Completitud y continuidad en *Fundamentos de la geometría* de Hilbert: acerca del *Vollständigkeitsaxiom**

(Completeness and Continuity in Hilbert's Foundations of Geometry*: on the* Vollständigkeitsaxiom*)*

Eduardo N. GIOVANNINI

Recibido: 4.1.2012
Versión Final: 8.3.2012

BIBLID [0495-4548 (2013) 28: 76; pp. 139-163]

RESUMEN: El artículo documenta y analiza las vicisitudes en torno a la incorporación de Hilbert de su famoso axioma de completitud, en el sistema axiomático para la geometría euclídea. Esta tarea es emprendida sobre la base del material que aportan sus notas manuscritas para clases, correspondientes al período 1894–1905. Se argumenta que este análisis histórico y conceptual no sólo permite ganar claridad respecto de cómo Hilbert concibió originalmente la naturaleza y función del axioma de completitud en su versión geométrica, sino que además permite disipar equívocos en cuanto a la relación de este axioma con la propiedad metalógica de completitud de un sistema axiomático, tal como fue concebida por Hilbert en esta etapa inicial.

Descriptores: Hilbert, geometría euclídea, axioma de completitud, axiomas de continuidad, método axiomático, filosofía de la geometría

ABSTRACT: The paper reports and analyzes the vicissitudes around Hilbert's inclusion of his famous axiom of completeness, into his axiomatic system for Euclidean geometry. This task is undertaken on the basis of his unpublished notes for lecture courses, corresponding to the period 1894–1905. It is argued that this historical and conceptual analysis not only sheds new light on how Hilbert conceived originally the nature of his geometrical axiom of completeness, but also it allows to clarify some misunderstandings regarding this axiom and the metalogical property of completeness of an axiomatic system, as it was understood by Hilbert in this initial stage.

Keywords: Hilbert, Euclidean geometry, axiom of completeness, continuity axioms, axiomatic method, philosophy of geometry

* En primer lugar, quisiera agradecer expresamente a los dos árbitros anónimos de THEORIA, cuyas observaciones y sugerencias me permitieron introducir importantes mejoras y aclaraciones en la versión original del artículo. Versiones preliminares de este trabajo fueron presentadas en el *16th Brazilian Logic Conference* (Petrópolis) y en el *Colloqium on Mathematical Logic* (ILLC–Amsterdam). Agradezco a los participantes de estas secciones por las críticas realizadas. Desearía además expresar mi agradecimiento a Alejandro Cassini, Ricardo Toledano y Jorge Roetti, por sus comentarios a versiones previas de este escrito. Finalmente agradezco a la *Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen* por el permiso para citar los manuscritos de Hilbert; especialmente al Dr. Helmut Rohlfing, de la *Handschriftenabteilung*.

1. Introducción

En su clásica conferencia "*Über den Zahlbegriff*" (Hilbert 1900b), pronunciada el 19 de septiembre de 1899 en Múnich ante la *Deutsche Mathematiker Vereinigung* (DMV), Hilbert presentó la primera caracterización axiomática del sistema de los números reales como un cuerpo ordenado arquimediano completo o maximal – según se lo designa actualmente. Tal caracterización axiomática de los números reales estaba basaba en los axiomas para un "conjunto de números complejos", presentados por Hilbert pocos meses antes, en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Cf. Hilbert 1899, §13).[1] En efecto, la única diferencia entre ambos sistemas de axiomas residía en que, en su conferencia de Múnich, Hilbert propone por primera vez su original axioma de completitud [*Vollständigkeitsaxiom*]. Como es bien sabido, la función de este axioma era asegurar la propiedad de completitud de los números reales de un modo "indirecto", a saber: estableciendo una condición de maximalidad sobre el conjunto de elementos del sistema, cuya consecuencia inmediata era que el cuerpo ordenado completo de los números reales se convertía en la única realización o 'modelo' capaz de satisfacer la totalidad de los axiomas.

Poco tiempo después, Hilbert emuló la estrategia adoptada para la aritmética de los reales, incorporando su novedoso axioma de completitud al sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental, que en la versión original contaba con el axioma de Arquímedes como único axioma de continuidad. En su versión geométrica, el axioma de completitud apareció por primera vez en la traducción al francés del *Festschrift* (Hilbert 1900a), publicada en abril de 1900; más tarde en la edición inglesa de E. J. Townsend (Hilbert 1902a), y posteriormente a partir de la segunda edición alemana (Hilbert 1903).

En cuanto a sus consecuencias, la incorporación del axioma de completitud tiene como resultado que la geometría analítica construida sobre los reales – *i.e.*, la geometría 'cartesiana' – se convierte en el único 'modelo' numérico (salvo isomorfismo) de sus axiomas para la geometría elemental. En este sentido, los efectos de la inclusión del axioma de completitud son notablemente importantes, y quizás sea por ello que, la circunstancia de que este axioma no figura en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, y es en cambio una modificación introducida en ediciones posteriores, ha sido constantemente mencionada en la literatura. Como ejemplo pueden consultarse los trabajos de Rowe (2000) y Corry (2004), quienes han ofrecido la reconstrucción quizás más influyente y difundida al respecto.

Brevemente, la explicación que ofrecen estos autores advierte lo siguiente. Es necesario reconocer que, para presentar una caracterización de la geometría analítica "cartesiana" como *la realización* de sus axiomas para la geometría sintética, Hilbert debía ofrecer una descripción en detalle de la estructura del sistema de los números reales. Sin embargo, esta tarea suponía un esfuerzo

[1] En adelante llamaremos "Festschrift" a la primera edición de *Fundamentos de la geometría* Hilbert (1899).

considerable, puesto que al momento de la publicación del *Festschrift*, Hilbert no disponía todavía de una caracterización axiomática de los números reales. En este sentido, el célebre matemático alemán percibió con inteligencia que, si su sistema axiomático incluía al axioma de Arquímedes como el único axioma de continuidad, entonces esta dificultad podía ser evitada. Es decir, si el axioma de Arquímedes figuraba como único axioma de continuidad, era posible construir una realización aritmética para el sistema axiomático a partir de un cuerpo numérico más pequeño, como por ejemplo, un cuerpo *numerable* formado por números algebraicos. Luego, de acuerdo con esta interpretación, la negativa de Hilbert de trabajar en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* con la geometría analítica cartesiana como 'modelo' único de sus axiomas, se explica en virtud de las dificultades que conllevaba tener que dar cuenta de las propiedades del sistema de los números reales.

Por otra parte, señalan estos autores, esta estrategia era a su vez totalmente coherente con los intereses que se dejan traslucir en las investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la geometría. Es decir, un rápida mirada sobre su libro muestra que el problema de la consistencia de la geometría euclídea, o más precisamente, la cuestión de probar la consistencia de la geometría mostrando que su sistema de axiomas podía ser reducido a los axiomas de los números reales, no era en este momento de ningún modo una preocupación central. En efecto, Hilbert le dedica allí al problema de la consistencia sólo dos páginas, limitándose meramente a *señalar* que la geometría cartesiana podía ser utilizada para demostrar la consistencia de sus axiomas para la geometría sintética. En suma, la caracterización axiomática de los reales presentada en (Hilbert 1900b), donde el axioma de completitud era el encargado de asegurar la propiedad de completitud del conjunto de los números reales, fue fundamental para que Hilbert decidiera casi inmediatamente trabajar con el continuo de los números reales como única realización aritmética de sus axiomas para la geometría.

Ahora bien, aunque en mi opinión esta explicación es en gran medida correcta, existen no obstante otros aspectos que pueden ser ahora tenidos en cuenta. En particular, esta tarea puede ser emprendida gracias al interesantísimo material que aportan las notas de Hilbert para clases [*Vorlesungen*] sobre geometría y aritmética, correspondientes al período que se extiende entre 1894 y 1905.[2] Mi objetivo en las páginas que siguen será entonces arrojar luz sobre el contexto que rodea a la decisión de Hilbert de adaptar su axioma de completitud para los números reales e incorporarlo en el sistema axiomático para la geometría.

Para ello, intentaré mostrar en primer lugar que la 'completitud' de la que este axioma habla, de ningún modo se refiere a la completitud del *sistema axiomático*, en un sentido estricto. Este hecho, advertido explícitamente por Hilbert en un período posterior, en ocasiones no es expresado claramente en la

[2] Sobre el carácter de estas notas manuscritas véanse Hallett y Majer (2004) y Corry (2004).

literatura. En segundo lugar, argumentaré que estas discusiones no sólo permiten ganar mayor claridad respecto de cómo Hilbert juzgó la naturaleza y la función del axioma de completitud en su sistema axiomático para la geometría elemental, sino que además hacen posible distinguir ciertas diferencias importantes entre el papel que este axioma cumple en el sistema de axiomas para los reales y en el sistema para la geometría. En tercer lugar, defenderé que la indagación que llevaremos a cabo puede entregar resultados interesantes en torno al modo en que Hilbert consideró la importancia de la propiedad 'metalógica' de completitud, en este período temprano de sus investigaciones axiomáticas en el campo de la geometría. Una elucidación de estos tres puntos, sostendré finalmente, aporta elementos valiosos para alcanzar una persepectiva mejor contextualizada del abordaje axiomático a la geometría desarrollado por Hilbert hacia fines del siglo XIX y principios del siglo XX.

