

# Matematikaren ikuspegi kategorioletik Gorpuztutako Matematikaren ikuspegira

ALAIN ULAZIA,  
ILCLI ETA JARIAKINEN MEKANIKAKO SAILA

UPV/EHU

## (From the categorical view of mathematics to the view of Embodied Mathematics)

### Abstract

*Saunders Mac Lane asked why mathematics has got the branches it has. The foundations of set theory do not explain properly the most important features of mathematical structure. We should not search on forms but on human activities and culture in order to explain that structure and its branches. In this way we can also answer why mathematics works so suitably in the understanding of reality: because it comes from the human activity in reality. Developing this view Lakoff and Nuñez have proposed a finer cognitive perspective of the issue, where mathematical reasoning is based in perceptual-motor and image schemas of the embodied mind. Thus Platonist philosophy of mathematics and its «dangerous consequences» are strongly attacked. I will finish this critical notice commenting some weaknesses of the view and the role diagrams play in connection with Embodied Mathematics.*

*Keywords:* Mac Lane, Embodied Mathematics, cognition, image schemas.

Matematikaren fundamentuen ikuspegirik zabalduenak matematika multzo teorian eta logikan oinarritzen dela dio. Baina badago ikuspegi alternatiborik. Kontzeptzio alternatibo interesgarrienetakoa Saunders Mac Lanena da, Ameriketako matematikari ospetsuenetakoa batena. Mac Lanen ustez talde teoriaripeko fundazioek giltzarria den galdera bat erantzun gabe uzten dute: *Zergatik dauzka matematikak dituen bezalako adarkadurak?*

Mac Lanek dioenez (1981), talde teoriaripeko fundazioek ez dute egokiro deskribatzen zeintzuk diren eraiki beharreko estruktura matematiko gailenak. Halako hainbat estruktura eraiki litezke *a priori* talde teoriatik abiatuta. Nola esplikatu, adibiderako, espazio topologikoaren edo espazio linealaren eredu aniztasuna? Kontzeptuon aukeraketa azaltzeko modurik ez dago.

Mac Lanentzat kuestio hau zentrala da matematikaren edozein fundazio ezartzeko. Ez da gainera galdera erraza. Ideia hau iradokitzen du balizko erantzunaren muinean: *ez dugu erantzuna soilik forma matematikoaren arabera bilatu behar, matematikak giza jardueretan eta kulturaren duen zeregina ere kontuan hartu behar dugu*. Matematikako adarren eta horien esturturen izaera ez dator talde teoriapeko eraikin maiz artifizial batetik, baizik eta horiek betiko giza jarduerekin eta ideia matematiko sinpleekin duten erlaziotik. Matematika ez da mundu platoniko ukiezin bat, jendearen ekinbide erreala iturritzat dituen sistema formal bat baizik. Matematika oro da, azken finean, fisika-matematika.

Ondorengo giza jardueren zerrenda ematen du Mac Lanek; bakoitzari matematika zati bat legokioke:

- kontzatzea: aritmetikari eta zenbaki teoriari.
- neurtzea: zenbaki errealei, kalkuluari, analisisari
- taxutzea: geometriari, topologiari
- eraikitzea: simetriari, talde teoriari
- begiz jotzea: probabilitateari, neurketa teoriari, estatistikari
- higitzea: mekanikari, kalkuluari, dinamikari
- kalkulatzeta: aljebrari, analisi numerikoari
- frogatzea: logikari
- elkartzea: talde teoriari, konbinatoriari

Jarduera anitzok ez dira inola ere erabat bananduak; jakina, modu konplexuez elkarreragiten dute euren artean. Mac Lanentzat sistema matematikoen sakonean dauden jatorrizko giza jardueren propietateak «kodifikatzen» dituzte. Adibidez, sakonena ez den kasu bat ematearren, zinetikako ekuaizioek errotazioaren eta translazioaren propietateak kodifikatzen dituzte. Ikuspegi honetan matematika formala da, bai, baina ez sinpleki 'formalistikoa', haratago doa: matematikak aztertutako formak giza jardueratik eratortzen dira, eta jarduerok ulertzeko erabiltzen.

