bibaliodunak[19] hedatzeko erarik sinpleena hirugarren egibalioa sartzea da, "neutroa", "bitartekoa" edo "zehaztugabea" interpretazioa emango diogu eta horren arabera eraikiko ditugu konektagailuei dagozkien egiafuntzio berriak. Aristotelesen etorkizun kontingenteen azterketaren ondoren, Lukasiewicz proposizio batzuk ez dutela bi egia-balio klasikoetako ez bata ez bestea onartu beharrean aurkitzen da. Honek esan nahi du egia-taula berriak definitu behar dituela:

> *On one intuitive interpretation of "true", "is true" can then be taken to mean "has a designated value" and 'is false' to mean "has a undesignated value". The different individual designated values are then to be taken not as degrees of truth, but, rather, as corresponding to different ways in which a sentence might to be true. We cannot determine the truth or falsity of a complex sentence just from the truth or falsity of its constituents; to do this we must know the particular ways in which they are true or false.* Dummett (1977, 166.)

[18] Arazoa larriagoa da Haackek aurkezten duena baino, balioanitzeko logikek hiru "egiabalio" baino gehiago proposatzen dituztelako:

> *What, for example, is the meaning of the truth value to which the number 20 is assigned? This question cannot be answered without a special convention.* (Zinov'ev 1963, 98.)

[19] Balio anitzeko logikaz irakurtzeko oso interesgarriak dira Zinov'ev (1963) eta Rescher (1969). Lukasiewiczen lanak (1970) liburuan aurki daitezke ingelesez.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	0	1	1	0
0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	0	1	1

Sistema hau L_3 bezala ezagutzen da eta $\neg$ eta $\rightarrow$ oinarrizko konektagailuen bitartez ere aurkez daiteke, egia-taula berdinarekin, eta beste konektagailuen definizioa ondorengoa izanik:

$$p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg[(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q]$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Baldintzatzailearen aukera oinarrizko konektagailu gisa ez da nolanahikoa. Egia-taulen arabera ezinezkoa litzateke beste konektagailuen bitartez definitu kasu guztietan $< \frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$ egia-balioaren sarrerak $\frac{1}{2}$ egia-balioa ematen baitu eta horrela, ezinezkoa da $p \rightarrow p$ tautologia bezala mantendu.

Horrelako sistema hirubaliodun baten ezaugarriak hauek dira:

1. Hiru egia-balio ditu.

2. Ukazioa oposaketa bezala definitzen da, hirugarren egia-balioa berdin jarraituz.

3. Konjuntzio baten egia-balioa konjunktuen txikiena da eta disjuntzioarena, disjunktuen handiena.

4. Baldintzatzailearena, $\neg p \vee q$ adierazpenaren bezalakoa da, $(\frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2})$ kasua ezik 1 egia-balioa hartzen baitu $p \rightarrow p$ adierazpenaren tautologitasuna mantentzeko.

5. $p \leftrightarrow p$ adierazpena eta $(p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow p)$ adierazpena baliokideak dira.

Garrantzitsua da ere kontuan izatea L_3 eta C_2 (klasiko bibalioduna) berdinak direla bi balio klasikoak bakarrik hartzen ditugunean. Ondorioz, L_3ko tautologia guztiak C_2ko tautologiak dira. Bestalde, C_2-tautologia batzuk $\frac{1}{2}$ egia-balioa har dezakete egiasignazio berrietan. Hauetako kasu berezi bat Hirugarrena Baztertze legearena da, $\alpha \vee \neg\alpha$, L_3ko tautologia ez dena, $\frac{1}{2}$ balioa hartzen duelakoaα $\frac{1}{2}$ balioa duenean. Posible da halere Hirugarrena Baztertzearen legea mantenduko lukeen disjuntzioaren definizioa ematea:

Baina honek beste arazo batzuk dauzka, $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$ tautologia izateari uzten dio adibidez.

- C_2ko tautologiak L_3n ez direnak

$$[\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha] \rightarrow \alpha$$

$$[\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)] \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

- Dena den, balditzatzaile materialaren paradoxak mantendu egiten dira:

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

- Kontraesanaren legea, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, ere galdu egiten da L_3n, bere ukazioa dena $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ adierazpenak $\frac{1}{2}$ balorea du α $\frac{1}{2}$ denean. Honekin Brouwer eta Heytingen logika intuizionistarekiko ere ezberdintzen da, non Hirugarrena Baztertzearen Legea baliogabe geratzen den kontraesanaren legea mantenduz.

6.3 Bochvar

L_3ko aldaera garrantzitsu bat 1939. urtean aurkeztu zuen Bochvar errusiarrak (1939). Honen arabera, hirugarren egia-balioari "erabakiezina" interpretazioa eman behar zaio, *zerbaiti buruz erabakiezina den elementuren bat izan* zentzuan ulertua. Horrela, bere eraikuntzan Lukasiewiczen zenbait ideia baztertzen ditu –adibidez, konjuntzio batean egia-balio faltsuena hartu behar dugula. Konjuntziorako ondorengo egia-taula eskaintzen du:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	I	0	I	I	I	I
1	0	0	0	1	0	0
I	1	I	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I
I	0	I	I	I	I	I
0	1	1	0	1	1	0
0	I	1	I	I	I	I
0	0	1	0	0	1	1

(2)

Hirugarren balioa beraz, *erdibideko* balioa balitz baino, egia-balio *paradoxikoa* edo *esanahi gabeko*-tzat hartzen da. Pentsa daiteke esanahigabetasun hau logika klasikoaren paradoxikotasunaren terminoetan: *Enuntziatu hau faltsua da* formako enuntziatuak ez egiazko ez faltsuzko dira eta, horrela, *esanahi gabeak*. Horrelako enuntziatu batek, konjuntzio batean sartzen denean, konjuntzio osoaren esanahia kutsatuko luke. Beraz, I egia-balioa oso indartsua da, I egia-baliora erreduzitzen baititu konjuntzio guztiak azaltzen denean.

Honek ondorio zuzen bat du: B_3n *tautologia* kontzeptua eraginik gabekoa suertatzen da. Honen aurrean bi aukera ditugu:

1. B_3 hedatu tautologia kontzeptua aplikagarria egiteko

2. Edo tautologia kontzeptua *ahuldu*, kuasitautologiak kontsideratuz, F balioa hartzen ez duten formulak izendatzeko. Horrela froga daiteke B_3ko kuasitautologiak, C_2ko tautologiak direla.

6.4 Kleene

S.C. Kleeneek 1952. urtean aurkeztu zuen bere logika (1952), aurreko lan batean (1938) aurkeztutako sistema baten berri ematez. K_3 sisteman, hirugarren egia-balioak ez dio erreferentziarik egiten inongo arrazoi ontologikoari, izaera epistemologikoa duelako. Ez da baztertzen enuntziatu bat egiazko ala faltsuzko izatea baina suertatzen da *ezezaguna* zaigula edota *zehatzezina*. Bere aukera:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	I	0	I	I	I	I
1	0	0	0	1	0	0
I	1	I	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I
I	0	I	I	I	I	I
0	1	1	0	1	1	0
0	I	1	I	I	I	I
0	0	1	0	0	1	1

(3)

L_3n bezala, baldintzatzailearena salbu, Kleenek disjunzioarekiko baliokidetza klasikoa salbatu nahi du, hau da, $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Ondorioz, Kleenen sisteman $p \to p$ ez da tautologia bat, I egiobalioa hartzen duelako p I denean eta, noski, $p \vee p$ ez da ere tautologikoa izango. Kleenen motibazioa matematikan dago eta bere adibidea, hirugarren egia-balioa interpretatzeko ondorengoa da. Demagun P —funtzio proposizionala— predikatu matematikoa x aldagaiari aplikatzen diogula D domeinu batekiko non $P(x)$ D domeinuko zati baterako soilik definitzen den. Adibidez: $P(x)$ baldin eta soilik baldin $1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$. Horrela, $P(x)$ zera izango da:

1. egiazkoa x-ren heina 1 eta $\frac{1}{2}$ren artean dagoenean,
2. zehaztugabea $x = 0$ denean, eta
3. faltsua beste kasu guztietan $[(x \neq 0) \wedge (x < \frac{1}{2})] \vee (1 < x)$

Kleenek beste sistema bat aurkeztu zuen, —K_3 ahula deitua— lehenengoa ahulduz eta B_3 sistemarekiko baliokidea, I egia-balioaren sarrera guztiek I emaitza eskaintzen dutelako.

6.5 Post

Ikusitako sistema guztiek *ispilua* deitutako ezaugarria dute.[20] 1921. urtean Postek (1921) balio finituko logika bat aurkezten du m balioekin baina interpretazio berezi batekin.

Bere notazioa alde batera utziko dugu eta ukazioa eta disjuntzioa oinarrizko konektagailuak izanik, ondorengo egia-funtzioak ditugu, 1 egiarako harturik eta m faltsurako:

[20] Ukazioa definitzerakoan aurkakoa kontsideratzen da.

p	1	2	3	...	$m-2$	$m-1$	m
$\neg p$	2	3	4	...	$m-1$	m	1

(4)

$$/p \vee q/ = max[/p/, /q/]$$

Beste konektagailuak era klasikoan definitzen dira. Logiken familia honi P_m deitzen zaio.

1. Lema: *P_3n, ebalua itzazu ondorengo formulak: $p \vee \neg p$ eta $p \vee \neg p \vee \neg\neg p$. (Lehenengoa ez da tautologia, bigarrena, aldiz, bai.)*

P_m $P_{\aleph_0}$-ra orokor daiteke. egia-balioak, 1, 0, eta $(\frac{1}{2})^k$ direlarik (k osoa):

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, ..., (\tfrac{1}{2})^k, ..., 0.$$

Erregelen bitartez definitzen ditugu konektagailuen egia-funtzioak:

$$\neg p = \begin{cases} 1 & baldin \quad /p/ = 0 \\ \frac{1}{2} \times /p/ & baldin \quad /p/ \neq 0 \end{cases}$$

$$/p \vee q/ = max[/p/, /q/] \tag{5}$$

Eta konektagailuen arteko definizio klasikoak.

