Kategoriak analogia matematikorako

ENETZ EZENARRO

ILCLI & Ekonomia Aplikatua III saila
(UPV/EHU)

(Categories for mathematical analogy)

Abstract

Analogy in Mathematics has to be taken from a triple point of view: Conceptual analogy, analogical reasoning, and analogy-based approaches to generalisation in some relevant mathematical fields. My basic point in this short notice is that Category Theory can play an important role in defining that idea of analogy, and therefore in providing new ideas and methods for the construction of a more unified conception of Mathematics.

Keywords: *Category Theory, functor, analogy, reasoning, generalisation, unification*

Ohar honetan ez dut Kategorien Teoriaren oinarririk adieraziko, ezta teoria horren balio fundatzailerik aztertuko matematikaren oinarriei gagozkiela. Helburua beste hau da: matematikaren arlo ezberdinetan arrazonamendu analogikoak hartzen duen eginkizuna gogoan izanda, Kategorien Teoriak bideratzen duen funktoreei buruzko kontzepzioa horren harira eztabaidatzea.

Hiztegi on bat kontsultatzen bada (esaterako, *Cambridge International Dictionary of English*), analogia aurkezten zaigu bi objektuen arteko erlazio moduan, bi objektu horiek antzekoak badira ezaugarri batzuk batera dituztelako. Arazoa da antzekotasun terminoarekin zer ulertzen dugun argitzea, ahal bada modu formal batez. Modu ez formal batez egiteak nahasmendurako arriskua du, Erdi Aroko filosofian sarritan gertatu zenak erakusten digunez.

Konparazioa eta analogia ezagutza jasotzeko prozesuaren bi aspektu oinarrizkoak dira, inola ere. Bereziki ezagutza matematikoari dagokionean. Matematika ereduen/egituren zientzia bezala definitu izan da sarritan, nahiz eta eredu bat zer den argitzea ez den kontu erraza. Garbi dago, hala ere, ereduak sailkatzeko eta bata bestetik bereizteko objektuen arteko konparaketan oinarritzen garela: objektu matematikoen ezaugarri konkretuak konparatzen ditugu, eta jakineko ezaugarri batzuk (eredua definitzen dutenak) konpartitzen dituzten objektuak baliokidetzat hartzen ditugu eta klase berberaren barruan sailkatzen (antzeko triangeluak, taldeak, espazio euklidearrak,…). Are gehiago, Kleinek (1872, 1893) bere garaiko geometria ezberdinak sailkatzeko asmoarekin martxan jarritako *Erlangen* programan esaten zuenez, aztertu nahi den klasearen izaera, bertako objektuek hortik kanpora atera gabe eduki ditzaketen transformazio onargarriek definitzen dute. Eta horrela geometria proiektiboa hartu zuen oinarri bateratzaile gisa.

Analogia ez da konparazio hutsa, konparaziotik abiatzen bada ere. Analogiak konparatzen diren egituren arteko «paralelotasun» konsistente bat topatzea du helburu, eta prozesu gisa ikusita arrazonamendu analogikoa beti da helburu jakin batzuetara bideratutakoa (Holyoak & Thagard 1995). Analogiaz hitz egiterakoan, nire ikuspuntutik hiru funtzio bereizi behar dira: kontzeptuen artekoa, metodoen artekoa eta bateragarritasunari dagokiona. Hiru funtzio hauek era egoki batez biltzen ditu Kategorien Teoriak hasiera beretik Kleinen programa zabaldu eta orokortu zuenean Eilenbergen eta Mac Lanen 1945eko artikulu ezaguna medio (*A general theory of natural equivalences*).

Kontzeptuen arteko analogia esplotatzen duen adibide ezagun bat, Eilenbergek eta Mac Lanek aipatutako artikulua argitaratu zutenean oso hurbilekoa zitzaien topologia algebraikorako kontzeptu kategorialen erabileran daukagu. Garai hartan oraindik zaila zen metodo kategorialez hitz egitea, Kategorien Teoriako oinarriak (kategoriak, funktoreak, transformazio naturalak) jartzen hasiak bazeuden ere, gerora azalduko baitziren teoria horretako elementu nagusiak, hala nola, funktore adjunktuak, Grothendiecken topoiak eta Lawvereren topoiak, horrela era bikoitz batean teoriaren oinarrietan sakonduz aldi berean logika algebraikoari eta logika geometrikoari bidea zabalduz. Adibidea sinplea da. Espazio topologikoen sailkapenaren auzia ebazteko espazio topologikoen kategoriatik taldeen kategoriara pasatzeko funktore egokia definitzen da eta azken kategoria honetan lortzen da, metodo algebraikoak erabilita, hasierako sailkapen arazoa ebaztea.

Analogia kontzeptualarekin hasita, analogiak bere indar guztia arrazonamenduan azaltzen du, berezia baita dedukzioarekin, indukzioarekin eta abdukzioarekin konparatuz. Arlo ezberdinen arteko analogia metodo nagusien analogiara pasatzen da, metodoak lehen itxura batean ezberdin samarrak izan arren funtsean berdin samarrak direlako, muinean metodo kategorial oinarrizkoak izanik (Marquis 2009). Jakina, situazio honen ondorioa goian aipatutako analogiaren hirugarren aspektua da: bateragarritasuna. Ez dago esan beharrik ez gaudela abstrakzio zentzugabe baten aurrean, antzekoen bateratze eta oinarritze uniforme baten aurrean baizik. Sarritan, Marquisek aipatzen duen moduan, teorema ezagun baten froga zail batean metodo kategorialak erabiltzen dira, zuzenean jakin gabe halaxe denik.

