Anplifikazio faktorearen atzean ezkutatzen dena

Elisabete Alberdi Celaya

Matematika Aplikatua Saila, Meatzeen eta Herri Lanen
Ingeniaritza Teknikoko Unibertsitate Eskola (UPV/EHU)

Laburpena: Hasierako baliodun Ekuazio Diferentzal Arrunt bat (EDA bat) askatzeko zenbakizko metodo bat darabilgunean, kontuan izan behar dira metodoaren zenbait ezaugarri. Hala nola, metodoaren ordena (mozketa-errore lokala eta globala erabilita neurtzen dena) edota metodoaren egonkortasun eremuarekin lotura duen anplifikazio faktorea.

Zenbakizko metodo baten egonkortasun eremua $\Re_A$, polinomio karakteristikoaren erroak unitatea baino txikiagoak diren plano konplexuko h puntuek osatzen dute, $\hat{h} = h\lambda_i$ izanik, h pauso-tamaina eta λ_i EDA-ren jacobitarraren autobalioa. Zenbakizko metodo bakoitzak bere egonkortasun eremua dauka, forma geometriko zehatz bat duena.

Zenbakizko metodoa erabiliz lortutako emaitzak onak izango dira mozketa-errore lokala txikia denean eta h balioak egonkortasun eremuan daudenean.

Hitz gakoak: egonkortasun-eremuak, ekuazio diferentzialak, zenbakizko metodoak.

Abstract: When we use a numerical method to solve an initial value Ordinary Differential Equation (ODE), some properties of the method have to be taken into account. Some of these properties are the order of precision of the method (which is measured in terms of the local truncation error and the global truncation error) and the amplification factor, which is closely connected with the stability region of the method.

The stability region $\Re_A$ of a numerical method is the complex $\hat{h}$-plane defined by the requirement that for all $\hat{h} \in \Re_A$, all of the roots of the characteristic polynomial of the amplification matrix have modulus less than 1, being $\hat{h} = h\lambda_i$, h the step size taken by the method and λ_i eigenvalue of the Jacobian matrix of the ODE. Each numerical method has its own stability region which has its particular geometrical shape.

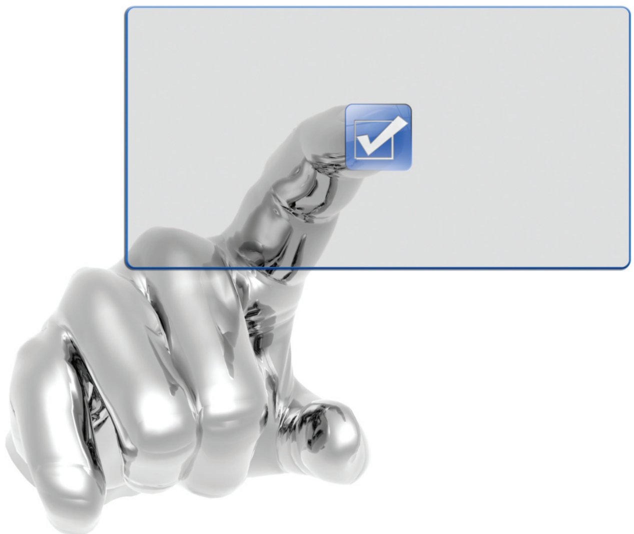
The values obtained by the numerical method will be accurate when the local truncation error is small and when $\hat{h}$ lies in the stability region of the method.

SARRERA

Norbait ezagutzen dugunean begien kolorea, altuera, jatorria, lan jarduerak eta antzeko ezaugarriak dira jakin-mina pizten digutenak edo deigarri gertatzen zaizkigunak. Begi marroiak izan ditzake, 1,70 metroko garaiera, txinatarra izan daiteke, adibidez informatikari-lanetan jardungo du, e.a.

Gainera, bera ez da izango aipatu ditugun ezaugarri hauek dituen gizaki bakarra. Ezta kidea ezagutu dugunean ezta bera ezagutu genuela 30 urte igarotzen direnean ere; ziurrenik ez dugu jakingo bere hatz-markek nolako itxura duten. Baina horixe da gizaki horrek beste inorekin konpartituko ez duen ezaugarria, hau da, pertsona hori bera bezala identifikatzeko erabiliko den marka, bakoitzak berea baitauka.

Ekuazio diferentzial arruntak (EDAk) askatzeko zenbakizko metodo bati erreparatzen diogunean antzekoa gertatzen da. Honelako metodo bat *ezagutzen* dugunean lehendabizi formulari begiratzen diogu. Horrela, begiratzen dugu formula osatzeko zelako piezak elkartu diren: begi marroiak ote dituen, formulako osagai guztiak eskura ote ditugun, e.a. Era berean, finkatu nahi izaten dugu formularen jatorria zein den, alegia beste formula batean oinarrituta sortu ote den. Halaber, formulak zertarako balio duen jakin nahi izaten dugu, hau da, zer egiten duen edo zein ekuazio diferentzial mota askatzen dituen. Honelakoak izaten dira jakingarritzat jotzen ditugunak. Formulak esaten digu kalkulatu behar den hori kalkulatzeko zenbat pieza behar ditugun eta baita haiek lortzeko zer nolako ahalegina egin beharko dugun ere. Horretaz gain, batzuetan lerro artean irakurri ahal izaten dugu metodoak egonkortasun propietate onak edo eskasak dituela, eta egonkortasun eremu hauek irudikatuta ere aurki ditzakegu hainbat erreferentziatan. Nolakoak dira zenbakizko metodoen egonkortasun eremuak? Irudikatu dezakegu nolakoa den anplifikazio faktorearen atzean ezkutatzen den egonkortasun eremua? Uste baino borobilagoa edo forma arraroagokoa, handia ala txikia, … bakoitzak bere marka propioa dauka. Zenbakizko metodo bakoitzak berea, eta bakarrik berea den egonkortasun eremua baitauka.



1. irudia. Argazkilaria: Fotolia ©.

EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Ekuazio diferentzial arrunt bat edo ekuazio diferentzial arrunten sistema bat, deribatu arruntak agertzen diren ekuazioa edo ekuazio-sistema da eta aldagai bakarraren menpe dagoen funtzio bat (edota aldagai bakarraren menpe dauden funtzioak) du emaitza gisa. Kasu bietan, bai ekuazio diferentzial arrunta daukagunean zein sistema daukagunean, ezaugarri komuna da aldagai independente bakarra, normalean t letraz adierazten dena eta denbora adieraz dezakeena.