7 Modalitatea

Modalitateen azterketa logika klasikotik at geratu zen, besteak beste, Fregek horrela finkatu zuelako. *Befriffsschrift* liburuan Fregek logikaren objektua judizioen *edukia* dela defendatzen du. Edukia independentea da judizio hori egin ahal izateko diren arrazoiengandik, hau da, modalitateengandik. Berak dioen moduan, proposizio bat beharrezkoa dela diodanean, nire juditziorako ditudan arrazoien berri ematen dut eta hau, noski, logikatik at dago.

Logika klasikoaren ezaugarri nagusienetako bat asertorikoa izatea da, hau da, kontsideratutako egia-balioak bi dira eta gainera, enuntziatuek horietako egia-balioetatik bata ala bestea hartzen dute. Ez da beraz ñabardurarik ez eta mailakatzerik enuntziatuek har dezaketen egia-balioen artean. Egia ala faltsua izatearen ñabarduraz arduratzen den logikari Logika Modala deitzen zaio.

Egiazko/faltsuzko proposamenen artean ezberdin daitezke:

- egiazko/faltsuzkoa dena kasua delako

- egiazko/faltsuzkoa izan behar duena

Egiazkoa izan behar duen proposamenari beharrezkoa deitzen diogu eta faltsua izan behar duen proposamenari ezinezkoa. Beste guztiak (bai egiazko bai faltsuzkoak) kontingenteak dira. Ezinezkoa ez denari posiblea deitzen zaio. Beharrezkotasunak zentzu zehatza dut testuinguru honetan: proposizio zehatz bati buruz beharrezkoa dela diogunean ez dugu horrekin esan nahi, gauzak diren moduan izaten jarraituko balira edo mundua orain arteko modukoa izaten jarraituko balitz, ezin diola egia izateari utzi, baizik eta, hobeago esanik, ezin izango liokeela egia izateari utzi gauzak nola dauden aparte utzita, edo mundua nolakoa gertatzen den alde batera utzita (Hughes eta Cresswell 1968).

Hauek dira nozio modaltzat hartzen direnak: beharrezkotasuna, ezinezkotasuna, kontingentzia eta posibilitatea. Aipagarria dira beraien artean ematen diren erlazio estuak: p beharrezkoa dela esateak p faltsua dela ezinezkoa dela esatea da, eta p posiblea dela esatea p faltsua izatea ez dela beharrezkoa esatea da.

7.1 Modalitatea eta baldintzatzailea

Logika modala bi eratara uler daiteke: zentzu estu batean ala zentzu zabalean. Zentzu estua zentzu klasikoa da non logika modalak modalitate aletikoak besterik ez lituzke aztertuko. Modalitate aletikoak egiaren modalitateak dira. Era klasiko honetan ulertua, logika modalak eragile modalek eragindako enuntziatuen arteko inferentzi erlazioak aztertuko lituzke egitura klasikoa jarraituz: proposamenen logika modala eta predikatuen logika modalaren artean bereizteaz. Hauek ez dira haatik aztertzen diren modalitate bakarrak. 1951. urteko *Deontic Logic* von Wrigth logikalariaren lanaren ostean Logika Modala era zabal batean ulertzen da, hala nola, modalitate deontiko, epistemiko etab. kontsideratuz.

- ALETIKOAK: beharrezkoa, posiblea, ezinezkoa, kontingentea
- DEONTIKOAK: derrigorrezkoa, baimendua, debekatua
- EPISTEMIKOAK: egiaztatua, ez erabakia, faltsatua
- EXISTENTZIALAK: Unibertsala, izateduna, hutsa

Ukazioa erabiliz modalitate aletiko guztiak bakar batetara erreduzitu daitezke. Har dezagun $\Box$ sinboloa, beharrezkotasunaren eragilea adierazteko, beraz, *beharrezkoa da p*, adierazteko $\Box p$ idatziko dugu. Orduan $\Box\neg p$

beharrezkoa da ez-p da, hau da, *ezinezkoa da p*. Gainera $\neg\Box\neg p$ *ez da beharrezkoa ez-p* eta *posiblea da p* baliokideak dira. Beraz, beharrezkotasuna primitibotzat hartuz, posibilitatea defini dezakegu $\neg\Box\neg$ bezala. Posibilitaterako $\Diamond$ sinboloa erabiliko dugu eta primitibotzat hartzeko ere aukera bada: $\neg\Diamond p$ *ez da posiblea p* eta *beharrezkoa da ez-p* alde batetik eta bestetik $\neg\Diamond\neg p$ *ez da posible ez-p* eta *beharrezkoa da p* berdina adierazten dute.

7.2 PLM Hizkuntza: sintaxia

7.2.1 Alfabetoa

$$A_{PLM} = \{p_1, p_2, ..., q_1, q_2, ..., r_1, r_2, ..., \neg, \rightarrow; \Box; (,)\}.$$

- Proposizio aldagaiak: $PA = \{p_1, p_2, ..., q_1, q_2, ..., r_1, r_2, ...\}$.
- Konektagailu proposizionalak: $\{\neg, \rightarrow\}$.
- Eragile Modala: $\{\Box\}$.
- Parentesiak: $\{(,)\}$.

7.2.2 Adierazpen ongi formatuak

1. Definizioa: *Adierazpen ongi formatuen, hau da, formulen, multzoa ondorengo erregelen bitartez definitzen dugu:*

1. *Proposizio aldagaiak formulak dira.*
2. *Baldin ϕ formula bada, orduan $(\neg\phi)$ formula da.*
3. *Baldin ϕ eta ψ formulak badira, orduan $(\phi \rightarrow \psi)$ formula da.*
4. *Baldin ϕ formula bada, orduan $(\Box\phi)$ formula da.*
5. *Ez da beste formularik aurreko erregelen aplikazio finitutik sortutakotik at.*

Logika modal normaleko sistema bat zehazten dugula diogunean, logika modalaren hizkuntzako formulen klaseren bat aukeratzen dugula diogu. Baldin S horrelako klase bat bada, klase horretako elementuak (formulak) sistema horretako teoremak izango dira, eta $\vdash_S \phi$ idatziko dugu ϕ Sko teorema dela adierazteko. Formula guztien klasea sistema inkontsistente bat da.

Formula bat sistema baten teorema denean, sisteman dagoela esango dugu. Bi sistema ezberdinek teorema berdinak badituzte, orduan deduktiboki baliokideak direla esango dugu. Sistema bateko teorema guztiak beste sistema bateko teoremak badira eta bigarren honek teorema batzuk baditu lehengokoaren ez direnak, orduan lehenengoa bigarrena baino ahulagoa dela esango dugu, edo bigarrena indartsuagoa dela edo bigarrenak lehenengoa barneratzen duela.

7.2.3 *PLM* hizkuntzarako Sistemak

Logika Modaleko sistema axiomatiko ezberdinak daude, ezberdintasun hau baina ez da Logika Klasikoan ematen den modukoa. Logika Klasikoan sistema axiomatiko ezberdinak baditugu ere, baliokideak dira sortzen dituzten Teoremen multzoa begiratuz. Logika Modalaren kasuan ez da horrela gertatzen. Sistema ezberdinak oinarri bati axiomak gehituz lortzen dira. Oinarrian **K** sistema dugu, Logika modal normal ahulena. Gure aurkezpenean, eta gauzak errazteko asmoz, axioma-eskemak erabiliko ditugu eta ondorioz, Sustituzio Uniformea erregelaren beharrik ez dugu izango. Aukeratu dugun oinarri axiomatiko klasikoa, Churchen (1956) sistema da.

(K) **K** Sistema
K Sistema sistema modalen arteko sistemarik ahulena da. Bere gain eraikiko dira beste sistema normal guztiak. **K** Sistema proposizioen logikarako sistema axiomatiko bati K axioma gehitzen diogunean lortzen da. Ondorengo axiomak ditu beraz:

SL1 $\vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$.

SL2 $\vdash \{\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)\} \rightarrow \{(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma)\}$.

SL3 $\vdash (\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$.

K $\vdash \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$ (K axioma)

Eta ondorengo transformazio erregelak:

(MP) Modus Ponens

(B) Beharrezkotasunaren erregela. Baldin $\vdash \phi$, orduan $\vdash \Box\phi$.

(T) **T** Sistema. **K** Sistemari **T** axioma gehitu: $\vdash \Box\phi \rightarrow \phi$.

(S4) **S4** Sistema. **T** Sistemari *4* axioma gehitu: $\vdash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$.

(S5) **S5** Sistema. **T** Sistemari E axioma gehitu: $\vdash \neg\Box\phi \rightarrow \Box\neg\Box\phi$.

7.3 PLM Hizkuntza: Semantika

$< W, R >$, egitura bat definitzen dugu, **markoa** deitua, non $W \neq \emptyset$, mundu posibleen multzoa den; R erlazio bitarra da W multzoan definitua $R \subseteq W^2$ (akzesibilitate erlazioa deitua). Marko batean E egiasignazio bat definituz **Kripkear egitura bat**, edo egitura bat, lortzen dugu non E, proposizio aldagaiei mundu posible bakoitzean egiasignazio bat eskaintzen dien funtzioa den.

2. Definizioa: *Kripkear*[21] *Egitura bat,* $< W, R, V >$ *egitura bat da non:*

(i) $W \neq \emptyset$.
(ii) $R \subseteq W^2$.
(iii) $E : PA \times W \longrightarrow \{0, 1\}$.

7.3.1 Egitura eta formulen arteko asegarritasun erlazioa

3. Definizioa: *PLM hizkuntzako ϕ formula bat asegarria da M egiturako w munduan, $M \models_{[w]} \phi$, baldin eta soilik baldin:*

1. $M \models_{[w]} p$ *baldin eta soilik baldin* $E(p, w) = 1$, $p \in PA$ *guztientzat.*
2. $M \models_{[w]} \neg\phi$ *baldin eta soilik baldin* $M \not\models_{[w]} \phi$
3. $M \models_{[w]} (\phi \rightarrow \psi)$ *baldin eta soilik baldin* $M \not\models_{[w]} \phi$, *edo* $M \models_{[w]} \psi$
4. $M \models_{[w]} \Box\phi$ *baldin eta soilik baldin* $w' \in W$ *eta* $< w, w' > \in R$ *asetzen dituzten* w' *guztientzat,* $M \models_{[w']} \phi$.