2. Completitud y continuidad

2.1. El sistema original del Festschrift *(1899)*

El sistema de axiomas para la geometría euclídea, presentado por Hilbert en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, estaba conformado por veinte axiomas divididos en cinco grupos: Grupo I: axiomas de incidencia (siete axiomas); Grupo II: axiomas de orden (cinco axiomas); Grupo III: axioma de las paralelas; Grupo IV: axiomas de congruencia (seis axiomas); Grupo V: axioma de continuidad.

En función de nuestro interés, se sigue de suyo que el grupo de axiomas de continuidad merece especial atención. Como hemos mencionado, en el *Festschrift* este grupo estaba conformado únicamente por el axioma de Arquímedes, de acuerdo a la siguiente versión:

> **Axioma de Arquímedes**: Sea A_1 un punto cualquiera sobre una recta situado entre dos puntos cualesquiera dados A y B. Tómense luego los puntos A_2,A_3, A_4 $\dots$, de manera que A_1 se encuentra entre A y A_2, A_2 entre A_1 y A_3, A_3 entre A_2 y A_4, etc.; además dispóngase que los segmentos
>
> $$A\,A_1,\ A_1\,A_2,\ A_3\,A_4,\ \dots$$
>
> son iguales entre sí. Luego, en la serie de puntos A_2, A_3, A_4, $\dots$, siempre hay un punto A_n, tal que B se encuentra entre A y A_n.

Figura 1: Axioma de Arquímedes (Hilbert 1899, p. 19)

Un papel muy importante que desempeña el axioma de Arquímedes en la geometría elemental es que permite fundamentar el proceso de medición – por ello también es conocido como axioma de la medida –, dando lugar a la introducción de números. Es decir, si bien en base a los axiomas I–III (incidencia, orden y congruencia), es posible comparar la longitud de segmentos, sólo a partir del axioma de Arquímedes podemos definir para cada segmento de manera única un número (positivo), que se identifica con la longitud de ese segmento. Dicho de otro modo, el axioma de Arquímedes hace posible la introducción de números en la geometría, en tanto permite que, junto con el conjunto de todos los segmentos, quede completamente determinado el conjunto de sus longitudes.

Ahora bien, por sí solo el axioma de Arquímedes no alcanza para que las longitudes de los segmentos cubran todos los números reales; o sea, para garantizar recíprocamente que, cualquiera sea el número real $a > 0$, existe un segmento cuya longitud se corresponde con él. Por el contrario, para ello es necesario agregar un nuevo axioma de continuidad. Como se sabe, algunas de las alternativas usuales son el principio de continuidad de Dedekind[3], algún principio equivalente como el axioma del supremo, o el principio conocido como el axioma de Cantor de intervalos encajados. Sólo apelando a alguno de estos principios es posible asegurar que entre el conjunto ordenado de todos los puntos de una recta y el conjunto ordenado de los números reales puede establecerse una correspondencia uno–a–uno, de modo tal que los elementos correspondientes se encuentran en igual relación de orden, *i.e.*, *la continuidad de la recta.*

Por otro lado, el sistema de coordenadas para la recta, el plano y el espacio que puede establecerse exclusivamente utilizando el axioma de Arquímedes sólo puede corresponderse con un cuerpo numérico arquimediano numerable, como por ejemplo los números racionales. Para obtener una correspondencia biunívoca con todos los números reales – *i.e.*, con la geometría analítica "cartesiana" – es necesario apelar a algún otro principio de continuidad, como por ejemplo alguno de los recién mencionados. En consecuencia, en la medida en que en el *Festschrift* el grupo de axiomas de continuidad estaba formado únicamente por el axioma de Arquímedes, Hilbert utiliza como la realización aritmética más simple de sus axiomas a un sub–cuerpo pitagórico[4] (numerable) de los reales, a saber: el cuerpo Ω de números algebraicos, definido del siguiente modo:

> Sea Ω el cuerpo de todos los números algebraicos que surgen del número 1 y de aplicar, un número finito de veces, las cuatro operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división, y la quinta operación $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω re-

[3] Por cierto, como se verá a continuación, si a los axiomas I–III (incidencia, orden y congruencia) se le agrega el principio de Dedekind – o algún axioma equivalente – entonces el axioma de Arquímedes puede ser demostrado como un teorema.

[4] Un cuerpo $\mathbb{K}$ se llama *pitagórico* si es ordenado y si, para cada elemento $a \in \mathbb{K}$, la raíz cuadrada $\sqrt{1+a^2}$ existe en $\mathbb{K}$.

> presenta un número que surge de estas cinco operaciones.[5] (Hilbert 1899, p. 454)

En lugar de apelar al sistema de los números reales, Hilbert decidió entonces trabajar en 1899 con una realización aritmética "más pequeña" como el cuerpo Ω, para mostrar la independencia y la consistencia de sus axiomas. Sin embargo, como veremos a continuación, tanto en trabajos publicados como en notas para clases anteriores al *Festschrift*, Hilbert menciona e incluso hace uso de los principios de continuidad de Dedekind y Cantor. En mi opinión, ello sugiere que, independientemente de la explicación antes aludida, existen otras razones detrás de la resolución de Hilbert de esperar hasta que un axioma de las características del axioma de completitud esté disponible, para incorporarlo como segundo axioma de continuidad. Más aún, considero que intentar exhibir estas razones puede contribuir a ganar claridad respecto de cómo Hilbert apreció la naturaleza del axioma de completitud, a menudo leído en una clave demasiado modelo–teórica, y por ello, anacronista.[6]

2.2. El axioma (geométrico) de completitud

El axioma de completitud, añadido en la primera edición francesa (Hilbert 1900a) y luego a partir de la segunda edición alemana en adelante (Hilbert 1903), es el siguiente:

> **Axioma de completitud**: Los elementos (puntos, líneas, planos) de la geometría forman un sistema de objetos que, si se mantiene la totalidad de los axiomas antes mencionados, no es capaz de ser extendido; esto es, no es posible añadir al sistema de puntos, líneas y planos otro sistema de objetos, de modo que en el sistema obtenido por esta composición los axiomas I–V.1 sean válidos.

Aquello que ha llamado más la atención respecto de este axioma es que el modo peculiar en el que está formulado le da un carácter más bien diferente respecto del resto de los axiomas. En efecto, mientras los axiomas I–V.1 hablan directamente de los elementos básicos del sistema, y predican relaciones sobre ellos, el axioma de completitud se refiere en cambio a los axiomas anteriores y a las posibles realizaciones de los axiomas. En otras palabras, mientras que los axiomas I–V.1 pueden ser formalizados en un lenguaje de primer orden, el axioma de completitud requiere de un lenguaje de segundo orden, en la medida en que implica la cuantificación sobre 'modelos' de los axiomas.[7] Este rasgo ha provocado que en general se enfatice el carácter "lógicamente complejo" del axioma de completitud, en comparación con el resto de los axiomas. Asimismo,

[5] En breve, lo que se exige es que el cuerpo Ω sea cerrado bajo las operaciones de $+$, $-$, $\times$, $\div$ y la quinta operación de $\sqrt{1+\omega^2}$.

[6] La perspectiva 'modelo-teórica' abierta por los trabajos de Hilbert en geometría, como así también algunas limitaciones de esta interpretación, han sido analizadas en Demopoulos (1994).

[7] Hablar del axioma de completitud como un axioma de segundo orden es sin dudas anacronista, puesto que en esta época no existía una distinción conceptual clara entre lógica de primer y segundo orden.

es también común que en la literatura se lo identifique como un axioma "metamatemático", en la medida en que predica relaciones entre los axiomas y sus 'modelos'. Sin embargo, en mi opinión esta lectura puede desviar la atención de su verdadero contenido y su función dentro del sistema axiomático, al menos como fue pensada por Hilbert inicialmente. Analicemos entonces el contenido del axioma de completitud.

En primer lugar, el axioma establece la completitud *del sistema de los elementos geométricos*; o más precisamente, fija una condición de maximalidad sobre el conjunto de los objetos gobernados por los axiomas I–V.1. La condición de maximalidad se expresa mediante la afirmación de que no es posible extender el espacio por medio de la introducción de nuevos elementos (puntos, líneas, etc.) y conservar al mismo tiempo la validez de los anteriores axiomas. Hilbert aclara además cómo debe ser entendida la extensión del sistema y la "conservación" de los axiomas: el axioma de completitud exige que una vez que el sistema haya sido extendido por medio de la introducción de nuevos elementos u objetos (puntos, líneas, etc.), las condiciones establecidas por los axiomas deben mantenerse; ello es, las relaciones fijadas antes de la extensión – orden, congruencia, etc. – entre los distintos elementos no deben ser violadas cuando un nuevo elemento es introducido en el sistema de los objetos geométricos. Para ilustrar esta idea por medio de un ejemplo, un punto que antes de la extensión se encontraba entre dos puntos, continúa estando entre ellos después de la extensión. El axioma de completitud afirma que una extensión del sistema de objetos caracterizado por los axiomas, tal como ha sido recién descripta, no es posible (Hilbert 1903, p. 17).