Ekuazioan edo ekuazioetan agertzen den ordenarik altueneko deribatuak emango dio ekuazio diferentzial arruntari bere ordena. Adibidez, lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunt baten formulazioa honela egiten da:

$$y' = f\big(t, y(t)\big) \tag{1}$$

adierazpenak emandako formulazioa erabilgarria da lehen ordenako EDA sistema baten kasurako ere, onartzen badugu mendeko aldagaia y, bektorea izan daitekeela. Horrela, esango dugu $\mathbb{R}^m$ eremuan lanean ari garela eta EDA bat edo EDA sistema bat definitzen duen f funtzioa eta bere soluzioa den y funtzioa honela emanda daudela:

$$\begin{cases} y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \\ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \end{cases}$$

EDA n. ordenakoa denean, $y^{(n)} = f\big(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\big)$ bezala formula daiteke.

Ekuazio diferentzial arrunt baten soluzio analitikoa era analitikoan emandako formula bat da, normalean funtzio elementalak erabiliz ematen dena (polinomioak, funtzio esponentzialak, logaritmikoak, trigonometrikoak, e.a.) edo serie gisa emanda ere egon daitekeena. Honela, aldagai independenteari balioak emanez, posible da soluzioak edozein aldiunetan izango duen balioa kalkulatzea. Ekuazio diferentzial arruntaren zenbakizko soluzio bat puntu diskretu batzuetako balio hurbilduen taula bat da, ordea. Balio hurbildu hauek ekuazio diferentziala erabiliz pausoz pauso lortzen dira.

EDAK ASKATZEKO ZENBAKIZKO METODOAK

Hasierako baliodun lehen ordenako EDAk askatzeko dauden metodoei erreparatuko diegu. $[t_0, t_N]$ tarte finitu batean definitutako hasierako baliodun lehen ordenako EDA bat ondorengo adierazpenean emanda dator:

$$y' = f\big(t, y(t)\big), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

non $y : [t_0, t_N] \to \mathbb{R}^m$ eta $f : [t_0, t_N] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ funtzioak jarraituak diren eta $y(t_0) = y_0$ EDAren hasierako balioa.

Hasierako baliodun EDA bat (edo EDA sistema bat) emanda, zenbakizko metodo bat pauso bakarrekoa dela esaten da, zenbakizko soluzioa kalkulatzeko ekuazio diferentziala eta aurreko pausoko balioa erabiltzen badira. Pauso bakarreko zenbakizko metodo ezagunenetakoak bi hauek dira: Eulerren metodo esplizitua (bakarrik Eulerren metodoa ere deitzen zaiona) eta Eulerren metodo inplizitua (atzerakako Eulerren metodo bezala ezagutzen dena):

— Eulerren metodo esplizitua: $y_{n+1} = y_n + hf_n$
— Eulerren metodo inplizitua: $y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$

Aurreko bi formuletan erabili dugun nomenklaturan n azpi-indizearen bidez adierazi ditugu t_n aldiuneko balioak eta $(n + 1)$ azpi-indizearen bidez t_{n+1} aldiunekoak. Pauso-tamaina adierazteko h hizkia erabili dugu.

Zenbakizko metodo bat esplizitua da baldin eta y_{n+1} balioa kalkulatzeko beharrezkoak diren osagai guztiak ezagutzen badira; bestela, inplizitua da.

Pauso bakarreko metodoen aldaera batean, pauso bakarra eta etapa anitz erabiltzen dira [1]. Metodo hauek, s etapako metodo izenaz ere ezagutzen dira eta beraien izenak esaten duen bezala, pauso bakarreko metodoak dira eta pauso bakoitzean deribatuak tarte horretan hartzen dituen hainbat balio erabiltzen dituzte, pausoaren muturrean zenbakizko soluzioa kalkulatzeko. Hau da, t_n aldiuneko baliotik abiatuz t_{n+1} aldiuneko balioa kalkulatzeko, $[t_n, t_{n+1}]$ tarteko hainbat aldiunetako deribatuak erabiltzen dituzte eta aldiune horietako bakoitzari etapa deritzo. Hain erabiliak diren Runge-Kutta izenekoak dira pauso bakarreko eta etapa anitzeko metodoen adibide bat.

Pauso bakarreko metodoei ezarritako beste aldaketa bat pauso anitzeko edo k pausotako metodoek osatzen dute. Metodo hauetan aurreko k pausoetan lortu diren zenbakizko balioak erabiltzen dira kalkulatu nahi den aldiuneko balioa kalkulatzeko. Hau da, $t_{n+k} = t_n + kh$ puntuko y_{n+k} balioa kalkulatzeko pauso anitzeko metodoek, aurreko k pausoetan lortu diren $y_n, y_n + h, \ldots, y_n + (k - 1)h$ balioak erabiltzen dituzte, hain zuzen $t_n, t_n + h, \ldots, t_n + (k - 1)h$ puntuetan lortu direnak. Backward Differentiation Formulae (BDF) izeneko metodoak pauso anitzeko metodoak dira eta Gearren liburua plazaratu zenetik [9], metodo hauetan oinarritutako ordenagailuko kodeak oso erabiliak dira, geroago ikusiko dugun moduan egonkortasun ezaugarri onak baitituzte.

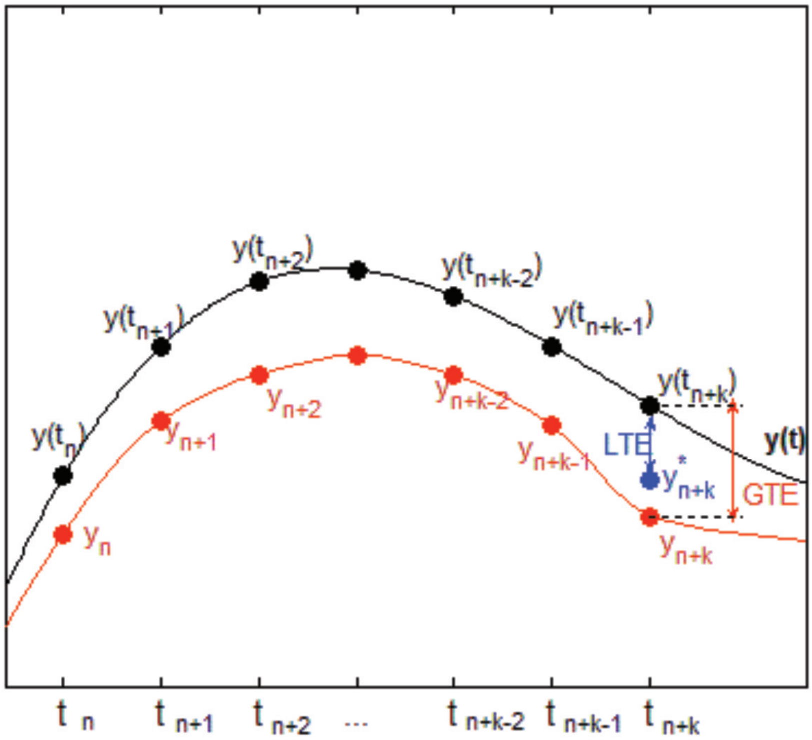
Eta nola kontrolatzen da EDA baten balio zehatzaren eta zenbakizko metodoaren bidez lortzen den balio hurbilduaren arteko desberdintasuna?

