Ehun urte logika matematikoan*

HAO WANG

«One hundred years of mathematical logic», in *Popular Lectures on Mathematical Logic.* Chapter 1. New York: Van Nostrand Reinhold, 1-10 or.

(One hundred years of mathematical logic)

Hasi hasiko gara kontzeptu eta teorema nagusi batzuk testuinguru historiko eta garapenezkoan adieraziz. Beste diziplina batzuekin dituen erlazioak ere labur aipatuko dira. Kapitulu honetan zirriborratutako gai batzuk hurbilagotik kontsideratuko dira beste kapituluetan eta eranskinetan.

Ohitura bihurtu da atzeraka Leibnizenganaino (1646-1716) jotzea logika modernoaren kontzeptu eta zatikako aitzinamenduen bila. Haren eraketen teoriak algebra boolearraren norabidean doan identitate eta inklusio kalkulua du barruan. Zientziaren hizkuntza unibertsal zehatz baten alde ahalegindu zen eta arrazoitzearen kalkulu baten bila jardun zuen, hala nola eztabaidak eta desadostasunak kalkulatuz konpondu ahal izateko.

1847an eman zuen argitara George Boolek (1815-1864) bere *Mathematical analysis of logic* eta hor logikaren algebra garatzen da, gaur normalean matematikan algebra boolearra esaten zaiona. Logikaren alorrean proposizioen kalkuluari dagokio eta predikatuen kalkuluari dagozkion formetara 1883an zabaldu zuten C. S. Peircek eta O. H. Mitchellek; tradizio honen ildoan ekarpen garrantzitsuak egin zituzten E. Schröderrek, L. Löwenheimek eta Skolemek.

Logika matematikoaren hasiera komeni da 1880 baino zertxobait lehenago jartzea, predikatuen kalkulua (lehen mailako logika) eta multzoen teoria hasi zirenean[1]. Matematikaren honako bi norabideok oinarrian eginkizun

* Itzulpen hau Jesus M. Larrazabalek egin du, Andolin Eguzkitza (1953-2004) adiskide eta lankide zena gogoan. Sarritan eskatu zidan testu honek eskaintzen duen moduko *argazki*ren bat euskaraz argitaratzea. Kontuan hartu Wangen testu hau duela hogeita bost urtekoa dela. Azken urteotan logika matematikoan egindako aurrerapenak ez dira hemen azaltzen.

[1] Logika formalaren historiaz bi liburu luze samar daude: I. M. Bochenski, *A history of formal logic* (trans. I. Thomas), 1961; W. and M. Kneale, *The development of logic*, 1962. Logika zentzu za-

garrantzitsua jokatu zuten: metodo axiomatikoan jarritako interesa; eta analisiaren oinarriekiko kezka (bereziki, zenbaki errealekikoa eta hauen funtzio arbitrarioekikoa). 1880 ingurutik aurrera predikatuen kalkuluaren eta multzoen teoriaren arteko elkarreragina joera nagusi bat izan zen.

Beste joera garrantzitsu bat metodo axiomatikoaren estudioa izan zen, bai zenbakien teoriarentzat, geometriarentzat, analisiarentzat eta multzoen teoriararentzat axioma sistemak aztertuz, bai axioma sistema kontzeptuaren zorrozte moduan, sistema formal kontzeptuaren azterlan orokorra eginez, formalizatzearen mugei buruz emaitza sendoak lortuz[2].