Ildo horretan matematikaren adarkadurak diren bezalakoak dira giza jardueretatik datozelako. Eta giza jarduera horietako bakoitzak bere esturture esematiko orokorra dauka, hainbat azpi-esturturez edo «oinarriko ideiaz» eratu. Matematikak horietatik jaiotako eskemak eta saretzen dituzten erlazio sistemak jite erabat zorrotzean deskribatzen ditu. Beraz, ikuspegi honetan, matematika giza jarduera ohikotik eta horietaz dugun ulermenetik dator. Hots, Mac Lane fundamendu *kognitiboak* behar direla aldarrikatzen ari da. Zientzialari kognitiboek «irudi eskema» deritzoten horiek Mac Lanek aipatzen dituen jardueren antz handia dute. Adibidez, matematikako taldeak *CONTAINER* izan ahal dira, eta funtzio matematikoak *DIRECTED LINK*. Izatez, Mac Lane beraren matematikaren fundazioa «gezi» gisa aurkezten dituen eskema batzuekin has-

ten da. Honako hauek dira zientzialari kognitiboek zerrendatzen dituzten beste irudi eskema kinestesiko batzuk, oinarrizko ideia matematikoeekin parekatuta<sup>1</sup>:

korrespondentzia- *LINK*

jarraitasuna- *PATH*

berdintasuna- *BALANCE*

eragilea- *AGENT*

eragiketa- *CHANGE TO ANOTHER ENTITY*

periodikotasuna, ziklikoa- *CIRCLE, DIRECTION*

identitate elementua ( $1 \times a = a$ )- *AGENT CAUSING NO CHANGE*

zero elementua ( $0 \times a = 0$ )- *AGENT CAUSING CHANGE TO AGENT ITSELF*

Semantika kognitiboaren ikerketek erakutsi dutenaren gisa bertsuan, matematikako oinarrizko ideiak ere kognizioaren oinarrizko kontzeptuen arabera uler daitezke. Matematikaren psikologiaz honek ekar lezakeenez haraindi (eta ez da gutxi), matematikarentzat fundazio bat eskaintzeko erabil daitezke funtsezko kontzeptu kognitiboak. Alimaleko xede hori aparte lagata eta matematika puruenaren fisikotasuna bera ere nabarmenduta, fisika matematikoan iturri analogikoaren eraikuntza aztertuko dut. Gure kognizioaren oinarrizko irudi eskemek zein eragin dute iturri analogikoaren eta ondorengo arrazonamenduaren izaeran? Erakutsiko da arrazonamendu *ez-propositional heuristikoki indartsu* bat ezkututzen dela hemen. Galdera ez da izango nola ulertzen dugun matematika, baizik eta:

*Zergatik funtzionatzen du matematikak mundu errealean eta nola egiten du hori?*

Ohartu, ikuspegi honetan eta honek galderari dakarkion erantzunean, fisika matematikoa ez dela matematika aplikatu bat, baizik eta matematika beraren zutabeetan kokatzen dela. Ingurumari honetan, objektu matematikoen idealtasuna gisa honetako galdera zehatzen itzalpean desagertzen da:

- Nolatan bat egiten dute mekanika newtondarraren kalkulu formalek benetako gorputzen higidurekin?
- Zergatik egiten dute bat simetria talde posible batzuen eratorpen formalek, adibidez Lierenek, mikrokosmosean topatu diren partikula  $n$ -koteekin (hirukote, zortzikote...)?
- Eguzki sistema eta atomoaren arteko analogia zergatik gorputzu zen teoria kuantiko zaharraren barnean bertan izan zuen arrakastarekin?

<sup>1</sup> Ingeleseztatik utziko dituzten oinarrizko kontzeptu kognitiboak, zientzialari kognitiboek darabil-tzaten terminoetan. Muntza honetako fundazio kognitibo batek edo, hobeki esanda, berau egiteko ahaleginak merezi duen terminologia batasuna errespetatzea da nire nahia.