MOZKETA-ERRORE LOKALA ETA GLOBALA

Zenbakizko metodo baten mozketa-errore globala EDAren soluzio zehatzaren eta metodoa erabiliz lortutako emaitza hurbilduaren arteko desberdintasuna da. *GTE* nomenklatura erabiliz izendatuko dugu (*Global Truncation Error* ingelesez):

$$GTE_{n+k} = y(t_{n+k}) - y_{n+k} \tag{3}$$

$y(t_{n+k})$ balioa ekuazio diferentzialaren soluzio zehatzak t_{n+k} aldiunean hartzen duen balio zehatza izanik eta y_{n+k} berriz, aldiune bereko balio hurbildua, zenbakizko metodoa erabilita lortzen dena izanik.



2. irudia. Mozketa-errore lokalaren eta globalaren irudikapena. Egilea: Elisabete Alberdi.

Kokapen-bereganaketa deritzo prozedura honi, hau da, $(n + k)$ pausoaren aurretiko k pausotan zenbakizko metodoa erabiliz kalkulatu ditugun balioak balio zehatzen berdinak direla onartzeari. Hau da,

$$y(t_{n+j}) = y_{n+j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{4}$$

Kokapen-bereganaketa eginda lortzen den balioari y^*_{n+k} deituko diogu.

Zenbakizko metodo baten mozketa-errore lokala, balio zehatzaren eta y^*_{n+k} balioaren arteko desberdintasuna da. Azken balio hori kokapen-bereganaketa eginda kalkulatzen da. *LTE* deituko diogu (*Local Truncation Error* ingelesez) eta ondorengo formularen bidez emana dator:

$$LTE_{n+k} = y(t_{n+k}) - y^*_{n+k} \tag{5}$$

Definizio hauek (mozketa-errore global eta lokalarenak) baliokoak dira bai pauso bakarreko metodoetarako baita pauso anitzekoetarako ere. $k = 1$ denean, pauso bakarreko metodoetarako mozketa-erroreen definizioak izango genituzke, eta $k > 1$ den kasuan, pauso anitzeko metodoetarako mozketa-erroreen definizioak.

Errorearen metaketaren ondorioz, mozketa-errore globalak mozketa-errore lokalak baino potentzia bat txikiagoa dauka h terminoan. Hau da, $LTE = O(h^{p+1})$ baldin bada (p ordenakoa h terminoan), orduan $GTE = O(h^p)$. Zenbakizko metodoa p ordenakoa dela esaten da, mozketa-errore lokala $O(h^{p+1})$ baldin bada, edo gauza bera dena, mozketa-errore globala $O(h^p)$ baldin bada.

ZENBAKIZKO METODO BATEN EGONKORTASUNA ETA ANPLIFIKAZIO FAKTOREA

Egonkortasunaz ari garenean, ondo bereizi behar dira elkarrengandik ekuazio diferentzial baten egonkortasuna eta zenbakizko metodo baten egonkortasuna direlako terminoak. Ekuazio diferentzial baten egonkortasunak, soluzioak perturbazioen aurrean duen sentsibilitatea erakusten du. Hau da, EDA baten soluzio-kurbak t handitu ahala, hau da, denboran aurrera egin ahala, bata bestearengandik banatzen badoaz, jakingo dugu ekuazio diferentziala ezegonkorra dela. Matematikaren ikuspegitik ekuazio diferentziala egonkorra da bere autobalioen parte erreala negatiboa denean; bestela, ekuazio diferentziala ezegonkorra da.

Beste alde batetik, zenbakizko metodo baten egonkortasunak zenbakizko emaitzen perturbazioekiko sentikortasuna neurtzen du. Zenbakizko metodo bat egonkorra da perturbazioak handitzen ez direnean. Zenbakizko metodo baten egonkortasunaz ari garenean, zenbakizko metodo honek ekuazio diferentzial egonkorrekin duen portaera da gure aztergaia. Hau da, aztertu behar dugu parte erreal negatiboko autobalioak dituzten ekuazio diferentzialekin metodoak duen portaera zein den.

Lehen ordenako EDA bat edo EDA sistema bat ebazteko k pausoko, zenbakizko metodo baten egonkortasun-azterketa egin nahi dugunean, zenbakizko metodo hau test-ekuazioari, hau da, $y' = \lambda y$ ekuazioari ezartzen zaio. Hau egindakoan, matrizialki era honetan adieraz daitekeen ekuaziora iritsiko gara:

$$Y_{n+k} = AY_{n+k-1} \tag{6}$$

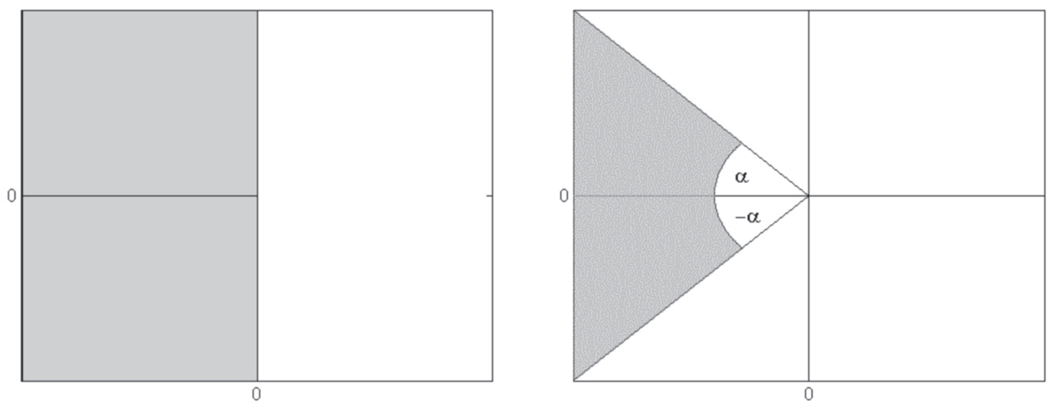
Y_{n+k-1} eta Y_{n+k}, metodoan agertzen diren aldagaiak edo ezezagunak eta ondorengo adierazpenen bidez emanda datozenak izanik: $Y_{n+k} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+k})^T$, $Y_{n+k-1} = (y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k-1})^T$, eta A $k \times k$ dimentsioko matrizea, zenbakizko metodoak pausoak adinako dimentsioa duen matrize karratua alegia. Matrize hau anplifikazio faktore izenaz ezagutzen da.

Zenbakizko metodoa pauso bakarrekoa denean, anplifikazio faktorea 1×1 dimentsioko «matrizea» da, hots, funtzio bat (polinomioa ere izan daitekeena).