Konputagarritasun teorikoaren kontzeptu zehatza lorpenetako bat da; horrek errekurtsioaren teoria izeneko diziplina ematen du eta esparrua eskaintzen du konputazioaren teoria bideratzeko. Azken honek orain arte konputazio errealean berehala erabiltzeko moduko gauza gutxi eman du, emaitza nagusiek erabakigarritasun eta erabakiezintasun teorikoarekin bakarrik zerikusia dutenez. Konputazio egingarriaren teoria baten garapena egoera aski primitiboan dago oraindik. Konputagailuen esparruaren aitzinamenduarentzat garrantzitsuagoa da bi zelai horiek batera duten ardura formalizazio esplizituaren alde, logika matematikoa programazioan adituak formatzeko eta bereziki programazio hizkuntzak diseinatzeko diziplina baliotsua bihurtuz[3]. Aplikazio bistakoagoa ordenagailuentzat zirkuitu logikoak diseinatzea da, zirkuitu hauek berez adierazpen boolearrei edo proposizioen kalkuluko adierazpenei dagozkielako. Bide batez, algebra boolearra eta hainbat algoritmo sinple erraz samarrak dira eta irakaskuntza ertaineko eskoletan erakutsi daitezke.

Azken urteotan logika matematikoak aplikazioak izan ditu zenbakien teorian (adibidez, ekuazio diofantoar bat ebazkarri den ala ez erabakitzeko problema), algebran (adibidez, hitzen problema taldeetan eta Artinen konjekturaren froga gorputz p-adikoetan), topologian (batez ere, konsistentzia eta independentzia frogak) eta infinitesimalen teoria zehatz batean. Azken aplikazio honek lehen aldiz zenbaki arruntei eredu ez-estandar bat emateko bideratutako teknika erabiltzen du eta intuiziozko arrazoitzeari buruzko eta honen kodetze irmoari buruzko arazo filosofiko zabalean sartzen da. Askoren ustez, analisi ez-estandarraren gaurko formulazioa artifiziala da eta galdera normala da ea infinitesimalen erabilpen intuitiboa justifikatzeko horrelako bide buelta beharrezkoa den edo ez.

---

balago batean hartzeko proiektu handiago baten hastapena hauxe da: Heinrich Scholz, *Abriss*, 1931, ingelesera honela itzulia: *Concise history of logic*, 1961. Bada 1879tik 1931ra bitarteko logika matematikoko idatzi originalen bilduma bat, papelak ingelesez edo ingelesera itzulita: *From Frege to Gödel*, ed. J. van Heijenoort, 1967. Cantorren, Hilberten, Brouwerren, Skolemen, Herbranden, Gentzenen eta abarren papelen bildumak (edo hautapenak) azaldu dira, guztiak ere.

[2] Ikusi 2. kapitulua.

[3] Ikusi 3. kapitulua.

Antzeko galdera dago axioma sistemak sistema formalekin identifikatzeari buruz. Bada joera bat metodo axiomatikoa era zabalago batez hartzeko, horrela sistema formal batean ez bezala guztia erabat esplizitua izateko premia bete gabe. Beste aldetik, ez daukagu, zentzu zabal honetan, axioma sistemen nozio zehatzik.

Logika matematikoa urte askoan filosofia akademikoarekin barnetik lotuta egon da. Logika matematikoaren lehenagoko garapenetan arazo filosofiko tradizionalekin izandako loturak aurrerapena eragin zuen. Baina badirudi filosofia akademikoan logika matematikoak izan duen efekturik nabariena aitzakia bat gehiago ematea izan dela gizakiarekiko eta izadiarekiko arazo konplexu eta benetakoetatik alde egiteko.

Matematikako arrazoitzea seguruago eta intuitiboki gardenago egiteko urratsak intuizionismoa, bere eraikigarritasun kontzeptuarekin, eman du eta baita frogaren teoria ere, arrazoitze ez eraikigarria kodetzen duten sistema formalen konsistentzia metodo eraikigarriekin frogatzeko helburuarekin. Proposizio ez eraikigarrientzat interpretazio eraikigarriak aurkitzeko ahalbideak frogaren teoria intuizionismoarekin estu samar lotzeko joera ekarriko du. Baina arakatze esparru oso honek ez du fruitu askorik eman metodo ez eraikigarriak eraikigarrietara erreduzitzeko edo hauen bidez justifikatzeko emaitza positiboetan.