Ahora bien, la consecuencia que tiene la incorporación de este axioma es que la *única* realización aritmética que podrá satisfacer a los axiomas I–V. 1 y al axioma de completitud es el cuerpo ordenado completo o maximal de los números reales, y por lo tanto, la geometría analítica construida sobre los números reales. Es decir, es claro que una geometría analítica construida sobre $\mathbb{Q}$ u Ω contradice el axioma de completitud: siempre es posible extender estas geometrías añadiendo nuevos puntos sobre la línea (los puntos que representen números irracionales o irracionales trascendentes respectivamente) y respetar al mismo tiempo las relaciones de orden establecidas previamente por los otros axiomas, lo cual contradice lo afirmado por el axioma de completitud. Por ejemplo, si A, B, C, D son cuatro puntos sobre la línea racional, y AB es congruente con CD, entonces ambos segmentos siguen siendo congruentes incluso cuando yo añado nuevos puntos entre A y B.

En resumen, el axioma de completitud postula de un *modo indirecto* la continuidad de los objetos geométricos, o de acuerdo a su versión lineal, la continuidad de la línea.[8] Es decir, la continuidad lineal es postulada de un mo-

[8] En la séptima edición de 1930, Hilbert presenta una nueva versión del axioma de completitud:

> **Axioma de completitud lineal**: una extensión del sistema de puntos sobre una línea con sus relaciones de orden y congruencia, que preservaría las relaciones exis-

do indirecto puesto que, a diferencia de los otros principios de continuidad, no se afirma directamente la existencia de nuevos puntos sobre la línea. Por el contrario, el axioma de completitud sólo afirma que el *único* sistema numérico que puede servir como una realización aritmética es el cuerpo ordenado completo de los reales, y por ende, la geometría analítica basada en los números reales. A su vez, ésta es la función que Hilbert destaca constantemente del axioma de completitud. Por ejemplo, en la traducción al francés señala que "este axioma hace posible la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de una línea y todos los números reales" (Hilbert 1900a, p. 26).[9] Puede decirse entonces que la cuestión de la "completitud" surge originalmente en el contexto de evitar la laguna entre la geometría cartesiana y el sistema de axiomas de Hilbert para la geometría sintética. Es decir, por medio del axioma de completitud Hilbert pretende demostrar que no puede haber puntos en aquella geometría cuya existencia no pueda ser probada a partir de su sistema de axiomas. Empero el hecho de que esta "paridad deductiva" entre el sistema de axiomas de Hilbert y la geometría cartesiana es una consecuencia inmediata del axioma de completitud, no debe hacernos perder de vista que lo que afirma el axioma de completitud es la continuidad del *sistema de los objetos geométricos*, y no la propiedad de completitud del sistema axiomático. Si ese fuera el caso, entonces se trataría de una propiedad metalógica del sistema axiomático que debería ser demostrada, y no simplemente postulada.

3. Ventajas del axioma de completitud

En virtud de la relación recién señalada entre el axioma de completitud y las condiciones de continuidad, una serie de interrogantes se plantea naturalmente. La ausencia del axioma de completitud en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* tiene como consecuencia que el sistema de axiomas para la geometría sintética es incompleto respecto de la geometría analítica basada en los números reales, en tanto no es posible establecer una correspondencia uno–a–uno entre los elementos de ambos sistemas. Pero entonces cabe preguntarse: más allá de la decisión de Hilbert de no trabajar con los números reales como la única realización aritmética de sus axiomas para la geometría: ¿Qué otras razones pudieron llevarlo a dejar "incompleto" su sistema de axiomas en el *Festschrift*, al rechazar otras alternativas disponibles para el axioma de com-

---

> tentes entre los elementos originales así como también las propiedades fundamentales del orden y congruencia lineal que se siguen de los axiomas I–III, y del axioma V.1, es imposible. (Hilbert 1930, p. 30)

La nueva versión del axioma de completitud sólo exige que no sea posible añadir nuevos puntos sobre la línea y mantener la validez de los axiomas que describen el orden y congruencia lineal. Que tampoco puedan ser añadidos, sin generar contradicciones, nuevas líneas y planos, es una consecuencia de la "completitud lineal". La versión original del axioma de completitud se demuestra entonces como un "teorema de completitud".

[9] Véase además Hilbert (1903, p. 17).

pletitud? O puesto de otro modo: ¿Qué características peculiares del axioma de completitud motivaron a Hilbert a incorporarlo casi inmediatamente al grupo de axiomas de continuidad, cuando hubiese sido posible alcanzar *antes* los mismos resultados, apelando a alguno de los otros postulados de continuidad?

En relación a estos interrogantes, Hilbert realiza en la edición francesa (Hilbert 1900a) y en la segunda edición alemana (Hilbert 1903), un par de observaciones muy interesantes, pero que en cierto modo pasan inadvertidas en el contexto de su exposición en *Fundamentos de la geometría*. Afortunadamente, sus cursos sobre geometría aportan reflexiones muy esclarecedoras.

La primera observación apunta a la relación entre el axioma de Arquímedes y el axioma de completitud. En el texto de la segunda edición, Hilbert señala que una característica fundamental del axioma de completitud es que permite presentar las condiciones de continuidad a través de dos principios o axiomas esencialmente distintos:

> A través del abordaje precedente el requerimiento de continuidad ha sido descompuesto en dos componentes esencialmente diferentes, a saber: *en el axioma de Arquímedes, que cumple la función de preparar el requerimiento de continuidad, y en el axioma de completitud, que forma la piedra angular* [Schlußstein] *de todo el sistema de axiomas*. (Hilbert 1903, p. 17)

Una ventaja crucial del axioma de completitud es, a los ojos de Hilbert, que permite introducir el requerimiento de continuidad – o más precisamente, el principio de continuidad de Dedekind – por medio de dos axiomas esencialmente diferentes, ello es, lógicamente independientes. Que el axioma de completitud no es una consecuencia del axioma de Arquímedes es claro inmediatamente, puesto que existen realizaciones aritméticas ($\mathbb{Q}$, Ω), en las que el axioma de Arquímedes vale pero el axioma de completitud no. Asimismo, la afirmación recíproca es también válida, aunque su demostración ofrece mayores dificultades. De hecho, este resultado no fue probado por Hilbert, sino que las relaciones lógicas entre la propiedad de completitud establecida por su axioma homónimo y el axioma de Arquímedes, fueron esclarecidas un poco más tarde, en el notable trabajo de H. Hahn sobre sistemas de magnitudes no–arquimedianas.[10] En resumen, en la medida en que del axioma de completitud no puede deducirse el axioma de Arquímedes, es necesario concluir que ambos axiomas son lógicamente independientes, tal como lo pretendía Hilbert.

Por otro lado, la segunda observación de Hilbert está conectada con un rasgo que caracteriza su abordaje axiomático a la geometría, y que resulta muy visible en sus notas manuscritas para clases. Un objetivo central del proyecto

[10] Básicamente, Hahn mostró cómo era posible *generalizar* la condición de completitud impuesta por el axioma de Hilbert, de manera que no se necesite presuponer la validez del axioma de Arquímedes (Cf. Hahn 1907, §3). Para un estudio introductorio del trabajo de Hahn y de sus consecuencias para las investigaciones de Hilbert, véanse Ehrlich (1995, 1997). En (Ehrlich 1997) puede encontrarse un análisis del axioma (aritmético) de completitud y sus relaciones lógicas con otros principios de continuidad, a la luz de desarrollos matemáticos más generales.

hilbertiano consistió en mostrar cómo su nueva presentación axiomática de la geometría permitía ver con claridad que esta disciplina podía ser construida o fundada de un modo completamente autónomo o independiente, es decir, prescindiendo de cualquier consideración o concepto tomado de la aritmética, el análisis e incluso de la mecánica. Especialmente, Hilbert estaba muy interesado en demostrar que no sólo muchos resultados fundamentales de la geometría elemental podían ser alcanzados sin tener que apelar a principios de continuidad, sino que además las condiciones de continuidad mismas podían ser expresadas de un modo "puramente geométrico", o sea, con independencia de nociones provenientes de la aritmética y el análisis. En este sentido, el siguiente pasaje de la edición francesa resulta muy sugerente:

> Este axioma no nos dice nada acerca de la existencia de puntos límites, o acerca de la noción de convergencia; sin embargo, nos permite demostrar el teorema de Bolzano según el cual, para todo conjunto [infinito] de puntos en una línea situado entre dos puntos definidos sobre la misma línea, existe necesariamente un punto de acumulación, esto es, un punto límite. Desde un punto de vista teórico, el valor de este axioma es que lleva indirectamente a la introducción de puntos límites y, por lo tanto, permite establecer una correspondencia uno–a–uno entre los puntos de un segmento y el sistema de los números reales. Sin embargo, en lo que sigue, no haremos uso en ninguna otra parte de este axioma. (Hilbert 1900a, p. 25–26)[11]

Hilbert le atribuye así un carácter "puramente geométrico" al axioma de completitud, ausente en los otros postulados de continuidad. Este rasgo puede entenderse como sigue: tal como ocurre con todos los axiomas del sistema original del *Festschrift*, el axioma de completitud no utiliza subrepticiamente conceptos del análisis, como las nociones de límite, sucesión, convergencia, punto de acumulación o punto límite, etc. Sin embargo, aunque dicho axioma no emplea conceptos del análisis, a partir de él puede demostrarse la existencia de puntos límite para toda sucesión acotada de puntos sobre una línea. En suma, las virtudes del axioma de completitud residen en que: *i)* permite descomponer las condiciones de continuidad en dos principios independientes; *ii)* no introduce ninguna noción ajena a la geometría.