Pauso anitzeko metodoetan, A matrizearen polinomio karakteristikoa definitzen da eta A matrizearen autobalioak bere polinomio karakteristikoaren erroak dira. Kasu bietan, A dimentsio bakarrekoa denean zein ez denean, zenbakizko metodoa egonkorra dela esaten da, kasuan kasu, funtzioaren edo polinomio karakteristikoaren erroak unitatearen berdinak edo unitatea baino txikiagoak direnean. Eta zenbakizko metodoaren egonkortasun eremua, erro hauek unitatea edo unitatea baino txikiagoak diren plano konplexuko zatia dira.

Egonkortasunaz ari garenean, asko erabiltzen diren neurriak dira A-egonkortasuna eta A(α)-egonkortasunak [12]. A-egonkortasunak esan nahi du plano konplexuaren ezker alde osoan dela egonkorra metodoa. A(α)-egonkortasunak, $\alpha \in (0,\pi/2]$ izanik, esan nahi du metodoaren egonkortasun eremuko parte dela ondorengo multzoa:

$$\left\{\hat{h} \in \mathbb{C} : -\alpha < \pi - \arg(\hat{h}) < \alpha, \hat{h} \neq 0\right\} \tag{7}$$



3. irudia. A-egonkortasuna eta A(α)-egonkortasuna [12]. Egilea: Elisabete Alberdi.

Adibide gisa, k = 4 pausokoa eta p = 4 ordenakoa den Adams Bashforthen metodoa aztertuko dugu:

$$y_{n+4} - y_{n+3} = h\left(\frac{55}{24}f_{n+3} - \frac{59}{24}f_{n+2} + \frac{37}{24}f_{n+1} - \frac{9}{24}f_n\right) \tag{8}$$

Zenbakizko metodo hau $y' = \lambda y$ test-ekuazioari ezarriz, ondorengo adierazpena lortuko dugu:

$$y_{n+4} - y_{n+3} = h\lambda\left(\frac{55}{24}y_{n+3} - \frac{59}{24}y_{n+2} + \frac{37}{24}y_{n+1} - \frac{9}{24}y_n\right) \tag{9}$$

Adierazpen hau honela idatz daiteke era matrizialean:

$$Y_{n+4} = AY_{n+3} \tag{10}$$

non

$$Y_{n+4} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \end{pmatrix}, Y_{n+3} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\hat{h}\frac{9}{24} & \hat{h}\frac{37}{24} & -\hat{h}\frac{59}{24} & 1+\hat{h}\frac{55}{24} \end{pmatrix}, \hat{h} = h\lambda .$$

A matrizearen polinomio karakteristikoa honela emanda egongo da:

$$p(r) = \det\left(A - rI\right) = r^4 - \left(1 + \frac{55}{24}\hat{h}\right)r^3 + \frac{59}{24}\hat{h}r^2 - \frac{37}{24}\hat{h}r + \frac{9}{24}\hat{h} \tag{11}$$

Egonkortasun eremua osatuko dute plano konplexuko $\hat{h}$ direlakoen leku geometrikoek, zeintzuentzat, (11) polinomioaren erroak unitatearen berdinak edo unitatea baino txikiagoak diren. Honetarako nahikoa da r = 1 deneko $\hat{h}$-ren balioei dagokien kurba irudikatzea. Egonkortasun eremua muga horren barruko edo kanpoko aldea den jakiteko, nahikoa da polinomio karakteristikoaren adierazpenean $\hat{h}$-ren balio bat ordezkatzea eta polinomio horren erroekin zer gertatzen den aztertzea, unitatea baino handiagoak edo txikiagoak diren ikustea, alegia.

Prozesu hau guztia laburtu daiteke eta berdin-berdin iritsiko ginateke polinomio karakteristikoaren (11) adierazpena, (9) ekuazioan $y_j = r^j$ motako soluzioekin proba eginda ($j = n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$ balioetarako) eta ondoren r^n balioaz zatituta [5, 13].

ERROREA VS. ANPLIFIKAZIO FAKTOREA PAUSO BAKARREKO METODOETAN

Garrantzitsua da anplifikazio faktorearen eta mozketa-errore globalaren arteko erlazioa zein den argi uztea. Ikusia dugu pauso bakarreko metodoen mozketa-errore globala era honetan kalkulatzen dela:

$$GTE_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} \tag{12}$$

Aurreko formulan y^*_{n+1} terminoa batuta eta kenduta sartzen badugu, lortuko dugu mozketa-errore globala eta mozketa-errore lokala erlazionatzea:

$$GTE_{n+1} = y\left(t_{n+1}\right) - y^*_{n+1} + y^*_{n+1} - y_{n+1} \underset{LTE_{n+1}=y\left(t_{n+1}\right)-y^*_{n+1}}{\underset{\downarrow}{=}} LTE_{n+1} + y^*_{n+1} - y_{n+1} \tag{13}$$

y^*_{n+1} eta y_{n+1} balioetarako formula erabiliz hauxe daukagu:

$$GTE_{n+1} = LTE_{n+1} + A \cdot y(t_n) - A \cdot y_n = LTE_{n+1} + A \cdot (y(t_n) - y_n) \tag{14}$$

Eta berriz ere $GTE_n = y(t_n) - y_n$ dela kontuan hartuz, ondokoa daukagu:

$$GTE_{n+1} = LTE_{n+1} + A \cdot GTE_n \tag{15}$$

(15) adierazpenak ($n + 1$) pausoko errore globala n pausokoarekin erlazionatzea lortzen du. Era berdintsuan jarraituz, ($n + 1$) pausoko errore globala n pausoko errore lokalarekin eta $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ pausoetakoekin erlazionatzea lortuko dugu.

$$\begin{aligned} GTE_{n+1} &= LTE_{n+1} + A \cdot GTE_n = LTE_{n+1} + A \cdot \left(LTE_n + A \cdot GTE_{n-1}\right) \\ &= A^2 \cdot GTE_{n-1} + A \cdot LTE_n + LTE_{n+1} = \ldots = A^n \cdot GTE_1 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i \cdot LTE_{n-i+1} \end{aligned} \tag{16}$$

Lehenengo pausoan sortzen den errore globala errore lokalaren berdina denez, (16) adierazpena honela geratzen zaigu:

$$GTE_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} A^i \cdot LTE_{n-i+1} \tag{17}$$