- Nola da posible espektrometria arrunt enpiriko baten emaitzak azaltzeko agertutako arau fenomenologiko bat (modu metaforikoan formulatzen zen esklusio-araua) naturako funtsezko printzipio bihurtzea (spin-estatistika teoremaren baitako sofistikazio matematikoan formulatzen den esklusio-printzipioa)?
- Bide horretan Diracek sartutako uhin-funtzioen errepresentazio antisimetrikoak, teoria garatzeko giltzarria izan zenak, zein iturri kognitibotatik edan zuen? Eta sortze eta deusezte eragileek?

Galdera ez da soilik matematikak zergatik funtzionatzen duen, baizik eta *zergatik funtzionatzen duen funtzionatzen duen fenomeno partikularrentzat*. Hor-tik dator kasuan kasuko azterketen beharra. Erantzuna ezin da soilik izan matematika mundu errealean dagoela. Horrek ez luke azalduko matematikaren adar berak zergatik funtzionatzen duen gorputzen dinamikarako eta harra-pakari-harropakin populazioen azterketarako, baina ez naturan behatutako simetriak ezaugarritzeko. Platonismoarentzat ideala partikularrean egikaritzen da. Baina zein ideal zein partikularretan da egikaritzen? Ez ditu parekatzen matematikaren adarrak eta fenomenoak.

Ikuspegi honetan ez dago esentzia hutsik edo idealik. Esperientzia da enpirismoaren abiapuntua. Jo dezagun matematika giza sistema kontzeptualaren gainean eraikitzen dela, gizon-emakumeek eta haurrek ohiko esperientziak barneratzeko darabilten gogo sistema arruntaren gainean. Hortaz, denboraren poderioz zientzialari komunitateko kideek euren eguneroko kontzeptuen araberako fenomeno beraren ulermen konsistentea izango lukete. Kontzeptu kognitibo arruntok matematikaren oinarria ere badirenez, misterioa desagertu egiten da. Noski, horrek ez digu esaten zergatik existitzen diren erregulartasunak munduan. Esaten diguna da ezen gizakiek konsistenteki behaturiko eta giza kontzeptu funtsezkoek ulertutako erregulartasunak dagokion matematikaz ezaugarritu ahalko direla.

Ez legoke ezer harrigarrik matematika hutsak fisikan duen arrakastan. Ezta mekanika kuantikoaren garapeneko zenbait etapa ederretan ere. Behaketa zintzo, zorrotz eta arduratsuak denbora luzean fenomenoaren ulermena dakar, eguneroko terminoetan gainera. Beste gauza bat da hori lortu duen komunitatearen isolamendua eta garatzen duen hizkera propioa, urteetan landua. Beste gauza bat da, baita ere, horren guztiaren formulazio matematiko sendoa. Talde lan gogor bat eta oinarritzko gaitasun kognitiboak dira matematika-arrakastaren arrazoia.

Motzean, honela laburtzen du Mac Lanek bere tesia (1981, 467 or.):

Matematikaren izaerari buruzko gure tesia horrela formula liteke: matematikak giza esperientziaren eta munduaren alderdien eredu formal zenbaiten eraikuntzan dihardu. Bestalde, horrek esan nahi du matema-

tika ez dela sakoneko errealitate platonikoren baten zuzeneko teoria bat, baizik eta munduaren aspektu formalen ez-zuzeneko teoria bat (edo errealitatearena, halakorik baldin bada). Alde batetik, gure tesiak nabarmendu egiten du matematikak eredu aniztasun zabala dakarrela. Esperientzia berberak eredu matematiko bat baino gehiago izan ditzake.<sup>2</sup>

Honenbestez, matematikak estudiatzen dituen formak ez dira edukiaren kontra definitzen direnak (forma vs. edukia); izan ere, forma horiek gure gorputzak munduan parte hartzen duen modutik datoz eta gainera esperientzia ulertzeko darabiltzagu. Gorputzutako formak dira, ez forma Platoniko ideal etereoak. Horrela, Mac Lanentzat matematika ez dago eredu handi baten barnean edo sistema axiomatiko bakar baten pean, munduaren eredu anitz tratatzen ditu eta berau ulertzeko hainbat modu eskaintzen.