4. Definizioa: *ϕ formula bat asegarria da existitzen bada gutxienez $M = < W, R, V >$ egitura bat non $w \in W$ mundu batentzat, $M \models_{[w]} \phi$*

5. Definizioa: *ϕ formula bat egiazkoa da M egituran, $M \models \phi$, baldin $M \models_{[w]} \phi$ M egiturako $w \in W$ guztientzat.*

6. Definizioa: *ϕ formula bat logikoki baliozkoa da, $\models \phi$, baldin eta soilik baldin $M \models \phi$ M guztientzat.*

7. Definizioa: *ϕ formula bat baliozkoa da $< W, R >$ marko batean baldin eta soilik baldin baliozkoa bada marko horretako egitura guztietan.*

8. Definizioa: *Markoen C klase bat eta ϕ formula bat emanik ϕ baliozkoa da C markoen klasean baldin eta soilik baldin ϕ baliozkoa bada klase horretako marko guztietan.*

[21]Kripkear egitura deitzen zaio, semantika hau Kripkek aurkeztu zuelako. Ikus Kripke (1963).

8 Logika Epistemikoa

von Wrigthek aurreikusi bazuen ere logika honen aukera, Hintikkak eskaintzen digu erantzun bat *Knowledge and Belief —Ezagutza eta Ustea—* 1962. urteko Logika Epistemikoaren sortzailea den bere liburuaren azpitituluan: ezagutza eta ustea nozioen logikarako sarrera. Ikuspegi hau da orokorrean onartzen dena: ezagutza eta ustea nozioen logika. Azpimarratzekoa da Logika Epistemikoa —berez Ezagutzaren Logika beharko lukeena— Ezagutza eta Ustearen Logika izendatzeko zabaldua dagoela, oso, Logika Doxastikoa —berez Ustearen Logikari dagokiona— baztertua dagoelarik. Badira bestalde, ustearen nozioa eta ezagutzaren nozioa existitzen direnik zalantzan jartzen dutenak (O'Connor 1968). Halpernek (1995), ezagutzaren errepresentazioa eta modelizazioaren artean desberdintasunak ikusten ditu: agente batek izango lituzkeen ezagutzen (eta hauen ondorioen) errepresentazioa, alde batetik eta bestetik, ezagutza nozioaren eredua eskainiko lukeen sistemen eraikuntza. Itxuraz besterik ez bada, bi kontzeptu hauek badute ezaugarri formalak ustearen nozioaz hitz egitea eskaintzen digutenak. Logika Epistemikoaz beraz nozio epistemikoen logika ulertu behar dugu, hau da, Ezagutza eta Ustearen Logika. Zer ulertzen da Logikaz testuinguru honetan? Logika Epistemikoak logikoki egiazkoak diren printzipio epistemikoak eskaini beharko ditu, eta printzipio hauek, noski, logika Klasikoaren printzipioak gainditu beharko dituzte nolabait. Hau da, 'Berak 'p ezagutzen du edo ez du p ezagutzen" ezingo dugu printzipio epistemikotzat hartu, argia baita printzipio orokorrago baten instantzia epistemikoa dela. Ondorioz, Logika Epistemikoak "termino epistemikoen azalpen esentziala, errelebantea, duten egi logikoetara" mugatuko du bere interesa (Hocutt 1972). Adibidez: "Baldin a pertsona batek p ezagutzen badu, orduan p egiazkoa da"

(1) $K_a p \rightarrow p$, "Baldin a pertsona batek p uste badu, orduan ez du $ez-p$ uste".

(2) $B_a p \rightarrow \neg B_a \neg p$.

Printzipio hauek, nozio epistemikoen azalpen esentzialik ez badute ere, logikoki egiazkotzat jo daitezke. Ikuspegi honek, dirudienez, Logika Epistemikoaren zeregina gizaki batek (arrazionala edo irrazionala) izango lituzken ezagutza eta uste faktikoen zerrenda bat egitera mugatzen du. Horrela izanik, interpretazio errealista honek ez luke ezer argituko, Creswell (1972) lanak argi uzten du ez dagoela uste-enuntziatuei buruzko printzipiorik, konektagailuei (egia-funtzionalei) buruzko printzipioa jada ez dena. Lemmonek (1967) ere gauza bera azpimarratzen du. Bere iritzian, ezagutzaren logika errealista batek ez du berezko teoremarik, (1) eta bere ondorio logikoak ezik". Nola kontsideratu beraz Logika Epistemikoa? Hintikka (1968)-ren arabera, Logika Epistemikoa hobeto uler daiteke eredu azaltzaile, esplikatiboa, bezala non gure hizkuntza arruntaren "lanen" aspektu batzuk uler daitezken. Lenzen (1978) honekin ados dago eta zeregin hauek inposatzen dizkio Logika Epistemikoari:

1. Nozio epistemikoen azalpena (esplikazioa).
2. Azalpen horren arabera, Logika Epistemikoaren Printzipioen baliozkotasunaren azterketa.

Horrela, Logika Klasikoaren printzipioak onartzen badira "baliozkoak direlako bakarrik konstante logikoen esanahiaren arabera", Logika Epistemikoaren printzipioak onargarriak izango lirateke "baliozkoak badira —konstante logikoen esanahiaren arabera eta— azalpen egokia duten nozio epistemikoen arabera". Eta azalpen baten egokitasunak zera besterik ez du eskatzen: nozioen oinarrizko esanahiaren berri eman –esanahi hori harrapatu. Zehazkiago, ustearen azalpen batek, partzialki bada ere, aurreiritzi subjektiboetan oinarrituriko uste batzuen "irrazionaltasuna" azaldu egin beharko du. Eta horrela beharko du izan pertsona batek arrazionalki uste beharko lukeen teoria normatibo batean bihurtu nahi ez badu. Helburua bikoitza eta elkarlotua beraz, alegia, nozio epistemikoak eta hauek gobernatzen dituzten legeak azaltzea.

8.1 Proposizioen Logika Epistemikoa

Proposizioen Logika Epistemikorako Hizkuntza ez dugu hemen aurkeztuko, PLE Hizkuntza, goian aurkeztutako logika modalaren ia berdina baita. Oraingoan, bi eragile berri kontsideratuko ditugu: ezagutzarako bat, K eta usterako bestea, B. Eragile hauek agente bat aurresuposatzen dutenez (ezagutzen duena edo uste duena), agente batekiko erlatibizaturik emango dira: $K_a p$ formulak "a agenteak p ezagutzen du" adieraziko du eta $B_a p$ formulak "a agenteak p uste du". Agente ezberdinak ditugunez, semantikan ere hauek kontsideratu beharko ditugu, egiturek beraz, erlazio bakarra izan ordez, agente bakoitzeko erlazio bat definituko dute. Intuitiboki, mundu posible bat agente batek bere ezagutzaren arabera posiblea kontsideratzen duen mundua da eta erlazioak mundu honekiko posibleak diren munduak dira.

Sistema formalak ere 'berdinak' dira, axioma hauekin eraikiak:

- Oinarri axiomatiko klasikoa

- **K** - $\vdash K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$.
- **T** - $\vdash K_i\varphi \to \varphi$.
- **4** - $\vdash K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$.
- **5** - $\vdash \neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$.
- **D** - $\vdash K_i\varphi \to \neg K_i\neg\varphi$.

Eta Inferentzi erregela hauek:

- **Nec** - Baldin $\vdash\varphi$ orduan $\vdash K_i\varphi$
- **MP** - Baldin $\vdash\varphi$ eta $\vdash\varphi \to \psi$ orduan $\vdash\psi$ (φ y ψ edozein formula direlarik).

Normalean, **KT45** hartzen da ezagutzaren sistema moduan eta usterako sistema, **KD45** (noski, eragilea, kasu honetan, B delarik).

8.2 Elkarreko Ezagutza eta Ezagutza Banatua

Esan dugunez, logika epistemikoak agente ezberdina kontsideratzea permititzen digu eta honekin batera, agente ezberdinen arteko ezagutzen erlazioak aztertzea. Agente anitzen testuinguruetan interesgarria da zenbait aplikaziotarako agenteen multzoetan edo taldeetan eman daitezkeen ezagutza *egoera* ezberdinen azterketa. Eta ez hori bakarrik, horrelako egoeretan oso garrantzitsua izan daiteke ezagutzari buruzko arrazoiketen azterketa. Ezagutza egoera hauetako bat *common knowledge* deritzana da, guk **elkarreko ezagutza** deituko duguna eta paradoxa baten bidez aurkezten ohi dena: "The Conway Paradox", Barwise (1989, 201 or.). Ondoren bertsio egokitua:

Demagun bi poker jokalari badirela, Ane eta Jon, eta bakoitzak karta batzuk dituela. Demagun bereziki, bateko bana dutela. Beraz, biek ezagutzen dute ondokoa:

σ*: Anek edo Jonek bateko bat du.*

Demagun orain Leire agertzen dela eta galdetzen diela ea besteak batekorik ote duen dakiten ala ez. "Ez" erantzungo dute noski. Eta Leirek berriro (eta berriro, ...) galdetzen badu, "ez" erantzuten jarraituko dute.

Baina demagun orain Leirek dioela, "Begira, zuetako batek gutxienez bateko bat du. Orain ba al dakizu besteak batekorik al duen?" Berriro "ez" erantzungo dute biek. Baian zerbait gertatzen da orain. Jonek "ez" esanda Anek entzutean horrela arrazoitu dezake [Asumitzen dugu Jonek eta Anek *zintzotzat eta adimentsutzat dutela elkarri.]: "Jonek ez badaki nik bateko bat dudala, gutako batek baduela entzun eta gero, bakarrik izan daiteke berak bateko bat duelako". Jonek berdin arrazoituz ondorio berdinera iritsi daiteke, beraz biek dakite orain besteak bateko bat duela.*

Nola da posible Anek eta Jonek badakitena esanik, egoera guztiz aldatzea? Paradoxa azaltzeko ezagutza motak ezberdindu beharra dugu. Egoera ezberdinen aurrean gaude: hasierako egoeran, σ ezagutza banatua den bitartez, Leireren esanaren ondoren, σ elkarreko ezagutza da. Beste modu batera esanda, hasieran biak ezagutzen dute σ, baina ez gehiago. Bigarren egoeran, aurrekoa ezagutzeaz gain, biek dakite besteak ere σ ezagutzen duela. Horrelako egoerak oso garrantzitsuak dira gure bizitza sozialean, komunikazioan edo koordinaziorako adibidez. Ikus dezagun kontzeptu hauen azterketa formala.