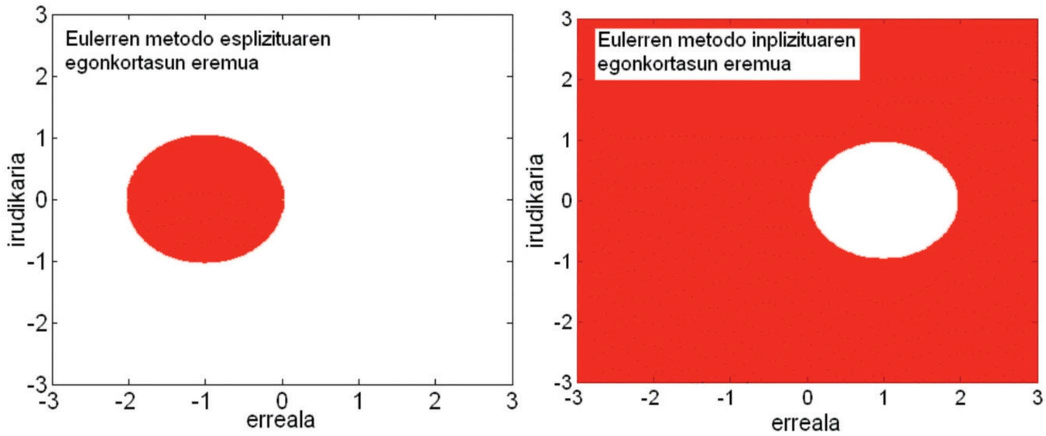
Eta (17) adierazpena pauso bakarreko metodoetako mozketa-errore globala ematen digu, anplifikazio faktorearen eta mozketa-errore lokalaren arabera.

ZENBAIT EGONKORTASUN EREMU

Mozketa-errore globala txikia izatea nahi badugu, anplifikazio faktorea eta mozketa-errore lokala txikiak izan beharko dira (ikus (17) adierazpena). Bereziki garrantzitsua da anplifikazio faktorea unitatearen azpitik mantentzea. Eta hau baliokidea da, h pauso-tamaina problemako λ autobalioaz biderkatuta, $h\lambda$, egonkortasun eremuan jaustearekin. Horregatik, ulertzekoa da hainbat zientzialari egonkortasun eremu handiak dituzten zenbakizko metodoen bilaketan aritzea. Eulerren metodoak $p = 1$ ordenakoak dira. Esplizituaren egonkortasun eremua $(-1, 0)$ zentrodun eta unitate bateko erradiodun zirkunferentziaren barruko aldea da. Inplizituarenak aldiz, plano konplexuaren ezker alde osoa hartzen du besteak beste.

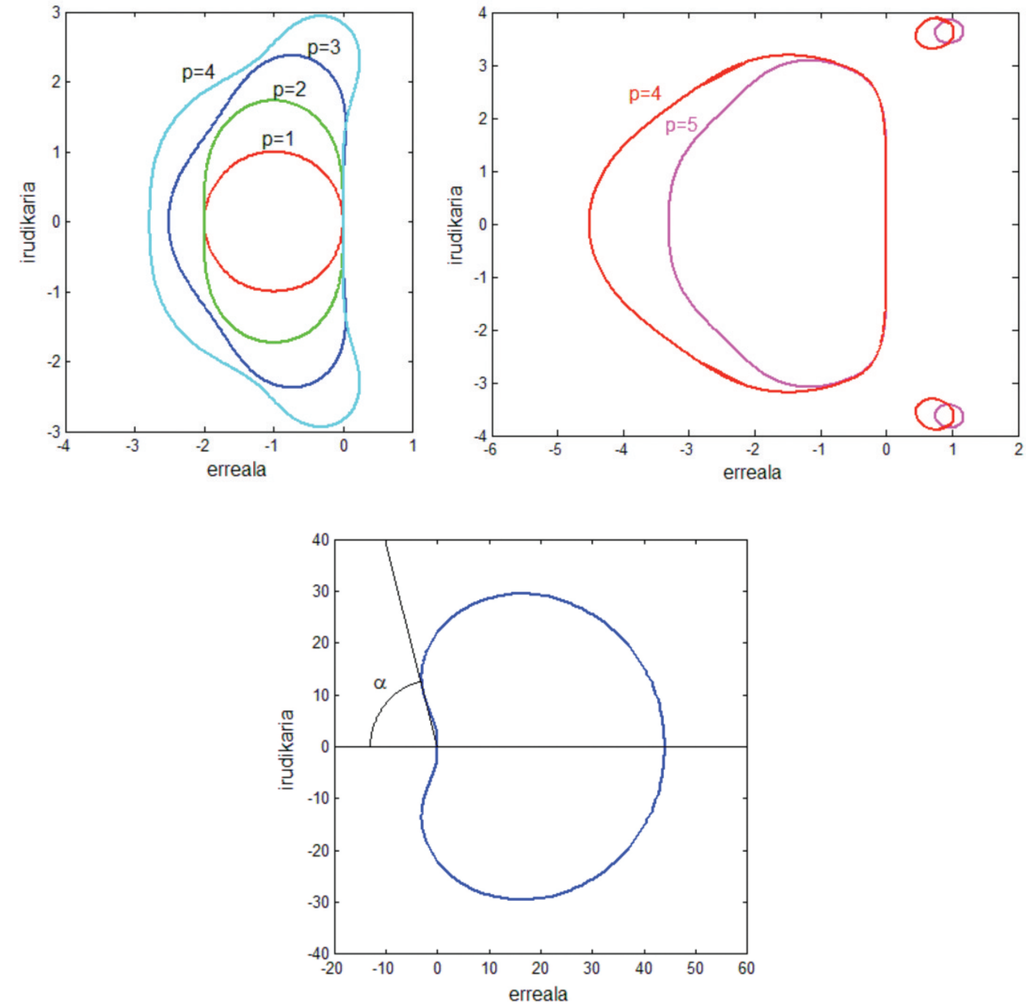
Eulerren metodoetatik abiatuta, berauek baino ordena edo/eta egonkortasun handiagoa duten zenbakizko metodoak gauzatu dira. Honen adibide dira pauso anitzeko hainbat metodo, hala nola, Adams Bashforthen metodoak [11], esplizituak izanik Eulerren metodoek baino ordena handiagoa izan dezaketenak. Azken hauek ordea ez dute egonkortasun eremu handiagoa. Bat ordenako Adams Bashforthen metodoa Eulerren metodo esplizitua baino ez da. Adams Moultonen metodoak etorri ziren geroago [5]; hauek, inplizituak dira, Eulerrek baino ordena altuagoetan lan egin dezakete eta egonkortasun eremua ere handiagoa dute.

Ordena eta egonkortasun *handiagoa lortzeko* beste saiakera bat egin da, pauso bakarreko eta etapa anitzeko metodoak garatuta. Honelakoak dira Runge-Kutta metodoak [12], hau da, Eulerrek baino ordena eta egonkortasun eremu handiagoetan lan egitea posible egin zuten metodoak. Esplizituak edo inplizituak izan daitezke eta inplizituek egonkortasun eremu oso handiak izan ditzakete. Runge-Kutta metodoen artean ezagunak dira kateatutako Runge-Kutta metodoak; hauetan, posible da beraietako konstante sorta bat aldatuz, ondoz ondoko ordena duten bi metodo ezberdin izatea: bata p ordenakoa eta bestea $(p + 1)$ ordenakoa. Kateatutako zenbait Runge-Kutta metodo Fehlbergi zor dizkiogu [7,8]. Katetatutako Runge-Kutta medoen artean ezagunenetakoa da Dormandek eta Princek sortutako DOPRI izenekoa [10]. DOPRI metodoan ezezaguna kalkulatzeko konstante sorta bat darabilgunean, metodoa $p = 4$ ordenakoa izatea lortzen da eta beste konstante sorta bat erabiliz lortzen dena $p = 5$ ordenakoa.