4. Alternativas para el axioma de completitud

4.1. Continuidad de Dedekind y el teorema de Bolzano–Weierstrass

Las dos observaciones anteriores indican palmariamente que una cuestión crucial para comprender las características peculiares que Hilbert vislumbra en el axioma de completitud (en su versión geométrica), consiste en identificar sus diferencias respecto de otros principios alternativos para postular o garantizar la continuidad lineal. De particular interés resultarán el célebre teorema de

[11] Hilbert repite esta observación en la segunda edición alemana Hilbert (Cf. 1903, p. 17), agregando además que el axioma de completitud permite también demostrar que para cada cortadura de Dedekind existe un elemento correspondiente en el sistema.

Bolzano–Weierstrass y el principio de continuidad de Dedekind, mencionados por Hilbert en numerosas oportunidades. Este último fue formulado por Dedekind en 1872, en su trabajo "Continuidad y números irracionales" (Dedekind 1872):

> **Principio de continuidad de Dedekind**: Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes. (Dedekind 1872, p. 85)

El principio de Dedekind, que postula directamente la continuidad de la recta, se explica en función de su construcción de los números irracionales como corduras o particiones de números racionales. Éste es además un principio de continuidad muy fuerte, puesto que *por sí solo* basta para garantizar la completa coordenatización de los puntos de la línea con los números reales. Por otro lado, dicho principio es equivalente al axioma del supremo, a través del cual es habitual actualmente formular la propiedad de completitud de los números reales.[12] Ahora bien, asumiendo el principio de continuidad de Dedekind – o indistintamente, el axioma del supremo – es posible probar fácilmente el conocido teorema de Bolzano–Weierstrass sobre la existencia de puntos límites. En una formulación actualizada, este teorema reza así:

> **Teorema de Bolzano–Weierstrass**: Todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un punto de acumulación o punto límite.[13]

Es oportuno mencionar aquí estos dos principios, en tanto que fueron la primera alternativa considerada por Hilbert como axiomas de continuidad. En el semestre de invierno de 1893/1894, Hilbert anunció, todavía en Königsberg, un curso titulado "Die Grundlagen der Geometrie" (Hilbert 1894). Este curso constituyó su primer abordaje axiomático a la geometría. Como un problema central, Hilbert se propone indagar allí la cuestión muy discutida en el último tercio del siglo XIX, de cuál es el papel que juegan las condiciones de continuidad en la geometría elemental.[14] En efecto, Hilbert se plantea en este curso dos

---

[12] Axioma del supremo: Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales posee un supremo.

[13] Para una discusión histórica sobre el teorema de Bolzano–Weierstrass véanse Ferreirós (2007) y Moore (2000).

[14] Esta controversia fue iniciada, principalmente, por una serie de artículos de Klein (1871, 1873, 1874), en donde el autor advertía que a los métodos desarrollados por von Staudt para introducir coordenadas en el plano y en el espacio proyectivo, se les debía añadir un axioma de continuidad (puntualmente, el axioma de Cantor–Dedekind). Luego, la posición de Klein atrajo un gran número de simpatizantes, aunque por supuesto hubo excepciones importantes. Un claro ejemplo fue Pasch (1882), quien además ejerció una influencia destacada en las investigaciones axiomáticas de Hilbert. Asimismo, Toepell (1986) ha mostrado que estas discusiones respecto del papel de las condiciones de continuidad en la coordenatización de la geometría euclídea y proyectiva alimentó

objetivos que luego serán centrales para sus trabajos posteriores: por un lado, investigar qué axiomas son responsables de la estructura de un "cuerpo ordenado" sobre la línea; en segundo lugar, y relacionado con lo anterior, determinar qué axiomas son necesarios para conseguir una completa coordenatización de los puntos de una línea con los números reales (Hilbert 1894). En cuanto a este último objetivo, el camino elegido por Hilbert fue utilizar un axioma de continuidad que postule la existencia de un punto límite, o más precisamente del supremo, para un conjunto infinito y acotado de puntos de la línea (Hilbert 1894, p. 92); en otras palabras, un axioma prácticamente equivalente al teorema de Bolzano–Weierstrass sobre la existencia de puntos límites. Hilbert recurre nuevamente a este axioma de continuidad en una carta a F. Klein (Toepell 1986, p. 105), fechada el 14 de agosto de 1894 y publicada más tarde en los *Mathematische Annalen* (Hilbert 1895). El axioma es el siguiente:

> **Axioma de continuidad**: Si A_1, A_2, A_3, es una sucesión infinita de puntos de una recta a y B es otro punto de a, de tal clase que en general A_i se encuentra entre A_h y B, siempre que el índice h sea menor que i, entonces existe un punto C con la siguiente propiedad: todos los puntos de la sucesión infinita A_2, A_3, A_4,...se encuentran entre A_1 y C, y si C'es otro punto, para el que ello también vale, entonces C se encuentra entre A_1 y C'.

Este axioma afirma de modo directo la existencia de un punto límite para una sucesión infinita y acotada de puntos sobre una línea. Más precisamente, por medio de la última condición ("Si C'es otro punto, para el que ello también vale, entonces C se encuentra entre A_1 y C'"), se identifica al punto límite C con el supremo. Es por ello que quizás podamos referirnos a él aquí como "axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind". Asimismo, es importante resaltar que por medio de este axioma, Hilbert impone una condición muy fuerte de continuidad, a saber: el axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind no sólo garantiza por sí mismo la continuidad de la recta, sino que además de él se puede obtener el axioma de Arquímedes como una consecuencia.

Ahora bien, Hilbert no se limitó a adoptar esta alternativa en sus primeros abordajes axiomáticos, sino que incluso recurrió a este axioma de continuidad en su curso del semestre de invierno de 1898/99, "Elemente der euklidischen Geometrie" (Hilbert 1898/1899a), texto en el que se apoya ampliamente la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1898/1899a, p. 377). Hilbert reconoce además allí las coincidencias de su axioma con el principio de continuidad de Dedekind:

> En el modo de hablar de la teoría de conjuntos, la proposición afirma la existencia de un punto límite en un conjunto infinito de puntos. Es completamente innecesario señalar aquí la analogía de esta proposición con la teoría de las cortaduras de Dedekind. (Hilbert 1898/1899a, p. 378)

En realidad, el axioma de Hilbert no sólo afirma la existencia de un punto límite sino además la existencia del supremo; por lo tanto, es equivalente

notoriamente el interés de Hilbert por los fundamentos de la geometría.

al postulado de continuidad de Dedekind. Como consecuencia, si este último axioma de continuidad es incluido en el sistema de axiomas para la geometría elemental, se obtiene un isomorfismo con el cuerpo de los números reales. Por el contrario, si se asume únicamente el axioma de Arquímedes, la correspondencia uno–a–uno sólo será posible con un cuerpo ordenado arquimediano ($\mathbb{Q}$, Ω, etc.).

Luego, como sabemos, en el *Festschrift* el axioma de Arquímedes aparece como único axioma de continuidad. En las notas para clases recién citadas, Hilbert no se explaya respecto de los motivos que lo llevaron a no optar por el axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind, previamente utilizado por él. Sin embargo, no es difícil hallar una explicación: el axioma de continuidad empleado por Hilbert en diversas oportunidades – (Hilbert 1894, 1895, 1898/1899a) – impone una condición de continuidad muy fuerte, en tanto que no sólo hace posible la completa coordenatización de los puntos de una línea y los números reales, sino que además de él puede deducirse el axioma de Arquímedes. Es decir, si junto con aquel axioma de continuidad se suponen los axiomas I–III, es posible entonces demostrar el axioma de Arquímedes como un teorema (Enriques 1907, 37).