8.2.1 LEP_n^{CE} Hizkuntza: Sintaxia

Ezagutza Banatua eta Elkarreko Ezagutza bi eragile modal berri bezala kontsideratuko ditugu, horrela LEP_n Hizkuntza hedatuz. LEP_n^{CE} Hizkuntza beraz LEP_n Hizkuntza bezalakoa da, bi eragile berriekin:

Ezagutza Banatua

$$E\varphi, \textit{ denek dakite ... } : K_1\varphi \text{ eta } K_2\varphi \text{ eta ... eta } K_n\varphi.$$

Elkarreko Ezagutza

$$C\varphi, \textit{ Elkarreko ezagutza da ...}: E\varphi \text{ eta } EE\varphi \text{ eta } EEE\varphi, \text{ eta ...}$$

Oharrak:

- $C\varphi$ errepikapen infinitua da. Intuitiboki besterik ezin da ulertu, hizkuntza formalek ez baitute formula infiniturik onartzen
- Baldin $n = 1$, orduan $E\varphi \equiv K\varphi$.

Formazio Erregelen multzoa zabaldu egin behar dugu ondorengo bi klausulekin:

6. Baldin φ formula bada, orduan $(E\varphi)$ formula da;
7. Baldin φ formula bada, orduan $(C\varphi)$ formula da;

8.2.2 LEP_n^{CE} Hizkuntza: Semantika

9. Definizioa: *Bedi* $M =< W, R_1, R_2, ..., R_n, V >$. *Bitez* $w_1, w_2, ..., w_n$ W *multzoko munduak.* w' **mundua eskuragarria dela** w **mundutik** *esango dugu, existitzen bada* $w_1, w_2, ..., w_n$ *segida bat hala nola* $w = w_1$ *eta* $w' = w_m$ *eta* j $(1 \leq j \leq m-1)$ *bakoitzerako,* $w_j R_i w_{j+1}$, $i \in Ag$ *agenteren batentzako.*

- $M \models_{[w]} E\varphi$ *baldin eta soilik baldin* $M \models_{[w']} \varphi$, wR_iw', *i agenteren batentzat asetzen duten* $w' \in W$ *guztientzat.*
- $M \models_{[w]} C\varphi$ *baldin eta soilik baldin* $M \models_{[w']} \varphi$, *w mundutik eskuragarri diren* w' *guztientzat.*

Baliokideki (Halpern 1995):

- $M \models_{[w]} E\varphi$ *baldin eta soilik baldin* $M \models_{[w']} K_i\varphi$, *i guztientzat.*
- $M \models_{[w]} C\varphi$ *baldin eta soilik baldin* $M \models_{[w]} E^k\varphi$, *non* $k = 1, 2, ...;$ *eta* $E^1 =_{def} E$ *eta* $E^{k+1} =_{def} EE^k$

8.2.3 LEP_n^{CE} Hizkuntza: Sistema Formalak

Axioma Eskemak

E $\vdash E\varphi \leftrightarrow K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge ... \wedge K_n\varphi.$

C $\vdash C\varphi \rightarrow E(\varphi \wedge C\varphi).$

Eta ondorengo inferentzi erregela K_i bakoitzerako:

$$\text{Baldin} \vdash \varphi \rightarrow E(\varphi \wedge \psi) \text{ orduan} \vdash \varphi \rightarrow C\psi$$

Halpern eta Mosesen lanean (1992, [4.3 teorema]) zuzentasun eta osotasun emaitzak frogatzen dira sistema hedatu hauetarako.

9 Logika Intuizionista

XX. mende hasieran Matematikaren Filosofiak momentu garrantzitsua bizi izan zuen[22] 1902. urtean Russellek multzo teoriako bere paradoxa famatua *aurkezten* du, Fregeri bidalitako karta batean. Honek zalantzan jarri zituen

[22]Ikus Mangione (1971).XX. mendeko Logikaren egoera luze eta zabal eztabaidatzen du.

programa logizistaren helburuak. Matematikari buruzko ikuspegi estandararraren eraiketa osoa lurrera dator. Arazo honen aurretik, *programa logizistak* bazituen bere aurkariak, eta hauen artean, intuizionistatzat jo izan direnak.

Intuizionismoaren programa[23] Brouwerrek mende hasieran proposatu zuen era sistematiko batez[24]. Dirudienez ez zituen ez Fregeren ez Whitehead eta Russellen *Principia Mathematica* (1910-1913)) lanak ezagutzen. Ikuspegi tradizionalaren aurka, Logikarekiko Matematikaren lehentasuna defendatuko du, programa logizistak defendatzen zuenaren aurka. Interesgarria da Brouwerek Matematikari buruzko zuen ikuspegia aztertzea Intuizionismoa bere osotasunean ulertu ahal izateko. Matematika adimen jarduera bat da (batzutan giza pentsamenduaren zati zehatza bezala deskribatzen da). Partikularki, objektu matematikoak adimen eraikuntzak dira eta hauen ezaugarriak, berriro, adimen eraikuntzek finkatzen dituzte. Matematikak, ondorioz, ez dute lekurik giza adimenetik at. Independenteak dira munduarekiko. Giza adimenak oinarrizko intuizioak antzematen ditu, zenbaki naturalen kasu. Intuizio hauen artean oinarrizkoena, denboraren jarraipenean gertaera ezberdinen errekonozimendua dugu (Brouwer 1907). Matematikaren jarduera, beraz, adimen eraikuntzen prozeduren bitartez Matematikaren munduaren eraikuntzan datza.

Hizkuntzak ez du inongo paperik jokatzen prozesu honetan baina derrigorrezsuertatzen da komunikazioa dela eta. van Dalenen (1986) arabera, soinu eta sinboloen bitartez jendeak besteengan eraikuntza matematikoen kopiak sortu nahi du. Horrela hizkuntza matematikoa sortzen da, eta, bere kasu berezia dena, arrazoibide logikoaren hizkuntza. Bigarren urratsa arrazoibide logikoaren hizkuntza matematikoki aztertzea da, hau da, bere ezaugarri matematikoak jorratzea. Azken honek osatzen du logika teorikoaren ezagutza. Brouwerren kritika bikoitza da:

- Matematikarekiko logikaren nagusitasunari eginikoa.
- Logikaren segurantza faltari eginikoa.

Intuizionismoaren kritika logizismoari eta, bide batez logika klasikoari eginikoa, gehienetan Logikaren printzipio zehatz batzuei eginiko kritika bezala azaldu da. Baina hau ez da egiten den benetako kritika, kritikaren ondorioa baizik. Arazo nagusia logikaren izaera eta estatusari buruzkoa da.

Logika klasikoaren eremuan logikaren estatusari buruzko akordiorik ez bada ere, Logika teoria guztien artean oinarrizko eta orokorrena delako ikuspegia bada. Fregeren eta Russellen arabera, Matematika Logikara erre-

[23]Ikus van Dalen (1986).
[24]Ikus Brouwer (1907), bere doktorego tesia, Heyting (1975) liburuan.

duzi behar da eta beraien programaren, programa logizistaren balio epistemologikoa logikaren oinarrizko izaeran datza.

Intuizionistek aldiz, Matematika primarioa dela diote: Logika erregelen multzo bat da, baina erregela hauen balioa pentsamendu matematikoan *a posteriori* ematen da, pentsamendu matematikoaren aurkikuntza da. Honek ez du argitzen Logika klasikoaren erregelei eginiko kritika, egiazkotzat jotzen baitira, nola ez, arrazoibide matematiko klasikoan. Berezitasuna matematikari buruzko ikuspegian dago. Matematika lehena izanik, hemen eginiko aldaketek Logikan ere eraginik izango dute.

Zein da, orduan, matematikari buruzko intuizionisten ikuspegia?

- Zenbakiak adimen eraikuntzak dira, matematika adimen jarduera den bezala. Horrela, formalismo matematikoak ez dira beharrezkoak, erabilgarriak soilik adimenezkoa den matematika erreala komunikatzeko.

- Eraikigarriak diren entitate matematikoak bakarrik onartzen dira. Ez dira, ondorioz eraikigarri ez diren osotasun infinituak onartzen (ez baitira existitzen). Baieztapen matematikoen froga konstruktiboak onartzen dira soilik, adibidez, ezaugarriren bat duen zenbaki bat existitzen da baldin ezaugarri hori duen zenbakia eraikigarria bada.

Ondorio gisa, zera dugu: matematika klasikoa ez da onargarria bere osotasunean eta murrizketa honek logikan bere eragina izango du, hala nola, printzipio batzuk ez dira unibertsalki baliozkoak izango.

Hirugarrena Baztertze Printzipioari arreta gehiegi eskaintzeak matematikaren oinarriei buruz Formalismo eta Intuizionismoaren artean izandako eztabaida ahaztera eraman gaitzake. Intuizionismoaren logika Brouwerekin hasten da eta honen lehen teoremaren frogarekin: $\neg\phi \leftrightarrow \neg\neg\neg\phi$. Intuizionismoaren logika bere izaera formalean kontsideratzen duten lehen matematikariak Glivenko [25] eta Kolmogorov [26] dira.

Heytingek era independente batez Predikatuen logika intuizionistaren formalizazio bat aurkezten du eta honekin batera aritmetikaren oinarrizko teoriarena eta multzoen teoriarena (Heyting 1930) [27]. Heyting (1934) lanak *proof-interpretation* bezala ezagutzen dena aurkeztu zuen[28]. Funtsean Brouwerren asmoetara itzultzen da: matematikako enuntziatu baten egia froga batez adierazten da eta ondorioz, konektagailu logikoen esanahia froga edo

[25] Proposamenen logikaren zati bat aurkezten du.
[26] Predikatuen zati bat aurkezten du.
[27] Ikus Troelstra (1990), intuizionismoaren historiarako.
[28] Ikus Heyting (1956, VII. Kap.).

eraikuntzen bitartez azaldu beharra dago (frogak eraikuntza mota bat dira). Adibidez: $\phi \rightarrow \psi$ adierazpenaren froga ϕ-ren froga guztiak ψ-ren frogetan bihurtzen duen eraikuntza bat da.