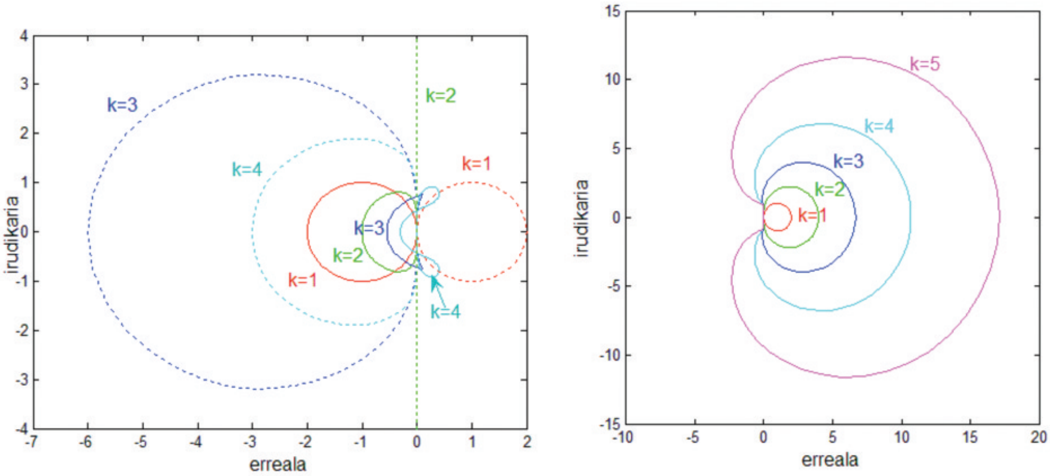


4. irudia. Eulerren metodoko egonkortasun eremuak kolore gorriz margotuta. Egilea: Elisabete Alberdi.

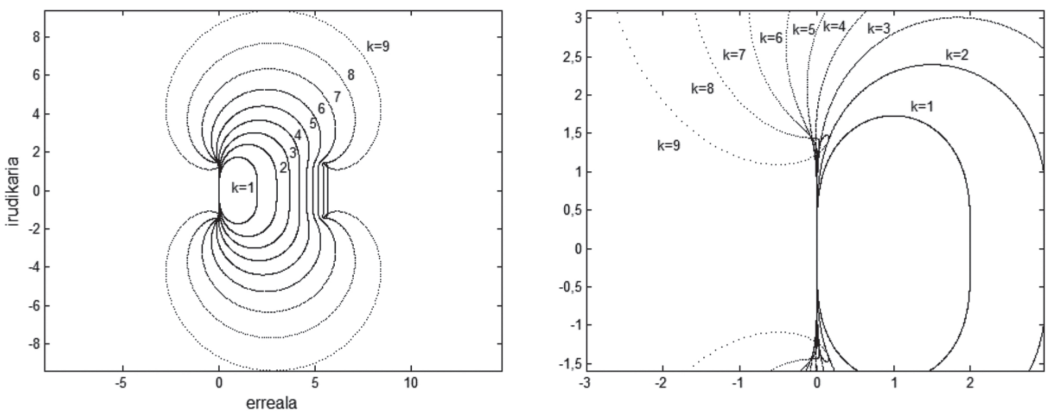
Baina BDF (Backward Differentiation Formulae) [9] metodoen eskutik etorriko zen zenbakizko metodoen munduaren iraultza. BDF-ak pauso anitzeko metodoak dira, inplizituak, $p = 1$ ordena baino altuagoa lor dezaketenak eta Adams Moultonen metodoek baino egonkortasun-eremu handiagokoak. Eta BDF-ak oinarri gisa erabilita bi norabidetan gauzatu dira ordena altua eta egonkortasun ezaugarri onak dituzten metodoak [4]: alde batetik, zenbakizko metodoan ordena handiagoko deribatuak erabiliz, eta bestetik, emaitza eraikitzen ari garen denbora tartea baino beranduagoko aldiuneei dagozkien balioak erabiliz. Azken balio hauei super-etorkizuneko puntuak deritze. Lehenengoaren adibide dira Second Derivative BDF (SDBDF) delako metodoak [4]; hauek lortzen dute k pauso emanda ordena $p = (k + 1)$ izatea, $p = 4$ ordenara arte A-egonkorrak izanik. Enrighten metodoak ere [6], 2. deribatua erabiltzen dute, k pauso emanda, $p = (k + 1)$ ordena lortzen dute eta A-egonkorrak dira $p = 4$ ordenara arte. Super-etorkizuneko puntuak erabiltzen dituzten metodoen adibide dira Extended BDF (EBDF) metodoak [3]. Hauetan ere k pauso emanda, lortzen da metodoak $p = (k + 1)$ ordena izatea eta aurrekoak bezala, $p = 4$ ordenara arte A-egonkorrak dira.



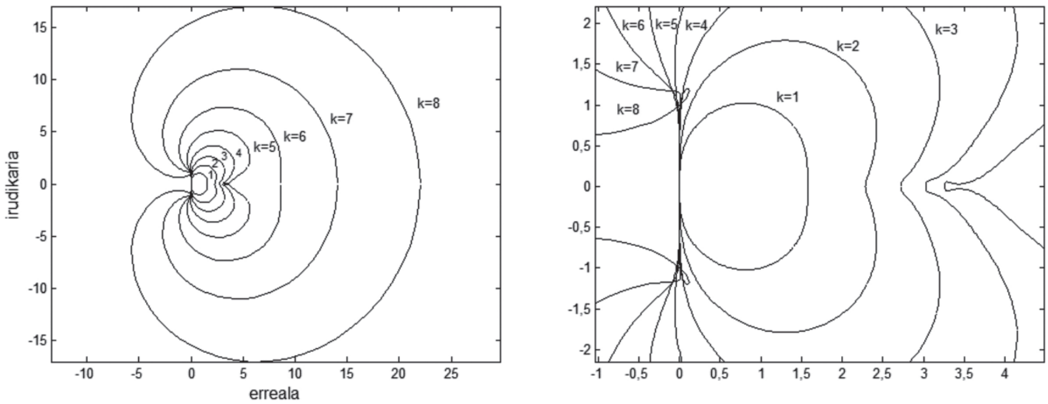
5. irudia. Zenbait Runge-Kutta metodoren egonkortasun eremuak. Goian ezkerrean etapa kopurua eta ordena berdinak dituzten Runge-Kutta metodoen egonkortasun eremuak p = 1, 2, 3, 4 ordenetarako (kurben barruko aldeak). Goian eskuinean, DOPRI (5,4) metodoaren egonkortasun eremuak (kurben barruko aldeak). Behean, Runge-Kutta inplizitu baten egonkortasun eremua [2] erreferentziatik aterata, *A*(75,5996º)-egonkorra dena (kasu guztietan egonkortasun eremua kurbaren kanpoko aldea). Egilea: Elisabete Alberdi.