Esta consecuencia resulta empero sumamente indeseable si se tienen en cuenta algunas de las investigaciones y resultados más importantes alcanzados por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*. Sólo por mencionar algunos de los ejemplos más importantes: *i.*) la prueba de independencia del axioma de Arquímedes, y la construcción para tal propósito, de geometrías no–arquimedianas que por sí mismas resultan interesantes[15]; *ii.*) las nuevas pruebas de los teoremas clásicos de Desargues y Pascal, en las que no se apela a ninguna condición de continuidad, *i.e.,* al axioma de Arquímedes; *iii.*) la elaboración de distintas álgebras de segmentos en base a aquellos teoremas fundamentales, es decir, con independencia de los axiomas de continuidad[16]; *iv.*) la novedosa demostración de los teoremas de Legendre[17]; *v.*) la demostración del teorema clásico que afirma que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, en la que Hilbert utiliza sólo una versión más débil del axioma de congruencia de triángulos.[18] Todos estos resultados, considerados por Hilbert como contribuciones novedosas que exhibían el poder de su método axiomático para alcanzar nuevos y originales conocimientos, requerían que *el axioma de Arquímedes sea presentado como un axioma separado e independiente*. En consecuencia, un axioma de continuidad como el de Bolzano–Dedekind resultaba enteramente inadecuado en el contexto de las investigaciones axiomáticas llevadas a cabo

---

[15] Véase Hilbert (1899, §12). Sobre la importancia de Hilbert – y sus discípulos – en el desarrollo de sistemas geométricos y aritméticos no–arquimedianos véanse Cerroni (2007) y Ehrlich (2006).

[16] Véase Hilbert (1899, §14 y cap. V).

[17] Véase (Hilbert 1898/1899a, pp. 340–343) y (Hilbert 1902b, pp. 566–568).

[18] Véase Hilbert (1902b, pp. 551–556). Estos últimos dos puntos son examinados en Hallett (2008).

por Hilbert.

En suma, de lo anterior se colige que el objetivo del axioma (geométrico) de completitud era asegurar la completa coordenatización del sistema de axiomas para la geometría elemental con el cuerpo de los reales, *sin apelar a un postulado de continuidad tan fuerte como el axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind*. En otras palabras, el axioma de completitud, en tanto *complemento* del axioma de Arquímedes, permitía conseguir los mismos efectos que aquel axioma de continuidad más fuerte, sin interferir en cambio en las investigaciones que Hilbert consideró más fundamentales en su libro. Pero antes de adelantar una conclusión, hagamos una breve referencia a la otra alternativa disponible para el axioma de completitud.

4.2. El axioma de Cantor de intervalos encajados

Las referencias de Hilbert al principio conocido como el axioma de Cantor de intervalos encajados son mucho menos precisas, en comparación con las alusiones al mencionado postulado de continuidad de Bolzano–Dedekind. Más aún, hasta donde alcanza mi conocimiento, en este período temprano se restringe a la siguiente observación:

> En virtud del axioma de Arquímedes se puede conseguir ahora la introducción del número en la geometría (...). De este modo a cada punto P de la línea le corresponde un número real completamente determinado. Pero que también en verdad a cada número le corresponderá un punto de la línea, no se sigue de nuestros axiomas. Ello puede conseguirse a través de la introducción de puntos irracionales – ideales – (axioma de Cantor) (Hilbert 1898/1899a, p. 390–91).

Hallett ha señalado que en este pasaje, Hilbert se refiere a un axioma formulado por Cantor en su célebre artículo de 1872 sobre series trigonométricas (Cantor 1872)(Hallett y Majer 2004, p. 428). Tal principio geométrico, llamado 'axioma' por el mismo Cantor, afirma que a cada magnitud numérica (*i.e.*, a cada número real) le corresponde un punto determinado de la recta. [19] Por el contrario, el principio que actualmente se conoce como el postulado geométrico de Cantor de intervalos encajados, es un axioma diferente.[20] Siguiendo la

[19] Cf. Cantor (1874, p. 128). En realidad, este 'axioma' era conocido en Alemania como *axioma de Cantor–Dedekind*. Por ejemplo, es posible encontrar ya esta designación en un artículo de F. Klein (1874, p. 347), quien como sabemos tuvo una estrecha relación con Hilbert. Agradezco a un evaluador de *Theoria* por esta observación.

[20] Cantor utilizó el principio de intervalos encajados, aunque implícitamente, en su conocido artículo de 1874, donde prueba por primera vez que el conjunto de los números reales es no–numerable, sobre la base de un argumento diferente a la diagonalización Cantor (Cf. 1874). Sin embargo, Cantor reconoce también que este axioma no sólo fue utilizado previamente por Bolzano y Weierstrass, sino que además su 'esencia' puede ser rastreada hasta los trabajos sobre teoría de números de Lagrange, Legendre, Cauchy y Dirichlet Cantor (Cf. 1879/84, p. 212). Es por ello que el axioma de intervalos encajados también es llamado *principio de Bolzano–Weierstrass* (Cf. Ferreirós 2007, p. 139–141).

formulación de Enriques (1907), citada usualmente en los trabajos geométricos de la época, este axioma reza así:

> Si en un segmento lineal OM se dan dos sucesiones infinitas de segmentos OA, OB, OC,..., OA', OB', OC',..., de las cuales la primera crece y la segunda decrece de manera que, los segmentos AA', BB', CC', ... decrecen constantemente y finalmente son menores que cualquier segmento dado [*jede gegebene Strecke unterschreiten*], entonces en el segmento OM *existe un punto* X tal que, OX es mayor que todos los segmentos de la primera sucesión y menor que todos los segmentos de la segunda. (Enriques 1907, p. 36)

Es preciso reconocer que, en virtud del pasaje arriba citado, es imposible aseverar de manera conclusiva que Hilbert se refiere en sus notas al postulado geométrico de Cantor de intervalos encajados. Sin embargo, dada su importancia en las discusiones posteriores en torno al axioma de completitud en su versión geométrica, considero que es pertinente hacer aquí una breve mención.

En primer término debe señalarse que, a diferencia del principio de continuidad de Bolzano–Dedekind, del axioma de intervalos encajados no puede deducirse el axioma de Arquímedes como una consecuencia Baldus (1928a, 1930). Es decir, sólo si asumimos conjuntamente el axioma de Cantor y el axioma de Arquímedes puede asegurarse la continuidad de la línea. Este axioma no adolece entonces de la desventaja que Hilbert encuentra en el principio de continuidad de Dedekind. Más aún, el axioma de Cantor y el axioma de completitud son lógicamente equivalentes (Efímov 1984, pp. 197–201)., de modo que el primero cumple con la condición exigida por Hilbert, de que la continuidad sea presentada a través en dos principios independientes. Además, el axioma de intervalos encajados posee la ventaja, como lo señala Bernays, de que su estructura no es "lógicamente compleja" como la de aquél, y de expresar directamente – y no de un modo encubierto – una condición de continuidad (Bernays 1935, pp. 197–198). En cambio, a primera vista un incoveniente consistiría en que, a los ojos de Hilbert, este axioma no podría ser considerado como 'puramente geométrico', puesto que allí el concepto de sucesión es esencial.[21]

---

[21] Un interesante análisis del axioma de Cantor, en el contexto de la geometría elemental, se encuentra en (Baldus 1928b, 1930) y (Schmidt 1931). Más precisamente, estos autores analizan distintas formulaciones del axioma. Brevemente, a la versión que hemos citado de Enriques (1907), que impone la condición de que la longitud de los segmentos AA', BB', CC', ... tienda a cero, la denominan axioma de Cantor *métrico*. Por el contrario, si se suprime este requerimiento, entonces se llega a una versión más general del axioma, que afirma que existe un punto en el interior de *todos* los encajes de segmentos, no sólo en aquellos cuya longitud tiende a cero. A esta versión la llaman axioma de Cantor *topológico*. Sin embargo, ambos autores prueban que en toda *geometría arquimediana* es posible evitar la condición presente en el axioma *métrico*, puesto que ambas versiones del axioma de Cantor son *equivalentes* si se asume previamente el axioma de Arquímedes. Hertz (1934) demuestra, además, que del axioma de Cantor *topológico* tampoco se sigue el axioma de Arquímedes como una consecuencia.

Finalmente, cabe argumentar que los supuestos señalados por Hilbert no parecen ser su-

Luego, podemos ver claramente cómo el axioma de completitud constituía para Hilbert la opción más adecuada para la formulación de las condiciones de continuidad, puesto que a su entender ninguna de las alternativas disponibles satisfacía los criterios fijados por él para este grupo de axiomas.

5. *Categoricidad y el axioma de completitud*

Una última cuestión que quisiera abordar es la relación entre el axioma de completitud – en su versión geométrica – y la noción categoricidad. Como habrá podido notarse, existe una fuerte conexión entre el axioma de completitud y la categoricidad del sistema axiomático. En efecto, en el sistema de axiomas para los números reales, la función del axioma de completitud es garantizar que cualquier posible realización o 'modelo' de los axiomas sea isomorfa con el sistema de los números reales. Más precisamente, mientras que los primeros diecisiete axiomas de (Hilbert 1900b) definen un cuerpo arquimediano ordenado ($\mathbb{Q}$, Ω, $\mathbb{R}$), cuando se introduce el axioma de completitud el sistema axiomático caracteriza en cambio un cuerpo arquimediano ordenado maximal o completo, *i.e.*, el sistema de los números reales. Así, Hilbert manifiesta explícitamente que la consecuencia de la introducción del axioma de completitud en el sistema de axiomas para los números reales es la 'categoricidad': "En primer lugar, quisiera ahora hacer plausible que el sistema de cosas definido a través de los 18 axiomas es *idéntico con el sistema de todos los números reales*" (Hilbert 1905a, p. 18).