Mac Lanen iturritik edan duen ikuspegi bat aurkeztu zen 2000. urtean. Lakoff eta Nuñezek (2000), anbizioz, kognizio matematikoaren oinarriak ezarri nahi dituen liburua plazaratu zuten. Matematikaren xehetasunei begira ideia matematikoak nondik letorzkkeen aztertu nahi dute bertan. Jaiotzetiko matematika ñimiñoa dela kontuan izanik, sortzetiko eduki ttipi hori matematika aurreratu nola bihurtzen den ikusi nahi dute, hau da, giza esperientziatik ideia matematikoak nola mamitzen diren. Bertan, Lakoffen semantika kognitiboko lan osoan legez, *metafora*, *metonimia* eta *uztarketa kontzeptualaren*<sup>3</sup> (neuretzat metonimia) zeregina funtsezkotzat hartuko dute. *Irudi eskemak* izango dira gogo prozedura horien heldulekuak. Arestiko Mac Lanen ikuspegi muintzat hartzen duen proposamen ausart batekin datoz horrela: *Gorputzutako Matematikaren Teoria*.<sup>4</sup>

Aritmetikaren legeak, klase boolearrenak, logika sinbolikoarenak, talde teoria eta multzo teorienak; legeen xehetasunak aztertu dituzte. Baita infinitu kontzeptuaren gorabeherak ere, edo  $e^{i\pi}$  zenbakiarenak. Egileen ustez horrelako kasu azterketetak egin behar ditu zientzia kognitiboak. Analisi konplikatu bat eskatuko dute horiek:

- Ideia matematikoen sare konplexu bat marraztea bertako oinarritzko metaforak zeintzuk diren ikusteko;
- *Mapping* metaforikoa isolatzea horren iturri eta ituaren izaera narbarmentzearren; eta

<sup>2</sup> *Our thesis as to the nature of mathematics might be formulated thus: Mathematics deals with the construction of a variety of formal models of aspects of the world and human experience. On the other hand, this means that mathematics is not a direct theory of some underlying Platonic reality, but rather an indirect theory of formal aspects of the world (or of reality, if there is such). On the one hand, our thesis emphasizes that mathematics involves a considerable variety of models. The same experience can be modeled mathematically in more than one way.*

<sup>3</sup> «Conceptual blend»

<sup>4</sup> «The Theory of Embodied Mathematics»

- Oinarrian dagoen metafora bakoitzak eskaintzen duen bat-bateko ulermenak ideia konplexua bere osotasunean nola egituratzen duen azaltzea.

Egileen jarrera filosofikoa *Matematikaren Erromantzea* deitu dutenaren eta mitologiatzat daukatenaren kontrakoa da. Egin ahal dizkieten kritikei ukabila erakutsiz ondorio soziologiko gogorrek egozten dizkiote mito horri (Lakoff eta Nuñez 2000, 341 or.):

Erromantzeak komunitate matematikoaren nahiak asetzen ditu. Elite bat mantentzeko balio du, eta berau justifikatzeko. Ulertezintasuna saritzen duen kultura baten parte da, non araua den soilik iniziatuak aditzeko idaztea —sinboloez idaztea azalpen argiez eta ahal bezain hizkuntza ulergarriaz egin beharrean—. Idazki matematiko gehienek ulertezintasunak Erromantzea iraurarazten du eta, horrekin batera, bere gaitzak: beste jende hezituen alienazioa matematikatik, eta matematikan interesatua dagoen jendeak horretaz jabetzeko eta horrekin aberasteko duen ezintasuna. Sozialki, matematikaren eskurazintasunak trebatze matematiko egokiaren falta ekarri du jendartean orokorki. Eta trebatze matematiko egoki baten faltak joera arriskutsu bat dakar —are eta teknikoagoa den ekonomia baten barnean funtziona dezaketenen eta ezin dutenen arteko banaketa soziala—. Ez dugu uste Matematikaren Erromantzea inongo txarrik gabeko mitoa denik —zuzenean ez bada ere jendartearen mailaketa soziala eta ekonomikoa eragiten du—. <sup>5</sup>