Antzekotasunak ere ikusi dira logika intuizionista eta topologiaren itxiera eragiketaren artean eta interpretazio topologikoen artean Beth eta Kripkerenak dira ezagunenak. Gentzen (1934) lanak bide berri bat ireki zuen Dedukzio Naturalaren metodoarekin non konektagailu intuizionisten esanahia egokiago harrapatzen den Hilbert erako formalizazioetan baino (axiomatizazioak). Honen aplikazioa Prawitz (1965) liburuan ikus daiteke. 30. hamarkadan lehenengo emaitza metalogikoak argitaratzen dira independenteki Gödel eta Gentzenen eskutik non predikatuen logika intuizionistaren zati batean predikatuen logika klasikoaren itzulpena eskaintzen den. Lan hauek garatu egiten dira Glivenko (1929) eta Gödel (1932) artikuluetan. Azken honetan Logika intuizionista eta S4 modalaren arteko loturak ere aztertzen dira. Kleene (1952 eta 1945) lanek aritmetika intuizionistaren interpretazio eraginkorra (efektiboa) proposatzen dute. 1956. urtean Bethek oinarrizko semantika berri bat aurkeztu zuen, Kripke (1963) lanak berrinterpretatzen duena.

PLI Hizkuntza formalak, logika klasikoaren sintaxia du

(a) Alfabetoa, $\mathrm{A} = \{\mathrm{A}_1, A_2, A_3\}, non$

$A_1 = \{p, p_1, p_2, p_3, ..., q, q_1, q_2, q_3, ..., r, r_1, r_2, r_3, ...\}$, proposizio aldagaien azpimultzoa den,

$A_2 = \{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge\}$, konektagailuen azpimultzoa den, eta

$A_3 = \{(,)\}$, adierazle grafikoen multzoa den.

(b) $\mathrm{AOF} = \{\alpha : \alpha$ adierazpen ongi formatua den$\}$

Errekurtsiboki definitzen dugu adierazpen ongi formatuen multzoa ondoko **formazio erregelen** arabera:

(a) A_1-eko sinbolo guztiak formulak dira.
(b) Baldin X formula bada, orduan $(\neg X)$ formula da.
(c) Baldin X eta Y formulak badira, orduan $(X \rightarrow Y)$, $(X \vee Y)$ eta $(X \wedge Y)$ formulak dira.
(d) Formulak aurreko erregelen aplikazio finitutik sortutako adierazpenak dira.

9.1 Semantika

Konektagailuen esanahi intuizionista. egia-funtzio klasikoek konektagailuen esanahia azaltzen dute, konektagailuei egia-baldintza ezberdinen araberako funtzio bat eskainiz. Adibidez, konjuntzioaren egia-funtzioak konjuntzioaren bidez eraikitako adierazpenen egibaldintzak zehazten ditu. Egiaren kontzeptua frogagarritasuna kontzeptuak ordezkatzen badu, konjuntzio bat noiz den frogagarri zehaztu beharko dugu, hau da, froga-baldintza ezberdinen araberako funtzioa eskainiz.

Intuizionismoaren arabera, soilik frogatua dagoena da. Badena berme osoarekin baiezta daitekeenez, froga-baldintzen ordez adierazpen baten baieztagarritasun bermatuaren baldintzak (b-baldintzak, hemendik aurrera) hartuko dira irizpide (*warranted assertablility conditions*).

Ikusitakoaren arabera baldintza hauek denborarekin alda daitezke. Errealitate platonikoa mugiezina eta egonkorra den bitartean, errealitate intuizionista dinamikoa eta aldakorra da froga edo errefuxapen eraikuntza berrien arabera.

Berme edo garantiarekin baieztagarria dena momentu batean gure informazioaren menpe dago eta ez da aldatuko gure informazioa aldatzen ez den bitartean, baina b-baieztagarria ez dena b-baieztagarria bihur daiteke frogaren bat aurkitu eta eraikitzen badugu. Zehazkiago esanik, konektagailuen esanahia informazio egoerekiko azaldu beharko dugu, informazio egoera horiekiko erlatibizaturik.

Bitez δ eta δ' nahi bezala emandako bi informazio egoera.

10. Definizioa: *δ' informazio egoera δ informazio egoeraren garapena dela diogu baldin eta soilik baldin δ-n b-baieztagarria den guztia δ'-n ere b-baieztagarria bada.*

11. Definizioa: *δ informazio egoera δ informazio egoeraren garapen propioa dela diogu baldin eta soilik baldin δ'-n b-baieztagarria den enuntziaturik bada guztia δ-n b-baieztagarria ez dena.*

Ikus ditzagun orain konjuntzio eta disjuntzioari intuizionistek eskaintzen dizkieten esanahiak:

- (Def. $\wedge$): $X \wedge Y$ formako enuntziatu bat b-baieztagarria da δ informazio egoera batean baldin eta soilik baldin X b-baieztagarria bada δ-n eta Y b-baieztagarria bada δ-n.

- (Def. $\vee$): $X \vee Y$ formako enuntziatu bat b-baieztagarria da δ informazio egoera batean baldin eta soilik baldin edo X b-baieztagarria bada δ-n edo Y b-baieztagarria bada δ-n edo metodorik bada nork δ δ'-ra garatzera permititzen digun non X edo Y b-baieztagarriak diren.

Klausula hauetan 'baldin eta soilik baldin' konektagailua erabili dugu. Metahizkuntzako konektagailua da. Nola interpreta daiteke hau? Bi aukera ditugu:

1.- Klasikotzat jotzen bada hizkuntza objektu intuizionista izango dugu metahizkuntza klasiko batean azaldua.

2.- Intuizionistatzat jotzen bada, konjuntzio eta disjuntzio intuizionisten funtzioan definitu beharko dugu.

Honen aurka argudia daiteke orduan ez gaudela konstante logiko baten esanahia azaltzen ari. Baina argudio berdina erabil daiteke logika klasikoaren aurka[29].

(Def. $\vee$) klausulak azalpen batzuk eskatzen ditu ez baitu zehazki esaten disjuntzio bat b-baieztagarria dela baldin eta soilik baldin disjuntoren bat b-baieztagarria bada espero zitekeen moduan. Ikus dezagun hauxe adibide baten bidez: n zenbaki bakoitzarentzat *n zenbaki lehena da edo n konposatua da* b-baieztagarria da intuizionistentzat posiblea delako konputagailu bat programatzea zenbaki bat lehena den ala konposatua den erabakitzeko eta emaitza bat emango digulako baldin denbora eta espazio nahikoa eskaintzen badiogu. Baina konputazioa egin ez bada n zehatz batentzat orduan *n lehena da* ez da b-baieztagarria (konputagailuak aurki dezake konposatua dela) eta *n konposatua da* ez da, ezta ere, b-baieztagarria.

Bibaldintzatzailea klasikotzat joko dugunez, ukazioa eta baldintzatzailea geratzen zaizkigu. Intuizionistek zera esan nahi dute $p \rightarrow q$ adierazpenarekin: *p frogagarria bada, orduan q ere frogagarria dela ezagutzen dugu.* Noiz da beraz horrelako adierazpen bat b-baieztagarria? Bermekin egiteko metodo bat behar dugu egungo informazio egoeraren garapenek eskaintzen diguten p baieztatzeko berme guztiak, q baieztatzeko bermtane bihurtuko dituena. Matematikaren kasuan p-ren froga guztiak q-ren frogetan bihurtzen duen metodoa behar dugu. Adibidez, q p-tik deribagarria bada, orduan p-ren froga guztiei deribazio hori erantsiz lortuko genuke $p \rightarrow q$ adierazpenaren froga. Ondorioz:

- (Def. $\rightarrow$): $X \rightarrow Y$ formako enuntziatu bat b-baieztagarria da δ informazio-egoera batean baldin eta soilik baldin d-n ondoko berme errekonozigarria bada: baldin δ δ'-ra garaturik eta X-ren prozesu honetan, b-baieztagarria dena determinaturik dago garapenerako (etorkizunerako), baina b-baieztagarria ez dena, b-baieztagarria bihur daiteke informazio egoeraren garapenen batean.

[29] Esanahiaren aldaketari buruz ikus Dummett (1977) eta Haack (1974).

Ukazioaren kasua ere berezia da. Ezin dugu esan $\neg p$ b-baieztagarria dela δ-n baldin p b-baieztagarria ez bada δ-n. Goldbachen aierua ez da b-baieztagarria baina ezta ere bere ukazioa. Hau ere *errealitatearen eraikuntzaren* filosofian aurka joango litzateke: prozesu honetan, b-baieztagarria dena determinaturik dago garapenerako (etorkizunerako), baina b-baieztagarria ez dena, b-baieztagarria bihur daiteke informazio egoeraren garapenen batean.

Definizio klasikoak zera permitituko liguke: $\neg p$ b-baieztagarria izatetik ez izatera pasatzea eta honek sorkuntza-eraikuntzaren teoriaren aurka doa, *determinaturik dagoena betiko dago determinaturik* legearen aurka joango litzatekeelako. Ukazioaren esanahiak beraz horrelako zerbait esan beharko du: $\neg p$ betirako b-baieztagarria bada δ-n, orduan ez da δ-ren garapenik p b-baieztagarria egingo duenik.

- (Def. $\neg$): $\neg X$ formako enuntziatu bat b-baieztagarria da δ informazio egoera batean baldin eta soilik baldin errekonozigarria bada δ-ren inolako garapenik X b-baieztagarria bihurtuko duenik.

Matematikaren kasuan argi dago nola informazio egoera batek horrelako berme eskaini dezaken: baldin $X \rightarrow \perp$ badugu (non $\perp$-k, kontraesana esan nahi duen). Baina kasu enpirikoetan ez dago garbi, batez ere arazo kontingenteren batek X-ra iristera uzten ez digunean.