Del mismo modo, la categoricidad es también un resultado de la introducción del axioma de completitud en el sistema de axiomas para la geometría euclídea. Hilbert reconoce esta consecuencia visiblemente, como resulta elocuente en el siguiente pasaje:

> Como puede verse, existe un número infinito de geometrías que satisfacen los axiomas I–IV, V,1. Sin embargo, sólo hay una, a saber la geometría cartesiana, en la que el axioma de completitud también es válido al mismo tiempo. (Hilbert 1903, p. 20)[22]

ficientes para considerar el postulado de intervalos encajados como ajeno a la geometría, dado que sería posible incluso formular este axioma evitando la idea de sucesión.

[22] Es importante aclarar que, aunque el término "categoricidad" se encuentra por primera vez en Veblen (1904), en este período temprano Hilbert contaba ya con una concepción relativamente precisa de las nociones de categoricidad e isomorfismo. Evidencia al respecto puede encontrarse en el siguiente pasaje de las notas para el curso "Zahlbegriff und Quadratur des Kreises" Hilbert (1897): "Los axiomas definen unívocamente [*eindeutig*] un sistema de objetos, *i.e.*, si se tiene otro sistema de objetos que satisface todos los axiomas anteriores, entonces los objetos del primer sistema son correlacionables uno–a–uno [*umkehbar eindeutig abbildbar*] con los objetos del segundo sistema" Hilbert (1897, p. 42). Hilbert presenta además caracterizaciones incluso más precisas en Hilbert (1905a, p.21) y Hilbert (1905b, pp. 17-18). Sin embargo, debemos reconocer que una definición formal de las nociones de categoricidad e isomorfismo sólo pudo ser alcanzada por Hilbert en un período bastante posterior, en tanto que una clara distin-

Ahora bien, aunque la categoricidad es una consecuencia de la inclusión del axioma de completitud, tanto en el sistema de axiomas para los reales como para la geometría, existen al respecto diferencias importantes entre am- bos sistemas que considero oportuno destacar. En particular, una diferencia significativa fue advertida por Baldus (1928a), en un artículo que influyó en algunas modificaciones introducidas en la séptima edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1930). Básicamente la observación es la siguiente. Si del sistema de axiomas de Hilbert se elimina el axioma de las paralelas, entonces se obtiene un sistema axiomático para la geometría absoluta, *i.e*, la geometría sin paralelismo, que es la estructura común que comparten las geometrías euclídeas y no–euclídeas. Asimismo, a partir de los axiomas que caracterizan ahora la geometría abso-luta, es posible introducir coordenadas sobre la línea del modo habitual. Luego, si por otro lado el axioma de completitud es sustituido por el axioma Cantor[23], se puede lograr una correspondencia uno–a–uno entre los puntos de la línea y los números reales. El sistema axiomático que define a la geometría absoluta es entonces *completo* en el sentido del axioma de completitud, es decir, no puede ser extendido añadiendo nuevos elementos (puntos) al sistema de objetos. Sin embargo, es claro que este sistema de axiomas posee múltiples realizaciones o ‘modelos’ (la geometría euclídea, la geometría hiperbólica, etc.) no isomorfos entre sí. En conclusión, es posible tener un sistema de axiomas que sea completo en el sentido del axioma de completitud, pero no categórico. En otras palabras, que un sistema axiomático sea ‘completo” en el sentido del axioma de completi-tud, no implica que sus realizaciones deban ser necesariamente todas isomorfas entre sí.

Luego, del resultado anterior se sigue una consecuencia importante. Contrariamente a lo sugerido por el modo de proceder de Hilbert en lo que respecta al axioma de completitud, la estrategia seguida en el sistema axiomático para los reales no puede ser aplicada sin más al sistema de axiomas para la geometría. En este último caso, el axioma de completitud no necesita ser la “piedra angular” [*Schlußstein*] del sistema. Es decir, en el contexto del sistema de axiomas para los números reales, los primeros diecisiete axiomas definen un cuerpo ordenado arquimediano. La función del axioma de completitud es identificar

ción conceptual entre sintaxis y semántica se encuentra recién en Hilbert (1917); sobre esta cuestión véase Zach (1999). Por otro lado, es dable mencionar que previamente la categoricidad del sistema axiomático para los números naturales fue un tema central en Dedekind (1888). En efecto, Dedekind prueba allí en detalle que dos modelos cualesquiera de sus ‘axiomas’ son isomorfos (Cf. Dedekind 1888, Teoremas 132, 133). Sobre Dedekind véase Ferreirós (2007, 2009). Un análisis histórico de las nociones de completitud y categoricidad puede verse en Awodey y Reck (2002).

[23] Esta sustitución es necesaria dado que, *en su versión original*, el axioma de completitud supone la validez del axioma de las paralelas. Si por el contrario se utiliza el axioma de completitud lineal, entonces dicho requerimiento puede ser obviado. Éste fue precisamente uno de los principales aportes del trabajo de Baldus: mostrar que el axioma de completitud no mantiene esencialmente ninguna relación con el axioma de las paralelas (Cf. Baldus 1928a).

unívocamente al cuerpo de los números reales, de entre las diversas realizaciones posibles que pueden satisfacer estos primeros diecisiete axiomas. Y ello por medio de una condición de maximalidad que establece que la única realización posible de *todos* los axiomas es un cuerpo ordenado arquimediano completo o maximal.[24] En otras palabras, sólo por medio del axioma de completitud el sistema de axiomas se vuelve categórico. Por el contrario, en el caso del sistema de axiomas para la geometría elemental, éste es más bien el verdadero significado del axioma de las paralelas. Es decir, mientras que los axiomas de los grupos I–III y V (enlace, orden, congruencia, continuidad) caracterizan la geometría absoluta – que posee como en el caso de los primeros diecisiete axiomas para la aritmética de los reales diversas realizaciones no isomorfas entre sí –, el axioma de las paralelas permite caracterizar categóricamente a la geometría euclídea. En suma, aunque en el sistema de axiomas de Hilbert la función atribuida al axioma de completitud es asegurar la categoricidad del sistema, ella no es sin embargo la función que este axioma debe desempeñar necesariamente.[25] Más bien, colocar al axioma de completitud como el último axioma del sistema axiomático, encubre en cierto modo su verdadera función en el sistema de axiomas.

6. *Consideraciones finales*

En el comienzo de este trabajo he señalado que un análisis del contexto que rodea la inclusión del axioma de completitud en el sistema de axiomas para la geometría, puede arrojar luz respecto del papel que para Hilbert desempeñó la propiedad metalógica de "completitud", en esta etapa temprana y en el contexto de sus investigaciones geométricas. Quisiera concluir entonces con algunas observaciones al respecto.

[24] Este modo de entender la función del axioma de completitud permite lograr una simplificación muy importante en su formulación. Véase, por ejemplo, Bernays (1955). Por otro lado, en esta misma línea y enfatizando la influencia de Dedekind sobre Hilbert en este período temprano, Ferreirós presenta una interesante formalización del axioma de completitud en la que se recurre a un lenguaje lógico que incluye la teoría de conjuntos, y que en ese sentido es más próximo al contexto histórico de Dedekind y Hilbert (Cf. Ferreirós 2009, p. 48).

[25] Quizás deba agregarse que, más allá de esta función determinante que desempeña el axioma de las paralelas para conseguir la categoricidad del sistema axiomático de Hilbert para la geometría euclídea, el axioma de completitud cumple también un papel importante. En efecto, el axioma de completitud es el único axioma del sistema que requiere de un lenguaje de segundo orden para ser formalizado. Luego, independientemente de cuál sea el lugar que ocupe dentro del sistema axiomático, el axioma de completitud hace posible la categoricidad, puesto que si el sistema de Hilbert fuera enteramente formalizable en un lenguaje de primer orden, entonces por el teorema de Löwenheim–Skolem (1915/1919) se sigue que no podría ser categórico. Obviamente, Hilbert no podía conocer estos resultados en una etapa inicial, aunque sería interesante indagar cuál fue, si es que existió, su reacción en un período posterior.

Hemos visto que Hilbert asevera en numerosas ocasiones, en las distintas ediciones de *Fundamentos de la geometría*, que el objetivo fundamental del axioma de completitud es hacer posible la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de la línea y los números reales. En este sentido, el axioma de completitud fue específicamente incorporado por Hilbert para garantizar que la geometría analítica "cartesiana" se convierta en la única realización (salvo isomorfismo) de sus axiomas para la geometría sintética. Sin embargo, es preciso reconocer que ésta no es la única función que dicho axioma cumple en el sistema axiomático hilbertiano. Por el contrario, el axioma de completitud es imprescindible para que *el sistema de Hilbert* logre capturar íntegramente el dominio de la geometría euclídea; y éste es, en efecto, uno de los objetivos centrales que Hilbert se plantea manifiestamente en la introducción de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899, p. 1).