Honatz, motzean, ondorio hain larriak ei dituen mito horri lotutako pentsakera eta jarrera epistemologikoa:

- Matematika unibertsoaren ezaugarri objektibo bat da; objektu matematikoak errealak dira; egia matematikoa absolutua eta zehatza da.
- Horrela bada, jendeak matematikaz uste duenak ez du eraginik matematikaren berariazko izaeran. Matematika den bezalakoa litzateke giza-kiak ez baleude ere. Matematika abstraktua eta gorpuztu gabea izan arren, erreal da.

---

<sup>5</sup> *The Romance serves the purposes of the mathematical community. It helps to maintain an elite and the justify it. It is part of a culture that rewards incomprehensibility, in which it is the norm to write only for an audience of the initiated—to write in symbols rather than clear exposition and in maximally accessible language. The inaccessibility of most mathematical writing tends to perpetuate the Romance and, with it, its ill effects: the alienation of other educated people from mathematics, and the inaccessibility of mathematics to people who are interested in it and could benefit from it. Socially, the inaccessibility of mathematics has contributed to the lack of adequate mathematical training in the populace in general. And the lack of adequate mathematical training contributes to an alarming trend—the division of our society into those who can function in an increasingly technical economy and those who cannot. We believe that the Romance of Mathematics is not an entirely harmless myth—that at least indirectly it is contributing to the social and economic stratification of society.*

- Matematikariak zientzialari gailenak dira. Egia absolutuak topatzen dituzte, ez soilik unibertso fisiko honi buruz, balizko edozein unibertso berruz ere bai.
- Logika bera logika matematikotzat har daitekeenez, matematikak arrazionaltasunaren izaera bera ezaugarritzen du.

Eta, fisika matematikoari dagokionez, garrantzitsuena dena:

- Fisikaren matematikak fenomeno fisikoetan bertan dautza (elipseak daude planeten orbitetan, logaritmoak barraskiloen espiraletan). Hots, «naturaren liburua matematikaz idatzia dago». Matematika da naturaren hizkuntza eta, ondorioz, matematika dakitenek soilik uler dezakete natura.
- Matematika erret zientzia da. Berak definitzen du zer den zehaztasuna. Eredu matematikoak eraikitzeke iaiotasunak dakar zientifikotasuna. Zientzia nagusi gisa, beste zientziei aplikatzen zaie eta beste zientzia guztiei aurre hartzen die. Matematikak berak bakarrik ezaugarri dezake matematikaren berariazko izaera.

«Gizakiak animalia arrazionalak dira» esanez, Platonismo ideal horren kontra bortitz dator Lakoff. Ez daukagu sarbide pribilegiaturik ez Jainkoaren begira ez eta arrazionaltasun transzendental batera. Gure arrazoibideak geure-geureak dira (*Ibid*, 108 or.):

Ez dira gure aberetasunarekiko independenteak; hobeto esanda, gure aberetasunaren mendekoak dira guztiz. Irudimena ez da soilik apaindura bat; izan ere, irudimena da, bereziki metafora eta metonimia, gure esperientzia animalak definituriko eskema orokorrak arrazoiketa forma bihurtzen dituena —objetibisten arrazoimen transzendentalak eurak baino ere forma aberatsagoak—. <sup>6</sup>