6. irudia. Adams Bashforth eta Moulton eta BDF metodoen egonkortasun eremuak ordena ezberdinetarako. Adams Bashforthenak, lerro jarraituz marraztuta, kurben barruko aldeak dira. Adams Moultonenak, lerro ebakiz, $k = 1$ kasuan, kurbaren kanpoko aldea da egonkortasun eremua; $k = 2$ kasuan zuzenaren ezkerreko aldea eta $k = 3$, 4 kasuetan kurben barruko aldeak. BDF metodoen kasuan kurben kanpoko aldea da egonkortasun eremua. Guztietan pauso kopurua (k) eta ordena (p) berdinak dira. Egilea: Elisabete Alberdi.



7. irudia. SDBDF metodoen egonkortasun eremuak (kurben kanpoko aldeak), k pauso kopurua izanik. Egilea: Elisabete Alberdi.



8. irudia. EBDF metodoen egonkortasun eremuak (kurben kanpoko aldeak), *k* pauso kopurua izanik. Egilea: Elisabete Alberdi.

EGONKORTASUN EREMUAN EGOTEA EDO EZ EGOTEA (TO BE OR NOT TO BE)

2. ordenako eta hasierako balioko ondorengo EDA hartu dugu:

$$y'' + 10^4 y = 0, \qquad (y(0), y'(0)) = (1, 0) \tag{18}$$

Bere autobalioak $\lambda \pm 100i$ dira eta bere emaitza zehatza hauxe da: $y = \cos(100t)$.

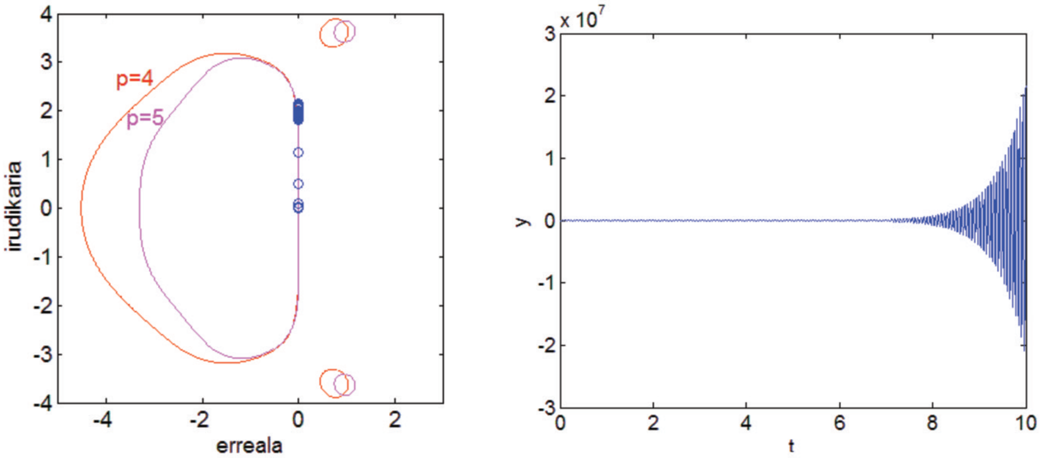
Askatu ahal izateko, lehen ordenako EDA bezala idatzi dugu:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \tag{19}$$

Eta MATLAB-en inplementatuta dagoen ode 45 algoritmoa erabilita askatu dugu. Algoritmo hau DOPRI (5,4) izeneko metodoan oinarrituta dago. Aipatu dugun ode 45 algoritmoak $p = 5$ ordenan askatzen du. Algoritmo honi tolerantzia erlatiboa (*Rtol*) eman diezaiokegu problema zein zehaztasun mailarekin askatu nahi dugun esateko.

9a, 9b eta 9d irudietan marraztu dugu ode45-a erabilita eta tolerantzia erlatibo ezberdinekin (19) problema askatzean lortu den emaitza. Irudi berdinen ezkerreko aldean marraztu ditugu problema askatzeko algoritmoak eman dituen pauso-tamainak $\lambda = 100i$ autobalioaz bidertuta plano konplexuan; hau da, $\hat{h} = h\lambda$ delakoen balioak marraztu ditugu. Eta irudi berean

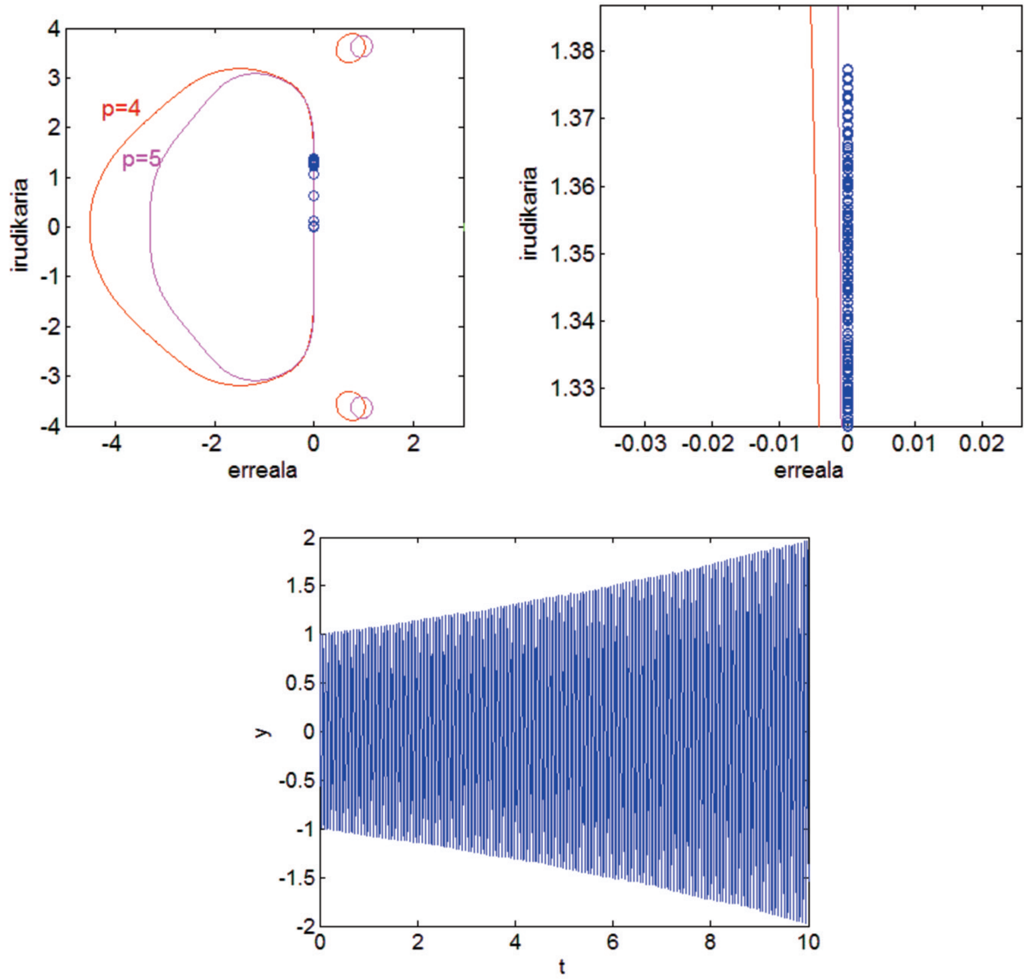
DOPRI (5,4) metodoko egonkortasun eremuak gainjarri dira. Anplifikazio faktorea unitatea baino txikiagoa izango da, $\hat{h}$-ren balioa $p = 5$ ordenako metodoaren egonkortasun eremuan jausten denean (arrosaz margotutako eremuaren barruan, hain zuzen). 9a irudian ikus daitekeenez, $Rtol = 0{,}1$ denean, badaude $\hat{h}$ batzuek egonkortasun eremutik kanpo jausten direnak. Ondorioz, problemarako lortzen den emaitza oso txarra da.