9.1.1 Mundu posibleen semantika.

Logika intuizionistaren semantika azaltzeko era asko badaude ere, modurik xinpleena Kripkek (1963) aurkeztu zuen. Logika klasikoan bezala, logika intuizionistan argumentu bat baliozkoa da —eta bere konklusioa premisen ondorio semantikoa dela diogu— baldin eta soilik baldin interpretazio guztietan non premisak *semantikoki egokiak* diren, konklusioa ere *semantikoki egokia*[30] da. Beste modu batera esanda, baldin eta soilik baldin ez bada interpretaziorik non premisak *semantikoki egokiak* izanik konklusioa *semantikoki egokia* ez den. Halere interpretazioak ezberdinak dira logika batean eta bestean. Logika intuizionistaren kasuan beharrezkoa zaigu b-baieztagarritasunaren definizioa informazio egoerekiko ematea eta, ondorioz, bereizi egin beharko dugu informazio egoeren artean (egungoa eta garapenak) ordena baten bitartez. Behar dugun ordena mota zuhaitz ordena (*tree-ordering*) da non egitura bat lortzen den nodo sustrai batekin (egungo informazio egoera) eta adarrek garapenak errepresentatzen duten. Bedi X multzo bat

[30] Egokitasun semantikoaz ari garenean, zera besterik ez dugu esan nahi, alegia, egia Logika Klasikoaren kasuan eta *b-baieztagarritasuna* Logika Intuizionistaren kasuan.

eta R X-ren definitutako erlazio bitarra, hau da, X-ko elementuen bikoteek osatutako multzoa: $R \subseteq X^2$

12. Definizioa: *R zuhaitz ordena da baldin eta soilik baldin:*

1. *R erreflexiboa, antisimetrikoa eta iragankorra da.*
2. *X-en bada α elementu bat R-minimala dena, hau da, $x \in X$ elementu guztientzat, αRx.*
3. *α ezik $x \in X$ elementu guztiek R-aurrekaria dute, hau da, $x \in X(\neq \alpha)$ guztientzat bada $y \in X$ hala nola*
   (a) yRx eta
   (b) ez da $z \in X$ elementurik yRz eta zRx betetzen duenik.
4. *$x \in X$ guztientzat R-adarbide bakarra dago x-tik α-ra doana, hau da, $x, y, z \in X$ guztientzat, baldin yRx eta zRx, orduan yRz ala zRy.*

Azken baldintza honek bereizten du zuhaitz ordena. Defini dezagun orain Proposizioen Logika Intuizionista hizkuntzarako interpretazioa.

13. Definizioa: *$I =< S, \leq, \alpha, \mathbf{ber} >$ egitura PLI Hizkuntzarako interpretazioa da non*

1. *S informazio egoeren multzo (ez-huts) bat den,*
2. *$\leq$, S-n definitutako zuhaitz ordena den,*
3. *α, S multzoko elementu $\leq$-minimala den, eta*
4. ***ber** funtzio bat den $\sigma \in S$ bakoitzari proposamenen aldagaien azpimultzo (agian hutsa) bat eskaintzen diena.*

Azken funtzio honek murrizketa bat du: $\sigma \leq \sigma'$ denean, $\mathbf{ber}(\sigma)$ $\mathbf{ber}(\sigma')$-ren azpimultzoa (ez propioa derrigor) da. Intuitiboki **ber** funtzioak informazio egoera bakoitzean zein proposamen diren b-baieztagarri zehazten du eta murriketak b-baieztagarria dena informazio egoera batean bere garapenetan ere b-baieztagarria izango dela garantizatzen digu.

Orain defini dezakegu interpretazio intuizionista batek proposamen bat zuzena noiz egiten duen. Proposamen zuzenak α informazio egoera minimalean b-baieztagarriak direnak dira baina gure definizioak edozein proposamenaren zuzentasuna azaldu beharko du eta baldintzatzaile eta ukazioen ebaluazioan α egoeraren garapenak ere kontuan izan beharko ditugu. X adierazpena b-baieztagarria da σ informazio egoeran, $\models_\sigma X$, baldin eta soilik baldin,

1. Baldin X adierazpena proposamen aldagaia bada, orduan $\models_\sigma X$ baldin eta soilik baldin $X \in \mathbf{ber}(\sigma)$

2. Baldin X adierazpena $(Y \wedge Z)$ formakoa bada, orduan $\models_\sigma X$ baldin eta soilik baldin $\models_\sigma Y$ eta $\models_\sigma Z$.

3. Baldin X adierazpena $(Y \vee Z)$ formakoa bada, orduan $\models_\sigma X$ baldin eta soilik baldin $\models_\sigma Y$ edo $\models_\sigma Z$.

4. Baldin X adierazpena $(Y \rightarrow Z)$ formakoa bada, orduan $\models_\sigma X$ baldin eta soilik baldin $\sigma \leq \sigma'$ diren σ'guztientzat, baldin $\models_\sigma Y$ orduan $\models_\sigma Z$.

5. Baldin X adierazpena $(\neg Y)$ formakoa bada, orduan $\models_\sigma X$ baldin eta soilik baldin $\sigma \leq \sigma'$ diren σ' guztientzat, $\not\models_\sigma X$

Eta azkenik,

Bitez $I = < S, \leq, \alpha, \mathbf{ber} >$ nahi bezala emandako interpretazio intuizionista eta φ, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ PLI hizkuntzako nahi bezala emandako formulak.

14. Definizioa: *φ b-baieztagarria da I-n baldin eta soilik baldin $\models_\alpha \varphi$.*

15. Definizioa: *$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ baldin eta soilik baldin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ b-baieztagarriak diren I guztietan φ ere b-baieztagarria bada. Beraz, ez bada I interpretaziorik $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ b-baieztagarriak eginik φ b-baieztagarria egiten ez duenik.*

10 Logika Ez -Monotonoa

Lehen Mailako Logika, logika deduktiboa da, proposatzen duen frogagarritasun erlazioa dedukzioa da edo, horrela nahi bada, formalizatzen duen arrazoibide mota dedukzioa da. Hauxe da logika batek bete behar duen zeregina, ondoriotasun erlazio bat definitzea eta Lehen Mailako Logikak ondo baino hobeto betetzen du bere lana. Ondoriotasun erlazioek bi ikuspegitik begira daitezke sintaxia edo frogaren ikuspuntutik, eta baita ere, semantika edo ereduen teoriaren ikuspuntutik.

Dedukzioa *monotonoa* da, "aspergarria": behin ondorio bat aterata, betirako balio du. Berdin da zein premisa berri kontsideratzen ditugu, betirako izango dugu baliozkoa hasieran ateratako ondorioa. Hau da, premisa berriak jokoan sartzen diren neurrian, atera daiteken ondorioen multzoa geroz eta handiagoa da: gero eta ondorio gehiago ditugu eta inoiz ez da aurreko ondoriorik baztertzen edo ukatzen. Propietate honi deitzen zaio monotonotasuna, ondorioen multzoa monotonoki handitzen da premisen multzoa handitzen den neurrian. Logika bat monotonoa dela diogu baldin eta soilik baldin bere frogagarritasun erlazioak, $\vdash$ erlazioak, ondorengo propietatea asetzen badu: Σ eta Σ' edozein premisen multzoetarako, baldin $\Sigma \subseteq \Sigma'$ orduan $\{A : \Sigma \vdash A\} \subseteq \{A : \Sigma' \vdash A\}$. Semantikoki ere defini daiteke monotonotasuna. Finean, Lehen Mailako Logikaz ari bagara, osoa eta zuzena den sistema batez ari gara eta, ondorioz, sintaxia eta semantika parekatzen dituen sistema batez ari gara: teoremak baliozko formulak dira eta baliozko formulak teoremak dira.

1970etik aurrera, Adimen Artifizialaren ikerketen inguruan logika ez-monotonoak edo formalismo ez-monotonoak sortu ziren. Jokabide adimentsuaren bikoizketaren edo simulazioaren bidean, eguneroko zereginetan erabakiak hartzeko moduak aztertu behar dira. Hau da, nola funtzionatzen dugun, nola moldatzen garen gure bizitza arruntan mundu eta errealitate konplexu honetan. Jokabide adimentsuaren ezaugarri nagusienetako bat omen da, dakigunaren edo dugun informazioaren arabera jokatzea. Jokatzea, erabakiak hartzea, zerbait egitea eta ez geldirik geratzea. Dakiguna asko bada ere, ezin dugu guztia jakin eta, ondorioz, gehienetan (beti?) dugun informazioaren oinarrian eta ez dugun informazioaren arabera hartzen ditugu erabakiak. Eguneroko arrazoibideak ondorengo erregelen bitartez emanak dira askotan: P emanik, Q ondorioztatu besterik adierazi ezean. Labur bada ere, hemen ondorengo logika ez-monotonoak aurkeztuko ditugu: gabezi-logika (Reiter 1980), logika ez-monotonoa (McDermott eta Doyle 1980) eta zirkunskripzioa (McCarthy 1980) dira hauetatik garrantzitsuenak. Ondoren aurkeztuko ditugu.

10.1 Logika modal ez-monotonoa

Hainbat formalismoei egiten die erreferentzia termino honek, logika modalaren gainean eraikitako formalismo ez-monotono guztiei. Ideia nahiko xinplea da. Gure hizkuntza formalak adierazi behar du, modu batera edo bestera, erabiltzen ari garen informazioa ez dela guztia baina bai guk daukagun guztia, eta honen arabera ateratzen ditugula ondorioak. Logika modalak lehen mailako logika hedatuz, eragileak erabiltzea permititzen digu eta hauek modu ezberdinetara interpreta daitezke. Hasierako Logika modal ez-monotonoek proposatu zuten “kontsistentea da” nozioa logikan sartzea, hau da, hegaztiek hegan egiten dutela dioen erregela horrela irakurriko genuke: edozein objektuarentzat, hegaztia bada eta hauxe kontsistentea bada hegan egiten duela esatearekin, orduan hegan egiten du. Kontsistentziak, hemen, esanahi berezia du: ez da aurkako informaziorik edo ez da besterik adierazi.

Gogoratu logika monotonoen arazoetako bat ondorioen iraunkortasuna zela. Behin ondorio bat aterata, ezin genuen ukatu. Beraz logika ez-monotono batek lortu behar duena hauxe da, ondorio baten aurkako informazio berria lortzen badugu, ondorio hori blokeatzea, ezinezkoa bihurtzea. Eta lortzen da. Demagun aurreko informazioaz gain, esaten digutela Piolin pinguinoa dela. Beraz, pinguinoei buruzko erregela kontsideratuz, Piolinek ez du hegan egiten. Azken honek hausten du goiko erregelak eskatzen zuen kontsistentzia eta ondorioz ezin dugu Piolinek hegan egiten duela ondorioztatu.