Ikuskerara horrekin hasten dira liburuan matematika metafora kontzeptualen geruza pilaketatzat jotzen; aritmetika elementala proposatzen dute lehendabiziko aztergai moduan, eta honako jarduera hauek aurkezten dituzte aritmetika eraiki zuten oinarriko iturri metaforikotzat: gauzak biltzea, eraikitzea, makilaz neurtzea eta bide batean zehar higitzea. Horrela, iturria eta itua-reen artean marrazten den *mappinga* kontzeptuala da, eta ez linguistikoa, bazuek kritikoki ihardetsi nahi izan duten gisan. «Platonism, Metaphor, and Mathematics» artikuluan Parsonsek eta Brownek (2004) platonismoak metafora matematikoa Gorpuztutako Matematikak baino hobeki barnebiltzen

---

<sup>6</sup> *They are not independent of our animal nature; rather, they depend crucially of that animal nature. Imagination is not mere fancy, for it is imagination, especially metaphor and metonymy, that transforms the general schemas defined by our animal experience into forms of reason —forms even richer than the objectivist's transcendental reason has been taken to be.*

duela diote. *Metafora kontzeptual* eta linguistikoaren arteko bereizketa ongi ez egitetik datoz Platonismoaren aldeko argumentuok. Estatus ontologiko bat eman zaio ildo horretan analogiari edo metaforari, fisikariek «naturaren barnean dauden simetriak» aipatzen dituztenean bezala. Haatik, jarrera horretan, metafora kontzeptuala mekanismo kognitibo bat da, eta beronek egituratzen ditu gogoaren sistema kontzeptualak. Metaforak kokapen zentral epistemologikoa hartzen du, ez ontologikoa. Ez dugu neokantismoarena bezalako epistemologiarik babesten, ezta ere, non teoria-objektu elkarrekintza soilik existitzen den azterbide posible gisa. Kognizioa eta pentsalarien ahalmen heuristikoa dira ardatz, baina arrazionalismoan ez bezala psikologiaren eta zientzia kognitiboaren emaitzak aintzat hartuta.

Metafora kontzeptuala horrela definitzen dute horretarako (Parsons eta Brown 2004, 6 or.): «Metafora kontzeptualak gauza mota batez pentsatzea ahalbidetzen digu beste zerbait bailitzan. Horrek esan gura du metafora ez dela mekanismo linguistiko bat soilik, hizketarako figura huts bat. Hobeki esanda, pentsamenduari dagokion mekanismo kognitibo bat da. Ikusiko denez, 'metafora kontzeptualak' esanahi tekniko bat du: *inferentzia kontserbatzen duen domeinu arteko mapping bat da* -domeinu bateko estruktura inferentziala (adibidez, geometriakoa) beste batean arrazontzeko (adibidez, aritmetika) erabiltzea ahalbidetzen digun mekanismo neuronal bat». Definizio horrekin, egileek matematikaren zerizanaren bihotzean jo dute hein handi batean. 1900. urteko matematikaz matematikariek zuten ikuspegiak Klinek (1972, 1023-1039 or.) eginiko deskripzioan, adibidez, argi dago matematikariek estruktura inferentziala aztertu zutela, ez berariazko natura edo esentzia bat.

Ardatz kontzeptual horren baitan, analogiaren funtsezko *iturri-itu mapping* estruktura ikusaraztearren jar dezagun matematikako adibide konkretu eta simple bat, kategorizazioarena esaterako. Kategoría klasikoak edozein izaki edo gogamenez haraindikotzat hartzeak unibertsoaren logika transzendente bat dagoela esan nahi zuen garai batean. Kategorizazio klasikoak eta logika klasikoak gauza beraren bi alderdi dira. Izatez, kategorizazioa da logika klasikoaren eginbide nagusia. *A guztiak B dira* diogunean *A B* kategoriaren azpi-kategoria bat dela diogu. Hots, *Ako* edozein elementu *B*koa ere bada. *A guztiak ez dira B* diogunean, *A* eta *B* kategoriek ez dutela elementurik elkar-trukatzen diogu, hots, *Ako* elementu bat bera ere ez dagoela *Bn*. Halaz, *modus ponens* klasikoak,

*A guztiak B dira*

*X A* bat da.