Resumidamente, el problema se reduce a lo siguiente: la propiedad de intersección de dos circunferencias[26], de donde puede probarse que circunferencias y líneas se intersecan cuando deben hacerlo, no puede ser garantizada en base al sistema de axiomas original del *Festschrift*. Empero esta propiedad es esencial para llevar a cabo muchas de las construcciones de segmentos, ángulos y figuras usando las técnicas descriptas por Euclides en los *Elementos*. Por ejemplo, el teorema que afirma que un triángulo puede ser construido a partir de tres segmentos dados, tales que la suma de cualquiera dos de sus lados es siempre mayor que longitud del tercero. Este teorema es demostrado por Euclides en la proposición *I, 22*; sin embargo, allí se utiliza explícitamente la propiedad de intersección de dos circunferencias, con lo cual este problema no puede ser resuelto en el sistema axiomático original de (Hilbert 1899).[27]

El mismo problema puede ser ilustrado observando los equivalentes algebraicos de las construcciones geométricas realizables en base al sistema de axiomas, un tópico investigado en detalle por Hilbert, y en donde además realizó contribuciones importantes. Actualmente es usual afirmar que para garantizar que la totalidad de las construcciones de Euclides con *regla y compás* puedan ser realizadas, el cuerpo (numérico) abstracto construido directamente a partir de los axiomas de la geometría debe satisfacer la propiedad de un "cuerpo euclídeo" (Hartshorne 2000, p. 146):

Definición 1. *Un cuerpo $\mathbb{K}$ se llama* euclídeo *si es ordenado y si, para todo elemento $a \in \mathbb{K}$, con $a > 0$, la raíz cuadrada $\sqrt{a}$ existe en $\mathbb{K}$.*

Ahora bien, el cuerpo Ω de números algebraicos, que Hilbert construye en 1899 para proporcionar una realización aritmética de sus axiomas, no es un

[26] Dadas dos circunferencias Γ, Δ, si Δ contiene al menos un punto dentro de Γ, y Δ contiene al menos un punto fuera de Γ, entonces Δ y Γ se encontrán (exactamente en dos puntos).

[27] Una crítica similar es que, si no se presupone la propiedad de intersección de dos circunferencias, y consecuentemente, de intersección de líneas y circunferencias, entonces no es posible probar que "el círculo es una figura cerrada". Hilbert reconoce este problema en Hilbert (1898/1899a, p. 337).

cuerpo euclídeo sino un cuerpo "pitagórico"; más precisamente, un cuerpo pitagórico *minimal.* Luego, el cuerpo abstracto Ω es un *sub–cuerpo propio* del cuerpo euclídeo; y ello significa que la totalidad de las construcciones con regla y compás que caracterizan a la geometría euclídea elemental no puede ser realizada teniendo como base el sistema de axiomas original de Hilbert. En otras palabras, el sistema de axiomas no es *completo* en relación al dominio de la geometría euclídea elemental. El sistema de axiomas original no cumple así con el criterio de completitud definido por Hilbert en este período temprano, en virtud del cual el sistema axiomático debe ser construido de tal manera que sea posible obtener a partir de sus axiomas, deductivamente como consecuencias, todas aquellas proposiciones que esperamos encontrar en el dominio de la geometría euclídea.[28]

Resulta luego muy significativo observar que Hilbert era plenamente consciente de estas dificultades al momento de la redacción del *Festschrift*, e incluso un poco antes. Prueba de ello es el capítulo VII de la primera edición de *Fundamentos*, en donde analiza qué construcciones geométricas son realizables en su sistema de axiomas. En particular, Hilbert reconoce allí, aunque sólo implícitamente y en una forma más bien abstracta, que su sistema de axiomas no puede garantizar la propiedad de intersección de dos circunferencias; es decir, la existencia de los puntos de intersección entre dos circunferencias que, como dijimos, es fundamental para poder realizar muchas de las construcciones más elementales de la geometría euclídea plana.

En este capítulo, y más detalladamente en sus notas (Hilbert 1898/1899b, pp. 257–261) y (Hilbert 1898/1899a, pp. 337–340), Hilbert reconoce en primer lugar que todas las construcciones que pueden ser realizadas sobre la base de los axiomas I–V de la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, son construcciones que utilizan sólo una regla y un "transportador de segmentos" [*Streckenübertrager*]. Este último instrumento es utilizado para medir segmentos, y según Hilbert, corresponde a un "uso restringuido del compás" (Hilbert 1899, p. 80). En segundo lugar, advierte que el equivalente algebraico de las construcciones con regla y "transportador de segmentos" es un cuerpo pitagórico. Es decir, Hilbert aclara que las construcciones permitidas por su sistema de axiomas (original) pueden ser llevadas a cabo en una geometría analítica cuyas coordenadas forman un cuerpo pitagórico (minimal). En tercer lugar, en las notas de clases correspondientes al curso que antecede inmediatamente al *Festschrift*, Hilbert construye un cuerpo numérico que le permite demostrar que no todo cuerpo pitagórico es necesariamente un cuerpo euclídeo – dicho en términos algebraicos modernos –; esto es, que el cuerpo pitagórico es un sub–cuerpo propio del cuerpo euclídeo (Hilbert 1898/1899b, pp. 337–338). Y finalmente, Hilbert reconoce que la condición algebraica que corresponde a las

[28] Hilbert ofrece esta caracterización de la propiedad de completitud de un sistema axiomático en: Hilbert (1894, pp. 71-72), Hilbert (1899, p. 1), Hilbert (1900b, p. 181) y Hilbert (1905a, p. 12). Esta noción (informal) de completitud relativa ha sido ya advertida en la literatura, entre otros, por Awodey y Reck (2002) y Corry (2004).

construcciones con compás es que cada número (positivo) en el cuerpo de coordenadas posea una raíz cuadrada, i.e., que el cuerpo sea euclídeo. En función de estos resultados, Hilbert concluye que no todas las construcciones realizables con regla y compás están justificadas sobre la base de su sistema de axiomas. Y esta conclusión es expresada explícitamente en el Teorema 41 del *Festschrift* (Hilbert 1899, p. 81).

Ahora bien, un modo habitual de garantizar la existencia de los puntos de intersección entre dos circunferencias, y por lo tanto, entre una recta y una circunferencia, es a través de un principio de continuidad como el de Dedekind; y ésta fue, de hecho, una de las primeras críticas que recibió el libro de Hilbert.[29] En este sentido, el axioma de continuidad *á la Bolzano-Dedekind*, utilizado por Hilbert hasta muy poco tiempo antes de la publicación del *Festchrift*, le hubiese permitido remediar esta dificultad. Sin embargo, esta estrategia implicaba que el axioma de Arquímedes no pudiera ser presentado como un principio separado e independiente, una consecuencia absolutamente indeseada en el contexto de las investigaciones axiomáticas de *Fundamentos.*

Ante esta disyuntiva, fundamentalmente ocasionada por la carencia de una alternativa funcional como principio de continuidad, la opción elegida por Hilbert fue entonces "sacrificar" la completitud de su sistema de axiomas, antes de ver obstaculizadas aquellas investigaciones que consideró sus contribuciones más importantes a esta disciplina matemática. Y, en mi opinión, esta actitud pone claramente de manifiesto un rasgo central de su concepción del método axiomático, a saber: el método axiomático no debe entenderse sólo como una herramienta eficaz para conseguir una presentación más rigurosa y lógicamente perspicua de una teoría matemática – rasgo que por lo demás Hilbert nunca se cansó de enfatizar –, sino también, y no menos importante, como un podereso instrumento para llegar a nuevos descubrimientos matemáticos.

Finalmente, es necesario señalar que, precisamente en este rasgo fundamental que según Hilbert explicaba la inclusión del axioma de completitud en su sistema de axiomas para la geometría – i.e., la independencia del axioma de Arquímedes –, reside una dificultad notable desde un punto de vista axiomático, a saber: en la medida en que el axioma de completitud se refiere a otros axiomas y *presupone su validez*, no es posible demostrar la independencia de cualquiera de los axiomas explícitamente mencionados. En otras palabras, la peculiar forma "metalingüística" del axioma de completitud impide *demostrar* que el axioma de Arquímedes no se sigue de él como una consecuencia.[30] Esta dificultad intrínseca al axioma de completitud le fue así señalada a Hilbert por

[29] Véase Sommer (1900, p. 291). Puesto que para garantizar la propiedad de intersección de dos círculos basta con que el cuerpo coordinado sea euclídeo, la continuidad completa del espacio no es indispensable, sino que es suficiente con añadir al sistema axiomático un axioma que postule precisamente dicha propiedad. Esta vía es presentada, por ejemplo, por Hartshorne (2000). Hallett (2008, p. 247) señala sin embargo que añadir la propiedad de intersección de dos circunferencias como un axioma para asegurar la 'propiedad euclídea' parecería ser más bien una solución *ad hoc*.

[30] El primero en observar esta dificultad fue Hahn (1907, §3).

Baldus (1928a).[31]

Ante estas críticas, Hilbert optó por no realizar comentario alguno y conservar el axioma de completitud dentro de su sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental. Quizás ello sea un claro indicio de que, al igual que como fuera posteriormente recibido, Hilbert vislumbró en el axioma de completitud una de sus contribuciones más originales a la axiomática moderna.