$(1)\ \forall x.hegazti(x) \wedge \Box hegan(x) \rightarrow hegan(x)$
$(2) hegazti(Piolin)$
$(3) hegazti(Piolin) \wedge \Box hegan(Piolin) \rightarrow hegan(Piolin) \quad (\mathbf{Part.(1)-(2)})$
$(4) \Box hegan(Piolin) \quad (\neg \mathbf{hegan(Piolin)}\ \mathit{ez\ dagoelako})$
$(5) hegazti(Piolin) \wedge \Box hegan(Piolin) \quad \mathbf{(3) eta (4)}$
$(6) hegan(Piolin) \quad \mathbf{MP(5)-(3)}$

Informazio gehiago lortzen dugunean,

$(1)\ \forall x.hegazti(x) \wedge \Box hegan(x) \rightarrow hegan(x)$
$(2) \forall x.pinguino(x) \rightarrow \neg hegan(x)$
$(3) hegazti(Piolin)$
$(4) pinguino(Piolin)$
$(5) hegazti(Piolin) \wedge \Box hegan(Piolin) \rightarrow hegan(Piolin) \quad (\mathbf{Part.(1)-(3)})$
$(6) pinguino(Piolin) \rightarrow \neg hegan(Piolin) \quad (\mathbf{Part.(2)-(4)})$
$(7) \neg hegan(Piolin) \quad (\mathbf{MP(4)-(2)})$
$(8) \neg \Box hegan(Piolin) \quad (\neg \mathbf{hegan(Piolin) dagoelako})$

Logika hauen arazoa semantikan dago. Kontuan izan "kontsistentzia" metakontzeptua, hizkuntza bateko adierazpenei aplikatzen zitzaiona, hizkuntza horretan bertan sartu dugula. Argitu beharko litzateke beraz zernolako kontzeptua, kontsistentzia dugun orain. Logika modal ez-monotonoen garapenen artean, McDermott eta Doylek (1980) aurkeztutakoaren ondotik, McDermotten (1982) lana eta Mooren logika (1984,1985), autoepistemikoa deitua, ditugu.

10.2 Gabezi-Logika

Logika hau Reiterek (1980) proposatutako aurkezpenean oinarritzen da. Adimen Artifizialeko arrazoitze era batzuk gabezi-arrazoiketak dira. Hauek, ondorioak ateratzeko prozesu hauek, "aurkako informazioaren gabezian ... asumitzen dut" ("besterik adierazi ezean ...") formako inferentzi eskemetan oinarritzen dira. Era honetako arrazoitze eskemek munduari buruz dugun informazioa osoa ez denean eta ondorioak atera behar ditugunean eskatzen den inferentzi plausiblearen forma bat errepresentatzen dute.

Ezagutzen dugun gehiena egiazkoa da salbuespen batzuk salbu. Horrelakoek "P gehienak Q dira" edo "P gehienek Q ezaugarria dute" forma hartzen dute ("Most birds fly except for penguins, ostriches ..."). Baina, nola errepresentatu "gehiengo"? Lehen Mailako errepresentazio forma naturalena salbuespen zerrendak adieraztea da:

$$\forall x.hegazti(x) \wedge \neg pinguino(x) \wedge \neg ostruka(x) \wedge \ldots \rightarrow hegan(x) \tag{6}$$

Baina honekin ezin dugu hegazti jakin batek hegaz egin dezakeenik esan. Honek gabeziazko forma bat eskatzen du. Nola interpreta daiteke? "Baldin x hegaztia bada, orduan aurkako informazioaren gabezian, x-ek hegaz egin dezakeela inferitzen dut" (edo antzeko zerbait) adierazi nahi badugu, arazoa "aurkako informazioaren gabezian" interpretatzerakoan sortzen da. Reiterek erabakitzen duen interpretazioa hauxe da: "hau kontsistentea da x-ek hegaz egin dezakeela asumitzearekin ". Beraz, "baldin x hegaztia bada, eta hau kontsistentea bada x hegaz egin dezakeela asumitzearekin, orduan x-ek hegaz egin dezakeela inferitzen dut ". Formalki:

$$\frac{hegaztia(x) : \mathbf{M}hegan(x)}{hegan(x)} \tag{7}$$

M eragilearen esanahia, "kontsistentea da ... asumitzearekin" da. Salbuespenak lehen mailako errepresentazio estandar batean ematen dira:

$$\begin{array}{c} \forall x.pinguino(x) \rightarrow \neg hegan(x) \\ \forall x.ostruka(x) \rightarrow \neg hegan(x) \\ \ldots \end{array}$$

(8)

Kontuan izan behar da $hegan(Piolin)$ inferitzen badugu, orduan asertzio honek uste baten estatusa izango duela. Berrinterpreta dezakegu orduan

(1) erregela hau esanez: "baldin x hegaztia bada eta x-ek hegaz egin dezakeela ustearekin kontsistentea bada, orduan batek x-ek hegaz egin dezakeela usterik izango du". Zein da kontsistentzia nozioa gabezi-erregelei aplikatzen diegunean? Intuitiboki, kontsistentzi nozioa, uste eta munduari buruzko lehen mailako gertaera guztiekiko gabezi-erregela guztiak santzionatuko duen nozio bezala ulertzen da. Dena den, aurrerago aurkeztuko da sakonago kontsistentzi nozioa.

Gabeziazko arrazoibidea formalizatzen saiatzen den edozein logikak ez-monotonoa beharko du izan. Honen zergatia ikusteko nahikoa dugu teoria xinple bat kontsideratu gabezi-erregela bakarrarekin:

$$\frac{:\mathrm{M}A}{B} \tag{9}$$

Beraz, B egiazkotzat joko dugu. Baina eta ondoren baldin $\neg A$ egiazkoa deskubritzen bada, behaketa baten ondorioz adibidez, orduan teoria berria dugu non B uste ezina suertatzen zaigun. Hau da, gabeziazko arrazoibidea formalizatzea helburutzat duen logika batek beharrezkoak izango ditu mekanismoren batzuk informazio berriaren aurrean usteak birkontsideratzea permitituko dituztenak.

Gabeziak, beraz, metaerregela bezalako funtzioak dira, eta aldi berean, teoria ez-oso hauen hedapenak eraikitzeko modua finkatzen duten instrukzioak. Gabeziazko erregela batez santzionatutako formula batek teoria hedatzen du eta ikus daiteke munduari buruzko uste bat bezala. Orokorrean eta aplikapenaren arabera, badira teoria bat hedatzeko modu ezberdinak. Honek gabezi-erregelak ez-deterministak direla iradokitzen du. Gabeziak lehen mailako teoria bat hedatzeko erregelak direla da Reiterek onartzen duen ikuspegia, eta honetan oinarritzen du bere eraiketa osoa.

10.3 Zirkunskripzioa

Informazio ez-osoaren arazoa tratatzeko erarik erabiliena Adimen Artifizialeko programetan CWA-n oinarritzen da: A deribatzerik ez badago, $\neg A$ inferitu. Predikatu Zirkunskripzioa asuntzio honetarako formalizazio bat dugu McCarthy-k aurkeztua (1980). Formalki, lehen mailako frogaren teoria ordezkatzen duen axioma eskema batean gauzatzen da zirkunskripzioa.

Pertsona edo programa batek ondorioak ateratzeko erabil dezaken konjetura-erregela bat dugu zirkunskripzioa. Hau da, A gertaera batzuetaz arrazoituz P propietate bat betetzen duten objektuak P asetzen duten objektu guztiak dira. Orokorrean, zirkunskripzioa erabil daiteke ondokoa konjeturatzeko, alegia, $P(x, y, ..., z)$ erlazioa asetzen duten $< x, y, ..., z >$ tuplek P

erlazioa betetzen duten tupla guztiak dira. Ondorioz, zirkunskribatu egiten ditugu errelebanteak diren tuplak edo errelebantea den tuplen multzoa.

A gertaeren multzo bati zirkunskripzioa aplikatzearen emaitza enuntziatu eskema bat da, alegia, A-ko enuntziatuetatik jarraitzen diren gertaerak asetzen dituzten tuplak dira, $P(x, y, ..., z)$ predikatua asetzen duten tupla bakarrak. A-ri enuntziatu gehiago gehitzen diogun neurrian, P tupla gehiagora aplikatzerik izango dugu; eta, beraz, zirkunskripzioa ez-monotonoa izango da. Zirkunskripzioa erabiliz lortzen diren ondorioak konjeturak dira non A-k gertaera errelebante guztiak ditu eta A-tik jarraitzen diren objektuak objektu errelebante guztiak diren.

Bedi A lehen mailakoenuntziatu bat $P(x, y, ..., z)$ barne duena. (Notazioa: $P(\overline{x})).A(\Phi)$ idatziko dugu A-n P-ren okurrentzi guztiak Φ predikatuarengatik aldatu ondoren lortzen den formula adierazteko.

16. Definizioa: *P-ren zirkunskripzioa $A(P)$-n ondorengo enuntziatu eskema da:*

$$\{A(\Phi) \wedge \forall x.(\Phi(x) \rightarrow P(x))\} \rightarrow \forall x.(P(x) \rightarrow \Phi(x)). \qquad (10)$$

A enuntziatuak suposatzen dituenak P asetzen duten x tupla bakarrak direla afirmatzen du (10) enuntziatu eskemak. (10)-k Φ predikatu-parametro bat du, eta, honen ordez, predikatu adierazpen edozein jar dezakegu. (Bigarren Mailako Logika erabiltzen badugu $\forall\Phi$ besterik ez dugu jarri behar (10)-en aurretik). Baina (10) baldintza bat da, bere konektagailu nagusia baldintzatzaile bat da; eta, beraz, ezkerreko konjuntzioa asumituz, $A(\Phi)$-k, Φ-k P-k asetzen dituen baldintzak asetzen dituela asumitzen dugula adierazten du. Bigarrenak, $\forall x.(\Phi(x) \rightarrow P(x))$-k beste asuntzio bat adierazten du, alegia, Φ asetzen duten entitateek P asetzen duten azpimultzo bat osatzen dutela. Ondorioak bigarren konjunktuaren konbertsua adierazten du zeren Φ eta P berdinak izan behar baitira.