Beraz, *X B* bat da;

kategoria estruktura bat du barne:

*A* kategoria *B* kategoriaren barnean dago

*X A* kategoriaren barnean dago,



eta ohar gaitetze, kategoria estruktura horri begira,  $X$   $B$  kategoriaren barnean dagoela. Lakoffentzat kategoria estrukturaren azaleratze hori kategoriak edukitzaile metaforikotzat ulertzen ditugulako suertatzen da. Silogismoaren estruktura edukitzailea estrukturaren behaketa bat baino ez da. Domeinu jakin bati silogismoa aplikatzeak domeinua edukitzaile metaforikoen arabera ulertzea egokia dela adierazten du. Baina objektibismoak hori baino gehiago dio. Domeinua edukitzaileen arabera objektiboki estrukturatua dagoela dio, ezein ulermen alde batera lagata. Horrexegatik diote kategoria klasikoek existentzia objektibo bat dutela.

Alternatiba filosofiko horretan subjektuaren kognizioak hartzen du aurrea. Oinarrizko irudi-eskemek gure esperientzia aitzin-kontzeptuala egituratzen dute izaki ekintzaile gisa. Horiexek dute arrazionaltasuna ezaugarritzeko behar den estruktura logiko guztia. Edukitzaile edo *CONTAINER* eskemak, adibiderako, gure gorputz esperientziatik datoz, eta silogismoaren oinarrizko logika dute barne. Horren hedapen metaforikoak dakar silogismoaren forma,

### Logika proposizionalaren metafora

ITURRIA Mundu Egoeren klaseak	ITUA Proposizioak: $P, Q, \dots$
Mundu egoeren klase bat non $P$ proposizioa egiazkoa den	$P$ proposizioa
Bilketa	«edo» disjuntzioa
Ebaketa	«eta» konjuntzioa
Aren osagarria= $P$ egiazkoa ez deneko mundu egoeren klasea	$\neg P$
$B$ Aren azpiklasea da (non $B$ $P$ egiazkoa deneko mundu egoeren klasea den eta $A$ $Q$ egiazkoa deneko mundu egoeren azpiklasea den)	<i>Baldin</i> $P$ , orduan $Q$
Klase identitatea	Baliokidetasun logikoa: <i>baldin eta soilik baldin</i>
Bilketaren trukakortasun legea	Disjuntzioaren trukakortasun legea
Ebaketaren trukakortasun legea	Konjuntzioaren trukakortasun legea
$A$ eta $B$ bi klase emanik eta $X$ elementu bat, $A$ $B$ ren azpiklasea bada eta $X$ $A$ ko kide bada, orduan $X$ $B$ ko kide ere bada.	<i>Modus Ponens</i>
$A$ eta $B$ bi klase emanik eta $Y$ elementu bat, $A$ $B$ ren azpiklase bat baldin bada eta $Y$ ez baldin bada $B$ ren kide bat, orduan $Y$ ez da $A$ ren kide izango.	<i>Modus Tollens</i>

ez existentzia transzendental batek. Gorputz funtzio batek bizi arazten du forma, ez idealtasun goren batek.

Kategoriaren eta silogismoaren arteko erlazio horretan Boole ikuspuntu kognitibo batetik aztertzea proposatzen dute egileek (130 or.). Logika Proposizionalaren Metafora deritzote horren atzean dagoen oinarri kognitiboari: iturri analogikoa klase eta proposizioen uztarketa kontzeptual bat da, eta proposizio bakoitza uztarketa horren arabera metaforikoki kontzeptualizatua dago (hots, proposizioa egiazkoa deneko mundu egoeren klaseen arabera). Hala geratzen da iturri-itu *mappinga*, *Modus Tollens* eta *Modus Ponens* bezalako lege inferentzialetaraino heda daitekeena.