Behean aipatuko diren emaitza berezietatik at, predikatuen kalkuluak multzoen teoriarekin izandako harremanak ereduen teoria izeneko diziplina ere ekarri du, multzo kontzeptu intuitiboa predikatuen kalkuluaren esparruan formulatutako teorien interpretazioen estudiorako erabiliz.

Gaur egun logika matematikoak honako lau eremu hauek dituela esatea ohikoa bihurtu da[4]: (1) multzoen teoria; (2) ereduen teoria; (3) errekurtsioaren teoria; (4) eraikigarritasuna eta frogaren teoria. Gainera, badira hain ongi definituta ez dauden bi esparru, honela esan daitezkeenak: (a) logika eta ordenagailuak; (b) «matematikaren oinarriak».

Logika ezaugarritzeko beste bide bat hizkuntza formalen eta sistema formalen (batez ere, logika eta matematikarenak) sintaxiaren (adierazpenen arteko erlazioak) eta semantikaren (adierazpenen eta bere esanahi edo interpretazioen arteko erlazioak) azterketatzat hartzea da. Orduan, gutxi gorabehera,

[4] Liburu honen zati ezberdinetan azaltzen dira esparrruok, honela: multzoen teoria 7. eta 8. kapituluetan; ereduen teoria 5. kapituluan; errekurtsioaren teoria eta ordenagailuak C eranskinean, 6. eta 3. kapituluetan; eraikigarritasuna eta frogaren teoria laburki 8. kapituluan. Logika matematikoko testuliburu orokorren artean, hiru aipa ditzakegu: J. R. Schoenfield, *Mathematical logic*, 1967; Yu. I. Manin, *A course in mathematical logic*, Springer Verlag, 1977; J. Bell and M. Machover, *A course in mathematical logic*, North-Holland, 1977. Liburuan zehar maiz joko dugu honetara, *Handbook of mathematical logic*, Jon Barwise arg., 1977ko abenduan argitaratua, 1000 orrialdetik gorakoa eta 30 egile baino gehiagoren ekarpenekin.

errekurtsioaren teoriak eta frogaren teoriak nagusiki sintaxiarekin dute zerikusia; multzoen teoriak eta ereduen teoriak semantikarekin.

Cantor 1869an hasi zen funtzio bat serie trigonometrikoen bidez errepresentatzeko problema aztertzen eta hark 1872an eman zuen puntu multzo baten (zenbaki errealen multzo bat) multzo deribatuaren (puntu limiteen multzoa) kontzeptua. Cantorrek 1880an lehen aldiz bideratu zituen zenbaki ordinal infinituak, puntu multzo baten multzo deribatuak eratzeko prozesua infinituki errepikatuz. Cantorrek, bat-bat korrespondentzia kontzeptua erabiliz, 1874an zenbaki errealak zenbagarri ez direla frogatu zuen. 1883an artikulu luze bat (aparteko monografia moduan ere bai) eman zuen argitara, lehen aldiz zenbaki transfinituei buruzko bere teoria sistematikoki garatuz.

Norabide ezberdinean Fregek 1879an bere *Begriffsschrift* argitaratu zuen, lehen aldiz predikatuen kalkulua formalizatuz. Segiden teoria ere bideratu zuen, geroago zenbaki arruntak multzoen teoriako (edo Fregek logikakotzat jo zituen) nozioen arabera definitu ahal izanez.

Peanoren axiomak lehenengoz 1889an eman ziren argitara, aurreko urteko Dedekinden monografia erabiliz. Axioma hauen motibazio irakasgarria Dedekindek 1890ean idatzi baina 1957an bakarrik argitaratutako gutun batean dago[5].

Jarraiaren hipotesia konjektura gisa lehen aldiz Cantorrek jarri zuen 1878an. Hauxe da: zenbaki ordinal zenbagarri adina zenbaki erreal (puntuak lerroan) daude, hots, jarraiaren zenbaki kardinala lehen zenbaki kardinal ez zenbagarria da. Hau da Hilberten lehen problema bere 1900eko zerrendan, oraindik erabaki gabe dagoena.