Horrela bada, hizkuntza aldaketa bat (objektuetatik funtzioetarakoa) baino suposatzen ez zuela eta matematikari askok Kategorien Teoria «*general abstract nonsense*» bezala kalifikatzen zuten hasierako urte haietatik gaur egunera bitartean, teoria honek bere lekua egin du matematikaren barruan, kontzeptu eta metodo interesgarri eta erabilgarriak eman dituen heinean, eta matematikariak egitura eta metodo hauen sakontasunaz jabetuz joan diren heinean.

Antzeko zerbait gertatu zen aurrez ere taldeen teoriarekin. Gaur egun argi dago taldeak matematikaren esparru asko eta askotan etengabe agertzen direla, eta agertzen diren bakoitzean situazioaren ezaugarri garrantzitsu eta sakoneko osagai kontzeptualak azaleratzen dituztela. Beste modu batera ezinezkoak edo behintzat luzeak eta ilunak liratekeen konputazioak ahalbidetzen dituzte (Galoisek ekuazio polinomikoen erradikalen bidezko soluzioak bilatzeko problemari emandako soluzio dotorea da horren lekukoa). Eta Kategorien sorrerako hasierako asmoa hori ez bazen ere, taldeek kategoria konkretu bat baino ez dute osatzen.

Kontzeptu eta metodo kategorialen esplotazioa dexente hedatuta dago gaur egun, bai matematikan eta baita honekin muga egiten duten beste zenbait esparrutan ere, konputazio zientziak edo fisika teorikoa, kasurako. Problema edo esparru jakin batek argitzea eskatzen duen tokietan bilatu ohi dute aplikazioa, sarritan. Matematikaren oinarri-oinarrizko kontzeptuak kontzeptu kategorialen kasu partikularrak izateak erakusten duena da situazio matematikoen ezaugarri klabeak jasotzeko balio duela teoria honek. Mac Lanek esaten zuen bezala, arazoaren muina non dagoen seinalatzen digu.

Sarritan gertatzen denez, hasiera batean oso esparru ezberdinak diruditenak kontzeptu kategorial abstraktu berera eramaten gaituela ikusteak matematikaren sakoneko batasun bat agerian uzten du. Badirudi funktoreek esparru matematiko ezberdinen arteko informazio fluxu bat bideratzen dutela, kontzeptu eta metodoen fluxu bat, esparru batean garatutakoa beste esparruetan eskuragarri egoteko balio duena, eta bide batez aipatutako matematikaren batasuna sendotzeko balio duena. Hala ere ez da beti posible izaten funktore egokiak aurkitzea, informazio fluxu hori nahieran bideratzeko. Matematikarientzako lan tresna bat da kategorien teoria.

Baina ez hori bakarrik, Mac Lanek bere *Mathematics: Form and Function* (1986) liburuan behin eta berriz erakutsitako matematikaren kartografia edo nolabaiteko grafo haiek zentzuz beterikoak zirela egiaztatu da, eta gainera Kategorien Teoriak parte ezberdinen arteko erlazioak argitzen dituen heinean grafoak osatuz joan daitezkeela. Eraikin matematikoa eta honen parte ezberdinen arteko erlazioak agerian jartzeak jardun matematikoa bera zertan den argitzeko balio dezake, matematika bere osotasunean zer den hobeto ulertzeko eta matematikaren filosofia egoki baterako, azken finean.

Labur bada ere ezin aipatu gabe laga eztabaida sortzaile izan den proposamena: multzoen teoria ez, kategorien teoria baizik izango litzateke matematikaren oinarri orokorrena. Bi bide jorratu arren, bata Kategorien Teoria axiomatikara eramanez eta bestea morfismo kontzeptua oinarri-oinarrizkotzat hartuta topoi bereziak eraikiz, ez batak eta ez besteak ez diote alternatibarik eskaini multzoen teoriari eta Hilbertek *Infinituaz* artikuluan1926an esandakoak indarrean segitzen du: «ez gaitu inork Cantorrek sortutako paradisutik kanporatuko». Areago axiomatika bat egiteak Kategorien Teoriarentzat kutsu erabat artifiziala du, ez baita multzoen teoriaren kasuan bezala premiak eragindako gauza. Bestaldetik, aritmetika elementala egiteko topoiak ez dira batere «naturalak» eta Lawvereren toposak barruan duen logika ez da klasikoa, intuizionista baizik.

Hasierako puntura itzuliz, hemen azpimarratu nahi dudana hauxe besterik ez da: analogia bere osotasunean gaur disziplina anitzetatik aztertzen den gaia da, bereziki zientzia kognitiboaren aldetik, adimen artifizialaren aldetik eta logikaren aldetik, eta azterketa horretan sakontzeak ikuspegi osoagoa eskainiko dio analogia matematikoa esaten zaionari; edonola ere, azterketa horretarako Kategorien Teoriak tresna egoki bat eskaintzen du goian azaldutako arrazoiak medio.

Erreferentziak

EILENBERG, SAMUEL and SAUNDERS MAC LANE (1945), «A general theory of natural equivalences». *Transactions of the American Mathematical Society* **58**: 231-294.

HILBERT, DAVID (1926), «Über das Unendliche». *Mathematische Annalen* **95**: 161-90.

HOLYOAK, KEITH J. and PAUL THAGARD (1995), *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

KLEIN, FELIX (1872,1893), «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen». *Mathematische Annalen* **43**: 63-100. English translation: «A comparative review of recent researches in geometry». *Bulletin of the American Mathematical Society* **2(10)**: 215-249.

MAC LANE, SAUNDERS (1986), *Mathematics: Form and Function*. New York: Springer.

MARQUIS, JEAN-PIERRE (2009), *From a Geometrical Point of View. A Study of the History and Philosophy of Category Theory*.