$A \vdash_P q$ idazten dugu baldin q enuntziatua P predikatua A-n zirkunskribatzearen emaitzatik dedukzioaren bidez lor badaiteke. $\vdash_P$ inferentzi forma ez-monotonoa denez, inferentzi zirkunskriptiboa deituko diogu. Orokorrean, P eta Q bi predikatu izanik, $A(P, Q)$-n zirkunskribatzen dira jarraian ematen den bezala:

$$A(\Phi, \Psi) \wedge \forall x.[\Phi(x) \rightarrow P(x)] \wedge \forall y.[\Psi(y) \rightarrow Q(y)] \\ \rightarrow \forall x.[P(x) \rightarrow \Phi(x)] \wedge \forall y.[Q(y) \rightarrow \Psi(y)].$$

Hauxe da McCarthyren proposamen originala. Ondoren beste bertsio batzuk garatu ziren. Adibidez, McCarthy (1986) lanean deskribatzen den zirkunskripzioaren formak xinpleagoa den “inferentzi minimala”ren bertsio bat orokortzen du. Inferentzi minimalak ondoriotasun minimala deitutako semantika bat du. Ideia orokorra hauxe da: A axioma batek q ondoriotzen du, $A \models_m q$, baldin q egiazkoa bada A-ren eredu minimal guztietan, non eredu bat beste bat baino “txikiago” kontsideratzen den baldin unibertso berdinak badituzte eta handiaren domeinuak txikienak ez dituen elementuak baditu. Forma honi domeinu zirkunskripzioa deitzen zaio.

Errefentziak

Ackermann, W. (1956), Begrundung einer strengen Implikation. *Journal of Symbolic Logic* **21** (1956):113-128.

Barwise, J. (1989), *The Situation in Logic.* CSLI Lecture Notes No. 17. CSLI Publications, Stanford University, 1989.

Bochvar, D.A. (1939), On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of contradictions (Russian). *Matématicéskij sbornik* **4** (1939): 287-308.

Brouwer, L.E.J. (1907), *Over de Grondsladen der Wiskunde.* PhD thesis, Amsterdam, 1907. Ingeles. itzul. *On the Foundations of Mathematics*, in A. Heyting (ed.) 1975, vol. 1, 11-101 or.

Chellas, B.F. (1980), *Modal Logic: an introduction.* Cambridge University Press, Cambridge.

Church, A. (1956), *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton: Harvard University Press.

Cresswell, M.J. (1972), Intensional Logics and Logical Truth. *Journal of Philosophical Logic* **1**(1972): 2-15.

De Morgan, A. (1847), *Formal Logic, or the Calculus of Inference, Necessary and Probable.* London.

Dummett, M.A.E. (1977) *Elements of Intuitionism.* Oxford: Clarendon Press, 1977.

Fitting, M. (1966), *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing.* Amsterdam: North Holland, 1966.

Frege, G. (1879), *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (’Concept Notation, a formal language of pure thought, modelled upon that of arithmetic’), Halle a. S., 1879. Beste arg. *History and Philosophy of Logic* **17** (1996):1-19.

Frege, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (‘The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematcial enquiry into the concept of number’), Breslau, 1884.

Gentzen, G. (1934/35), Untersuchungen úber das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39** (1934/35): 176-210; 405-431.

Geymonat, L. (ed.)(1971), *Storia del pensiero filosofico e scientfico. Volume ottavo: Il Novecento (2).* Gazt. Itzul. E. Trias (zuz.), *Historia del pensamiento filosofico y cientifico. Siglo XX (II).* Barcelona, Ariel. 1985.

Glivenko, V. (1929), Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Academie Royale de Belgique* **15** (1929):183–188.

Goble, L. (2001), *The Blackwell guide to Philosophical Logic.* Oxford: Blackwell.

Gödel, K. (1932), Zurm intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* **69** (1932): 65–66.

Haack, S. (1974), *Deviant Logic.* Cambridge: Cambridge University Press.

Haack, S. (1978), *Philosophy of Logics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Halpern, J.Y. (1995), Reasoning About Knowledge: A Survey. In D.M. Gabbay et al. (arg.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. IV: Epistemic and Temporal Reasoning.* Oxford: Clarendon Press, 1995, 1-34 or.

Halpern, J.Y. and Y. Moses, (1992), A Guide to Completeness and complexity for Modal Logics of Knowledge and Belief. *Artificial Intelligence* **54** (1992): 319-379.

Heyting, A. (1930), Die Formalen Regeln der Intuitionistischen Logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften* (1930): 42-56.

Heyting, A. (1956), *Intuitionism. An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

Heyting, A. (arg.) (1975), *L.E.J. Brouwer: Collected Works I.* Amsterdam: North Holland.

Hintikka, J. (1962), *Knowledge and Belief.* Cornell University Press, Cornell.

Hintikka, J. (1968), Epistemic Logic and the Methods of Philosphical Analysis. *Australasian Journal of Philosophy* **46** (1968): 37-51.

Hocutt, M.O. (1972), Is Epistemic Logic Possible? *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13** (1972): 433-453.

Hodges, W. (2001), Classical Logic I: First-Order Logic. Goble, L. (2001): 9-32.

Hughes, G. E. and M. J. Cresswell (1968), *An Introduction to Modal Logic.* Methuen, 1968.

Kant, I. (1781), *Crítica de la Razón Pura.* Madrid: Alfaguara, 1978. P. Ribasen gazt. itz.

Kleene, S.C. (1938), On notation for ordinal numbers. *Journal of Symbolic Logic* **3** (1938): 150-155.

Kleene, S. (1945), On the Interpretation of Intuitionistic Number Theory. *Journal of Symbolic Logic* **10** (1945) 109-124.

Kleene, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics.* Amsterdam: Van Nostrand.

Kneale, W. and M. Kneale (1962), *The Development of Logic.* Oxford: Oxford University Press.

Kolmogorov, A.N. (1932), Zur Deutung der Intuitionistischen Logic. *Mathematische Zeitschrift* **35**(1932): 58-65.

Kripke, S.A. (1963), Semantical Considerations on Modal Logic. *Acta Philosophica-Fennica* **16** (1963): 83-94.

Leblanc, H. (1984), A New Semantics for First-Order Logic, Multivalent and Mostly Intensional. *Topoi* **3 (1)**.

Lemmon, E.J. (1967), If I know do I know that I know?. In A. Stroll (arg.), *Epistemology.* New York: Harper & Row, 1967. 54-82 or.

Lenzen, W. (1978), Recent works in Epistemic Logic. *Acta Philosophica Fennica* **XXX** (1978). Special Issue.

Lewis, C.I. (1918), *A Survey Of Symbolic Logic.* Berkeley: The University Of California Press, 1918.

Lukasiewicz, J. (1930), Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* **23** (1930):51–77. Ingeles. itzul. Lukasiewicz, J. (1970): 153–178.

Lukasiewicz, J. (1970), *Selected Works.* ed. L. Borkowski. Amsterdam: North-Holland, 1970.

Mangione, C. (1971), La Lógica en el siglo XX. Geymonat, L. (ed.) (1971): 202-421.

McCall, S. (1967), *Polish Logic.* Oxford: Oxford University Press.

McCarthy, J. (1980), Circumscription - A form of Non-monotonic Reasoning. *Artificial Intelligence* **13**(1980): 27-39.

McCarthy, J. (1986), Applications of Circumscription to formalizing common-sense knowledge. *Artificial Intelligence* **28**(1986): 89- 116.

McDermott, D. (1982), Non-monotonic logic II. *Journal of the ACM* **29** (1982): 33-57.

McDermott, D. and J. Doyle (1980), Non-monotonic logic I. *Artificial Intelligence* **13**(1980): 41-72.

Moore, R.C. (1984), Possible-world semantic for autoepistemic logic. *Proceedings Workshop on Non-Monotonic Reasoning.* Mohouk, Mountain House, New Paltz, New York, 1985, 344-354.

Moore, R.C. (1985), Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic. *Artificial Intelligence* **25**(1985): 75-94.

Newton-Smith, W.H. (1985), *Logic.* Routledge & Kegan Paul PLC (July 1985)

O'Connor, D.J. (1968), Beliefs, Dispositions, and Actions. *Proceedings of the Aristotelian Society* **69** (1968): 1-16.

Peña, L. (1994), *Introducción a las lógicas no clásicas.* México: UNAM, 1994.

Post, E. (1921), Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics* **43** (1921):163–185.

Prawitz, D. (1965), *Natural Deduction. A Proof Theoretical Study.* Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1965.

Prior, A.N. (1955), *Formal Logic.* Oxford: Clarendon Press, 2nd Ed. 1962.

Quine, W.V. (1970), *Philosophy of Logic.* Second edition, Cambridge: Harvard University Press, 1986.

Reiter, R. (1980), A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence* **13**(1980): 81-132.

Anderson, A.R. and N.D. Belnap, Jr. (1975), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Princeton, Princeton University Press, Volume I.

Rescher, N. (1969), *Many-valued Logic.* McGraw-Hill. New York.

Ryle, G. (1949), *The Concept of Mind.* London, Hutchinson.

Sainsbury, M. (1991), *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic.* Oxford: Basil Blackwell.

Troelstra, A.S. (1990), On the early history of intuitionistic logic. In: P.P. Petkov (arg.), *Mathematical Logic*, Plenum Press, New York and London, 3–17.

van Dalen, D. (1986), Intuitionistic Logic. In Gabbay, D.; and F. Guenthner (eds) 1986, 225–239. or.

von Wright, G. H. (1951), Deontic Logic, *Mind* **60** (1951):1-15.

Whitehead, A. N. and B. Russell (1910, 1912, 1913), *Principia Mathematica*, 3 vols, Cambridge: Cambridge University Press. Second edition, 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2, 3). Abridged as *Principia Mathematica to *56*, Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

Wittgenstein, L. (1921), Logisch-Philosophische Abhandlung, *Annalen der Naturphilosophie,* **14** (1921). Euskarazko itzul. J.L. Alvarez, *Tractatus Logico-Philosophicus.* UPV/EHU, 1990.

Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy Sets. *Information and Control* **8** (1965): 338-353.

Zinov'ev, A.A. (1963), *Philosophical Problems of Many-Valued Logic.* Dordrech: D. Reidel.