1900eko hamarkadan oinarrizko ideia batzuk bideratu ziren. Zermelok hautuaren axioma esplizituki formulatu zuen eta multzoen teoriaren axiomatizazio bat eskaini zuen. Hilbertek lehen aldiz hitz egin zuen konsistentzia emaitzak lortzeari buruz, horretarako zenbakien teorian froga metodo posible batzuk arakatuz. Brouwerrek intuizionismoaren forma propioa bideratu zuen. «Zirkulu biziozkoaren printzipioari» buruzko Richarden eta Poincaréren iradokizunetan oinarrituz, Russell tipoen teoria adartuaren formulaziora heldu zen eta esan daiteke honela predikatuen kalkulua multzoen teoriaren oinarrien estudioan esplizituki sartu zela.

Hurrengo bi hamarkadetan multzoen teoriaren Zermeloren axiomak hobetu zituzten Mirimanoffek, Skolemek, Fraenkelek eta von Neumannek. Bereziki, Skolemek «propietate definitu» izeneko kontzeptu lauso samarra identifikatu egin zuen predikatuen kalkuluan definigarri direnekin. Löwenheimek eta Skolemek lan interesgarria egin zuten predikatuen kalkuluan. Emaitza

[5] Ikusi 2. kapitulua.

erabat harrigarria «paradoxazko» teorema hau da: multzoen teoria axiomatikoak eredurik baldin badu, orduan eredu zenbagarria du. Gure asmoa multzo ez zenbagarri asko izatea denez, honek sistema formalen muga bat azaltzen digu.

Garai horretan Hilbertek, emaitza argi garrantzitsurik berak lortu ez arren, eragin handia izan zuen goi mailako matematikariari zegokion leku goratutik proiektu ausartak proposatuz. Haren eraginez, Ackermannek eta von Neumannek zenbakien teoriaren konsistentziaren frogan emaitza partzialak lortu zituzten. Predikatuen kalkuluaren erabakigarritasunaz (*tout court* Entscheidungsproblem izenez ezagutua) emaitza mugatuak lortu ziren. Hilbertek berak lehen urratsak egin zituen jarraiaren hipotesiaren frogaren bidean. Predikatuen kalkuluaren sistema formalen osotasuna definitu zen eta problema ireki gisa eman zen.

1930ean hasita, Gödelek emaitza sendoak eman zituen argitara, problema guzti hauek asko argituz eta logika matematikoan aro berri bat zabalduz[6]. 1930ean Gödelek predikatuen kalkuluaren ohiko sistemen osotasuna frogatzen zuen bere tesia argitaratu zuen. Gertatzen dena hauxe da: Gödelen frogaren alde teknikoaren zatirik handiena Skolemen 1922ko ekarpenean lortuta zegoela, Gödelek garai hartan ezagutzen ez bazuen ere. 1931an ez-osotasunari buruzko emaitza ospetsuak eman zituen argitara, zenbakien teoria edo analisia edo multzoen teoria osoak ez eta osagarri ere ez direla behin betirako mugatuz. Areago, nahi bezala emandako sistema formal baten konsistentzia frogek sistema beraren gainetik dauden froga metodoak behar dituztela ateratzen da korolario gisan. Teorema hauek erabateko kolpea eman zioten Hilberten programari, gogo erredukziozale eta positibista izan eta matematikan dauden intuizio eta esperientzia aberatsak konbinazio kontzeptu sinpleetara erreduzitzeko asmoa zuenari, aurrekoen konsistentzia frogak azken hauen bidez lortuz. Ekarpen horretan bertan Entscheidungsproblem izenekoarentzat eta ekuazio diofantoarren ebazkarritasunaren erabakigarritasunarentzat emaitza negatiboak apuntzatzen dira.