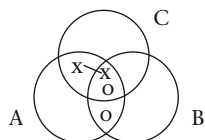
Hau da, iturri analogikoaren baitan mamituak dauden klaseen eta horien arteko eragiketen arteko erlazio-sistemek, lege inferentzial gisa jaso daitezkeenek, pareko bat dute itu domeinuan. Ituz gehiago jakin nahi dugunean, iturriko elementuen erlazio-sistemak transferi ditzakegu ezagutu nahi dugun itu domeinura. Horrela osatzen dira arrakastaz arrazonamendu analogiko anitz. Lotura metaforiko konkretu horrek irudi eskema bat du sakonean: lehen aipaturiko edukizaille edo *CONTAINER* eskema. Diagramatikoki marraz daitezke klaseak eta horien barneko elementuak, eta aipaturiko lege inferentzial sinpleak betetzen direla bertatik bertara ikusi.

Gauzak konplikatzen direnean, haatik, arrazonamendu diagramatikoak ez du ongi erantzuten. Arazo horretan adierazpide diagramatikoaren pausokako hobekuntza bat gertatu zela ohartarazi behar da: Eulerren diagramak izan ziren lehenbizikoak, gero Venn etorri zen, geroago Peircek transformazio arauak sartu zituen arazoibide diagramatikootan eta, azkenik, Shinek Peircerena sistema osoa zela frogatu zuen. Bi gauza bereizi behar dira: *CONTAINER* eskemek eskaintzen dituzten gogo-ereduak eta hemendik sortzen diren lotura metaforikoak daude batetik, eta bestetik, ereduon errepresentazioak daude, adibidez diagramatikoak izan daitezkeenak. Adierazpidea diagramatikoak izateak ez du esan nahi irudi eskematik ohiko notazio proposizionala baino gertuago dagoenik (Peirceren zeinu ikoniko eta sinbolikoaren arteko bereizketa). Inferentzia sinpleenetan adierazpidea egokia da eta ongi bisualizatzen da, baina apur bat konplikatuz gero gauzak ohiko notazioan baino nahasgarriagoak dira.

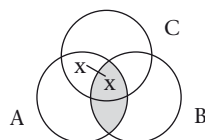
Beraz, kasu azterketa labur horrek erakusten du ezen irudi eskemaz ari garenean gogo-ereduen mailan gaudela, eraikin kontzeptualenean.

Ondorioz, ikuspegi orokor horren arabera, matematika matematika beraren tresnekin oinarritu nahi izateak berariazko gabezia bat dauka, ideia matematiko orok duen funts kognitiboa ez baitu hastapenetik aintzat hartzen. Zientzia kognitiboaren oinarrietatik hasi behar da, esaterako, irudi-eskemetan nahiz uztarketa kontzeptualetan ainguratutako analogietatik. Hala esplikatu liteke soilik teoria matematikoen axiomatizazio aniztasuna eta matematika ere-

**Ez dago Arik B denik. Zenbait C A dira. Orduan, zenbait C ez dira B**



**Peirce**



**Shin**

*Stanford Encyclopedia of Philosophy*tik ateratako irudia (ikus bertan Peirceren eta Shinen errepresentazio konbentzionalak).

du bakar bat ez existitzea. Hala esplikatzeko da, baita ere, fisikak matematikaren garapenean izan duen eragin erabakiorra eta fisika matematikoaren epistemologia Gorpututako Matematikaren Teoriaren baitan hartu beharra.

## Erreferentziak

KLINE, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

LAKOFF, G. eta R.E. NÚÑEZ (2000), *Where Mathematics come from*. New York: Basic Books.

MAC LANE, S. (1981), «Mathematical Models: a sketch for the philosophy of mathematics». *Am. Math. Monthly* **88**, 462-472 or.

——— (1986), *Mathematics, Form and Function*. New York: Springer-Verlag.

Parsons G. eta James Robert Brown (2004), «Platonism, Metaphor, and Mathematics». *Dialogue* **43**: 47-66.

Stanford Encyclopedia of Philosophy: <http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/>