REFERENCIAS

Awodey, Steve y Reck, Erich. 2002. Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth–Century Axiomatics to Twentieth-Century Metalogic. *History and Philosophy of Logic* 23: 1–30.

Baldus, Richard. 1928a. Zur Axiomatik der Geometrie I. Über das archimedische und das cantorsche Axiom. *Mathematische Annalen* 100: 321–333.

Baldus, Richard. 1928b. Zur Axiomatik der Geometrie II. Vereinfachungen des archimedischen und cantorschen Axioms. *Atti del Congresso Internazionale die Mathematici, Bologna 3–10 Septembre 1928* 4: 271–275.

Baldus, Richard. 1930. Zur Axiomatik der Geometrie III. Über das archimedische und das cantorsche Axiom. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 5: 3–12.

Bernays, Paul. 1935. Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik. En *David Hilbert gesammelte Abhandlungen*, volumen 3, 196–216. Berlin: Springer.

Bernays, Paul. 1955. Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome. *Mathematische Zeitschrift* 63: 219–229.

Boniface, Jacqueline. 2002. *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Paris: Ellipses.

Cantor, Georg. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihe. *Mathematische Annalen* 5: 123-132.

Cantor, Georg. 1872. Über eine Eingeschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung* 77: 258–262.

Cantor, Georg. 1879/84. Über unedliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. En *Gesammelte Abhandlungen*, ed. E. Zermelo, 1932. 139–244. Berlin: Springer.

Cerroni, Cinzia. 2007. The Contribution of Hilbert and Dehn to Non-Archimedean Geometries and their Impact on the Italian School. *Revue d'histoire des mathématiques* 13: 259–299.

Corry, Leo. 2004. *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898–1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*. Dordrecht: Kluwer.

Dedekind, Richard. 1872. Stetigkeit und irrationale Zahlen. En *Gesammelte mathematische*

[31] Poco más tarde, Paul Bernays – activo colaborador de Hilbert a partir de la sexta edición (1923) de *Fundamentos* – llegó a sostener que, dada esta "complejidad lógica" del axioma de completitud, el axioma de Cantor de intervalos encajados era preferible por sobre aquél Bernays (Cf. 1935, p. 198). Presentaciones axiomáticas más contemporáneas de la geometría elemental, que pretenden seguir en espíritu al sistema de Hilbert, utilizan el axioma de Cantor en lugar del axioma de completitud. Véanse Efímov (1984) y Guerrerro (2006).

Werke, volumen 3, 1932. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sonn. Traducción al español de José Ferreirós, Madrid, Alianza, 1998.

Dedekind, Richard. 1888. Was sind und was sollen die Zahlen?. En *Gesammelte mathematische Werke*, volumen 3, 1932. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sonn. Traducción al español de José Ferreirós, Madrid, Alianza, 1998.

Demopoulos, William. 1994. Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory. *History and Philosophy of Logic* 15: 211–225.

Efímov, Nikolái. 1984. *Geometría superior*. Moscú: Editorial Mir.

Ehrlich, Philip. 1995. Hahn's 'Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme' and the Development of the Modern Theory of Magnitudes and Numbers to Measure Them. En *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, ed. J. Hintikka, 165–214. Dordrecht: Kluwer.

Ehrlich, Philip. 1997. From Completeness to Archimedean Completeness. *Synthese* 110: 57–76.

Ehrlich, Philip. 2006. The Rise of non–Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non–Archimedean Systems of Magnitudes. *Archive for History of Exact Sciences* 60: 1–121.

Enriques, Federigo. 1907. Prinzipien der Geometrie. En *Enzyklopäadie der mathematischen Wissenschaften*, eds. W. Meyer y H. Mohrmann, volumen 3.1.1, 6-126. Leipzig: Teubner.

Ferreirós, José. 2007. *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Segunda edición Berlin: Birhäuser.

Ferreirós, José. 2009. Hilbert, logicism, and mathematical existence. *Synthese* 170: 33–70.

Guerrerro, Ana Berenice. 2006. *Geometría. Desarrollo axiomático*. Bogotá: ECOE Ediciones.

Hahn, Hans. 1907. Über die nichtarchimedischen Grössensysteme. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch–naturwissenschaftliche Klasse* 116: 601-655.

Hallett, Michael. 2008. Reflections on the Purity of Method in Hilbert's Grundlagen der Geometrie. En *The Philosophy of Mathematical Practice*, ed. P. Mancosu, 198–255. New York: Oxford University Press.

Hallett, Michael y Majer, Ulrich, eds. 2004. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*. Berlin: Springer.

Hartshorne, Robin. 2000. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer.

Hertz, Paul. 1934. Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor. *Archives des sciences physiques et naturelles* 16: 179-181.

Hilbert, David. 1894. Die Grundlagen der Geometrie (Ms.Vorlesung, WS 1893/94). En Hallett y Majer 2004.

Hilbert, David. 1895. Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe. *Mathematische Annalen* 46: 91–96.

Hilbert, David. 1897. *Zahlbegriff und Quadratur des Kreises*. Ms. Vorlesung WS 1897/8. Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 549.

Hilbert, David. 1898/1899a. Elemente der euklidischen Geometrie. En Hallett y Majer 2004.

Hilbert, David. 1898/1899b. Grundlagen der Euklidischen Geometrie (Ms. Vorlesung, WS 1898/1899). En Hallett y Majer 2004.

Hilbert, David. 1899. *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss–Weber Denkmals in Göttingen*. En Hallett y Majer 2004.

Hilbert, David. 1900a. *Les principes fondamentaux de la géometrie*. Trad. L. Laugel. Paris: Gauthier–Villars.

Hilbert, David. 1900b. Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8: 180–184.

Hilbert, David. 1902a. *The Foundations of Geometry*. Trad. E.J. Townsend. Illinois: The Open Court Publishing Company.

Hilbert, David. 1902b. Grundlagen der Geometrie (Ms. Vorlesung, SS 1902). En Hallett y Majer 2004.

Hilbert, David. 1903. *Grundlagen der Geometrie*. Segunda edición. Leipzig: Teubner. Trad.

Hilbert, David. 1905a. *Logische Principien des mathematischen Denkens*. Ms. Vorlesung SS 1905. Ausgearbeitet von E. Hellinger, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

Hilbert, David. 1905b. *Logische Principien des mathematischen Denkens*. Ms. Vorlesung SS 1905. Ausgearbeitet von M. Born, Staats- und Universitätsbiblioteck Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 558a.

Hilbert, David. 1917. *Prinzipien der Mathematik*. Ms. Vorlesung WS 1917/18. Ausgearbeitet von P. Bernays, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

Hilbert, David. 1918a. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen* 78: 405–415.

Hilbert, David. 1930. *Grundlagen der Geometrie*. Séptima edición. Leipzig: Teubner.

Klein, Felix. 1871. Über die sogenannte Nicht–Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen* 4: 573–625. Reimpreso en Klein 1921, 254–305.

Klein, Felix. 1873. Über die sogenannte Nicht–Euklidische Geometrie (zweiter Aufsatz). *Mathematische Annalen* 6: 112–145. Reimpreso en Klein 1921, 311–343.

Klein, Felix. 1874. Nachtrag zu dem 'zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie'. *Mathematische Annalen* 7: 531–537. Reimpreso en Klein 1921, 344–350.

Klein, Felix. 1921. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, volumen 1. Berlin: Springer.

Moore, Gregory. 2000. Historians and Philosophers of Logic: Are They Compatible? The Bolzano–Weierstrass Theorem as a Case of Study. *History and Philosophy of Logic* 20: 169–180

Pasch, Moritz. 1882. *Vorlesung über neuere Geometrie*. Leipzig: Teubner.

Rowe, David. 2000. The Calm before the Storm: Hilbert's Early Views on the Foundations. En *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, ed. V. Hendricks et al., 55–93. Dordrecht: Kluwer.

Schmidt, Arnold. 1931. Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie. *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch–naturwissenschaftliche* 5: 3–8.

Sommer, Julius. 1900. [Review]: Hilbert's foundations of geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society* 6: 287–299.

Toepell, Michael. 1986. *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie*. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht.

Veblen, Oswald. 1904. A System of Axioms for Geometry. *Transactions of the American Mathematical Society* 5: 343–384.

Zach, Richard. 1999. Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic. *Bulletin of Symbolic Logic* 5: 331–366.

Eduardo N. GIOVANNINI es licenciado en filosofía por la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Ha realizado estudios doctorales en la Universität Paderborn (Alemania), bajo la dirección del Prof. Dr. Volker Peckhaus, por medio de un estipendio del DAAD. Entre sus publicaciones recientes se encuentran "La concepción axiomática de la geometría de Hilbert a la luz de la Bildtheorie de Heinrich Hertz" (*Crítica* 2012) e "Intuición y método axiomático en la concepción temprana de la geometría de David Hilbert" (*Revista Latinoamericana de Filosofía* 2011)

DIRECCIÓN: Universidad Nacional del Litoral Departamento de Filosofía, Facultad de Humanidades y Ciencias - Ciudad Universitaria - Paraje El Pozo - (S3000ZAA) - Argentina. E–mail: engiovannini@conicet.gov.ar