Ez-osotasunari buruzko emaitzak ez ziren modu erabat orokorrean emanak izan 1931an oraindik eskuragarri ez zelako sistema formalen eta prozedura mekanikoen kontzeptu orokorra. Handik gutxira, Herbrandek egindako indikazio baten gainean, Gödelek funtzio errekurtsibo orokorren kontzeptua eman zuen eta ondoren horien azterketan lan garrantzitsua egin dute Churchek eta Kleenek. Turingek 1936an makina orokorren kontzeptu konbentzigarri bat sortu izanak gaur jada orokorki onartua den konputagarritasun teorikoaren kontzeptua eta horrekin sistema formalen eta prozedura mekanikoena sendotu zituen. Kontzeptu orokorra behin eskuetan izanda, erraz samarra izan

[6] Honen berri zehatzago jakiteko ikusi 7. kapitulua eta 8. kapitulua.

zen Gödeli lotutako emaitza zenbakien teoriaren eta predikatuen kalkuluaren esparruetako beste erabakiezintasun emaitzak lortzeko zabaltzea. (Interesgarria da honakoa azaltzea: Gödelek Entscheidungsproblem izenekoaren azpikasu normal erabakigarri konplexuenaren erabakigarritasuna ere eman zuela.)

1930eko udan analisiaren konsistentzia zenbakien teoriarekiko aztertzen hasi zen Gödel, zenbaki errealak zenbaki arrunten propietate edo enuntziatuen bidez (proposizio funtzioen bidez) errepresentatuz. Berehala heldu zen egiarekin eta definigarritasunarekin lotuta dauden Gezurtiaren eta Richarden paradoxetara. Ongi ohartu zen egia zer den zenbakien teorian ez dagoela definitzerik zenbakien teoriaren barruan, eta konsistentzia erlatiboa lortzeko ahaleginak huts egin zuen. Aurrera egin eta ondorio gisa sistema formal egoki sendoetan proposizio erabakiezinak daudela atera zuen. Beraz, Hilberten programaren eragina argia da.

1930 izango zen Gödelek, jarraiaren hipotesiari buruz pentsatzen hasi, eta lehen aldiz Hilbertek proposatutako frogaren zantzuen berri izan zuen urtea. Berak antzeman zuen hierarkia era eraikitzailean ez litzatekeela sortu behar eta horrela egitea ez dela beharrezkoa konsistentzia froga (erlatibo) baterako. Hierarkia adartua etorri zitzaion gogora. 1935erako Gödelek multzo eraikigarriaren kontzeptua lortua zuen, multzoen teoriaren axiomak (hautuaren axioma barne) kontzeptu horrentzat betetzen zirela frogatua zuen eta jarraiaren hipotesia ere horrentzat beteko zela konjekturatu zuen. 1938ko udan gaur ohikoa dugun hedapenera zabaldu zituen bere emaitzak: multzoen teoriako axiomek ezin dute errefutatu jarraitasun orokortuaren hipotesia eta hauxe izan zen jarraiaren probleman lehen emaitza nagusia Cantorrek 1878an proposatu zuenetik.

Gödelen ez-osotasunari buruzko emaitzatik zenbakien teoriako edozein sistema formalek eredu ez-estandarrak dituela ateratzen da ondoriotzat. Denboraldi luze batean Skolem zenbakien teoriarentzat eredu ez-estandarrak aurkitzen saiatua zen. 1933an horrelako eredu bat produzitu zuen metodo berri baten bidez, hogei bat urte beranduago egingo zen ultrabiderkaduren erabilpena neurri handi batez aurreratuz.