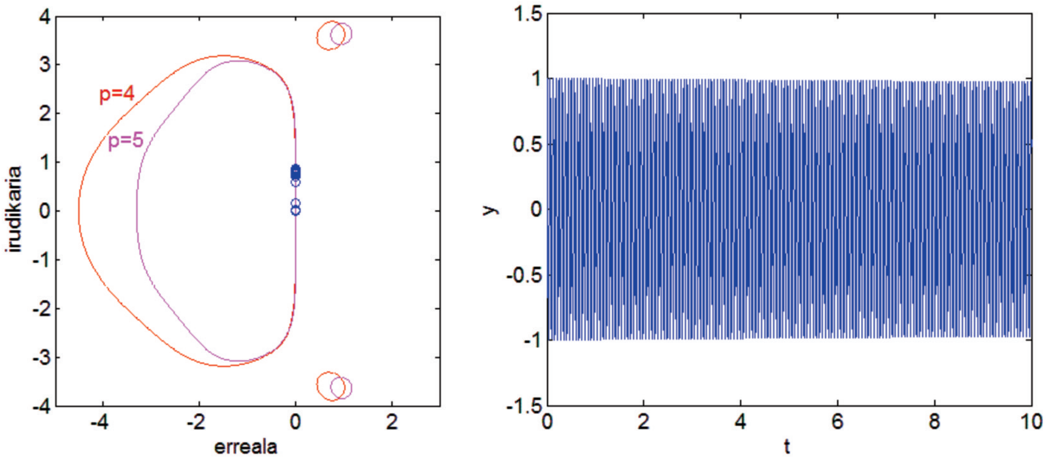
9a. irudia. (19) problema ode 45-arekin eta $Rtol = 0{,}1$ izanik askatzean lortutako emaitza hurbildua (eskuinean) eta $\hat{h} = h\lambda$ balioek plano konplexuan okupatzen duten lekua (ezkerrean). Egilea: Elisabete Alberdi.

Tolerantzia erlatiboa $Rtol = 0{,}01$ denean ere (9b irudia), $\hat{h}$ batzuk egonkortasun eremutik kanpo daude, zooma ezarri diogun irudian argiago ikus daitekeen bezala. Kasu honetan ere ez da lortzen oso emaitza onik. 9d irudian lortzen den emaitza aldiz, aurrekoak baino hobea da, besteak beste $\hat{h}$-ren balioak egonkortasun eremuan jausten direlako.

Honek guztiak adierazten du mozketa-errore globala txikia izatea nahi badugu, ezinbestekoa dela mozketa-errore lokala ezezik $\hat{h} = h\lambda$ balioek plano konplexuan okupatzen duten posizioa ere kontrolatzea. Honela bakarrik lortuko baitugu problemaren emaitza hurbildua emaitza zehatzetik hurbil egotea.



9b. irudia. (19) problema ode 45-arekin eta *Rtol* = 0,01 izanik askatzean lortutako emaitza hurbildua (behean) eta $\hat{h} = h\lambda$ balioek plano konplexuan okupatzen duten lekua (goian). Egilea: Elisabete Alberdi.



9d. irudia. (19) problema ode 45-arekin eta *Rtol* = 0,001 izanik askatzean lortutako emaitza hurbildua (eskuinean) eta $\hat{h} = h\lambda$ balioek plano konplexuan okupatzen duten lekua (ezkerrean). Egilea: Elisabete Alberdi.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUTCHER J. C. 2000. «Numerical methods for Ordinary Differential equations in the 20th century». *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **125**, 1-29.

[2] BUTCHER J. C. 2003. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons.

[3] CASH J. R. 1980. «On the integration of stiff systems of ODEs using extended backward differentiation formula». *Numerische Mathematik*, **34 (3)**, 235-246.

[4] WANNER G. eta HAIRER E. 1991. *Solving Ordinary Differential equations II. Stiff and Differential Algebraic problems*. Springer Verlag.

[5] NØRSETT S. P., HAIRER E. eta WANNER G. 1993. *Solving Ordinary Differential equations I. Nonstiff problems*. Springer.

[6] ENRIGHT W. H. 1974. «Second Derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations». *SIAM J, Numer. Anal.,* **11**, 321-331.

[7] FEHLBERG E. 1969. *Low order classical Runge-Kutta formula with step-size control and their application to some heat transfer problems*. NASA TR R, 315.

[8] FEHLBERG E. 1968. *Classical fifth, sixth, seventh and eighth order Runge-Kutta formula with stepsize control*. NASA TR R, 287, Oct.

[9] GEAR C. William. 1971. *Numerical initial value problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall.

[10] PRINCE P. J. eta DORMAND J. R. 1980. «A family of embedded Runge-Kutta formulae». *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **6 (1)**, 19-26.

[11] BASHFORTH F. eta ADAMS J. C. 1883. *An attempt to test the theories of Capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid*. Cambridge University Press.

[12] LAMBERT J. D. 1991. *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*. John Wiley & Sons.

[13] PETERSON Allan C. eta KELLEY Walter G. 2001. *Difference equations. An introduction with applications*. Academic Press.