Frogaren teoriaren eta intuizionismoaren arloan, Gödelen ez-osotasunari buruzko teorema nagusietatik haruntza, Gentzenek 1936an zenbakien teoriarentzat konsistentzia froga bat eman zuen, geroztik hainbat aldiz bikaindua eta hedatua izan dena. 1932an Gödelek zenbakien teoria klasikoaren interpretazio (edo itzulpen) bat egin zuen zenbakien teoria intuizionistara. 1942an zenbakien teoria intuizionistarentzat interpretazio bat aurkitu zuen funtzional errekurtsibo primitiboen bidez, 1958ra arte argitara eman ez zena. Ordu ezkero lan asko egin da Gödelen interpretazioa analisi klasikora hedatzeko. Asko arakatu da baita ere definizio induktiboen alorra eta analisi predikatiboa (edo eraikitzezalea) ere bai. Troelstrak eta beste hainbatek intuizionismoaren estudio formalen batzuk burutu diztuzte.

Ereduen teoria 1950etik aurrera gradualki azaleratzen joan da. Hasieran emaitzek gertakari ezagunen berformulazio dotore baten itxura zuten. Geroago, ordea, teorema eta aplikazio interesgarriak hasi ziren azaltzen. Bereziki, kardinal handien azterketarako ere erabilia izan zen eta horrela 1960 inguruan Hanf zenbakiak azaldu ziren eta Scottek kardinal neurgarriek multzo eraikiezinak ematen zituztela frogatu zuen. Ereduen teoriako emaitza borobilen artean maiz aipatzen dira potentzietan kategorizitatea mugatzen duen Morleyren teorema eta Axen eta Kochenen aplikazioak problema algebraikoetara.

Multzoen teoriaren ondorengo garapenean, ereduen teoriarekiko harremana barne, eraginik sendoena izan duen emaitza jarraiaren hipotesiaren independentziaren Cohenen 1963ko froga izan da. Emaitzaren garrantziaz at, bertan erabilitako metodoak aplikagarritasun eremu zabala zuela ikusi zen[7]. Adibidez, Solovayk handik gutxira zenbaki errealen edozein multzo Lebesgue neurgarria dela dioen proposizioa hautu dependentearekiko konsistentea dela frogatu zuen. (Kardinal iritsiezinen existentzia asumitu behar izan zuen; asumitze hau bazter daitekeen edo ez problema irekia da oraindik[8].) Independentzia emaitzak lortzeko Cohenen metodoa erabiltzetik aparte, multzoen teoriaren beste alderdi batzuekiko interesa asko hazi da. Adibidez, determinazio axiomaren inguruan lan asko egin dute D. A. Martin-ek, Solovayk, H. Friedmanek eta beste hainbatek, besteak beste axioma horrek kardinal handiekin dituen harremana aztertuz eta multzoen teoria deskriptiboarekin guzti horrek duen erlazioa arakatuz. Jensenek eta beste batzuek multzo eraikigarrien egitura hurbilagotik ikertu dute. Partizio propietateak eta diszerniezinak (atzera joz, 1929ko Ramseyren teoremara garamatzatenak, lehen aldiz orduan emanak Entscheidungsproblem izenekoaren kasu sinple bat tratatzeko) zabal aztertu dituzte Rowbottomek, Silverrek eta beste hainbatek. Gaur egun jarraiaren problemak problema berezi erronkariena izaten segitzen du; aurrerabide orokorrerako, kardinal handien (bereziki multzo eraikiezinak behar dituztenen) izaera argitzeko ahaleginak egiten ari dira.

Funtzio errekurtsibo orokorren kontzeptuak eta Turingen funtzio konputagarriek errekurtsioaren teoria eta era batera edo bestera interes berezia duten hainbat problema mekanikoki ebatzezin bideratu dituzte. Teoria orokorraren barruan, multzoen teorian eta ereduen teorian eraginez, erabakiezintasun graduak, hierarkia aritmetikoa, hierarkia hiper-aritmetikoa eta

---

[7] Ikusi 7. kapitulua.

[8] Robert M. Solovay, *Annals of math.*, vol. 92 (1970), 1-56.

ordinal onargarrietarako eta multzo onargarrietarako orokortzeak aztertu dira. Problema berezien emaitzei dagokienean, osperik handiena dutenak honakoak dira, diofantoar ekuazioaren ebazpenaren existentzia problemaren (Hilberten hamargarren problemaren) ebatzezintasuna eta 1955ean taldeentzat mugatutako hitzen problemaren ebatzezintasuna.

Turingek bere makinak predikatuen kalkuluaren erabakitze problema ebatzezina dela azaltzeko erabili zituen, horretarako makina bakoitza predikatuen kalkuluko enuntziatu baten bidez errepresentatuz. Errepresentazioak honako propietate hau du: makina, zinta zurian hasita, gelditzekotan gelditzeko dela baldin eta bakarrik baldin enuntziatuak eredurik ez badu. Makina guztiak zinta zurian gelditzen diren edo ez erabakitzeko makinarik ez denez, ez dago algoritmorik orokorki erabakitzeko predikatuen kalkuluko enuntziatu batek eredurik duen edo ez. 1962an metodo hau asko bikaindu zen eta horrela nahikoa da $\forall x \exists y \forall z$ Mxyz forma harrigarri sinpleko enuntziatuak soilik erabiltzea ($\forall\exists\forall$ enuntziatuak). Hortaz, erabakitze problema ebatzezina da jada $\forall\exists\forall$ kasurako[9].

1971an Cookek input bana emandako Turingen makina bakoitza proposizioen kalkuluko enuntziatu baten bidez errepresentatzea lortu zuen, makina bakoitzak inputari buruzko galderaren erantzunaren bilaketa «polinomiozko denboran» eginez. Termino teknikoetan esanda, honek dio adierazpen boolear bat asegarria den edo ez erabakitzeko problema NP-osoa dela, non NP jartzen den era ez deterministan polinomiozkoa («nondeterministic polynomial») dela esateko. Emaitza honek interes handia sortu zuen, konputazio problema klase ezberdin asko polinomiozko denborako erabakigarritasunean baliokide direla azkar ondoriotzeko bidea eskaini zuelako.

Asumitze edo tesi bat da honakoa esatea: problema klase bat konputazio erreal edo egingarriz ebazkarria da baldin eta bakarrik baldin algoritmoren bat bada klase horretako n luzerako galdera bat $P(n)$ denboran erabaki dezakeena, $P(n)$ aldagai bakartzat n duen polinomioa izanik. Ahalegin handia egin da klase baliokide askotako klase bakarren bat polinomiozko denboran erabakigarria den edo ez jakiteko. Galdera nagusia honelaxe azaltzen da normalean: ea P = NP. Baina alderdi kezkagarri batzuk daude hemen. Lehena, polinomiozko denbora oso handia izan daiteke eta, adibidez, $_n10^{10}$ urrats behar badira n luzera duen problema bat ebazteko, orduan ezin esan algoritmoa egingarria denik. Bigarrena, problema oso irekia da, ez baitugu ezta emaitza negatibo ahulago askorik ere: esate baterako, ez dakigu oraindik adierazpen boolearren asegarritasuna denbora kuadratikoan erabakigarria ez denik[10].

---

[9] Ikusi 5. kapitulua eta C eranskina.

[10] Ikusi 6. kapitulua.

Logika matematikoan formalizazioaren indarrak ematen duen abantailaz naturalki baliatzea ordenagailuen bidez teoremak frogatzeko hurbiltze sistematikoa egitea da. 1960 inguruan norabide honetan lehen lorpen harrigarriak izan ziren. Baina proiektuak gaur arte ez du behar bezalako ikuspegirik duen jende nahikoa erakarri eta aurrerapen handirik ez da izan, agian ez bada dedukzio logiko sinple samarren gainean ordenagailuen programen egiaztapenerako egindako aplikazioetan salbu. Bestalde, ordenagailuek lagundutako teoremen frogaren alorrean emaitza ikusgarri batzuk eman dituzten *ad hoc* aplikazio gehiago izan dira, batez ere ordenagailuen oinarrizko erabilpenez egindako lau koloreen konjekturaren frogan oraintsu.