p-nilpotentzia talde finituetan

Oihana Garaialde Ocaña
ogaraialde@gmail.com

Jasoa: 2012-12-20 Onartua: 2013-07-22

Laburpena: Artikulu honek J. Tateren p-nilpotentzia irizpidearen frogapena du helburu nagusi modura, eta beste p-nilpotentzia irizpide batzuen berri ere emango da. Gainera, p-nilpotentzia eta nilpotentzia nozioen arteko erlazioa azaltzen da eta azkenik, gure teorema nagusia frogatzeko, talde finituen kohomologia taldeak ere definitzen dira.

Hitz gakoak: p-nilpotentzia, nilpotentzia, kohomologia taldeak.

Abstract: The main objective of this article is to prove J. Tate's p-nilpotency criterion. Moreover, other p-nilpotency criteria will be stated and the relation between p-nilpotency and nilpotency will be shown. Finally, in order to prove the main theorem, cohomology groups for finite groups will be introduced.

Keywords: p-nilpotency, nilpotency, cohomology groups.

1. SARRERA

Artikulu honetan G talde finitu bat eta p zenbaki lehen bat izanik, G-ren p-nilpotentzia aztertu nahi dugu. p-nilpotentziak azpitalde jakin baten existentzia aztertzen du. Azpitaldeak, propietate jakin batzuk izango ditu. Gainera, azpitalde jakin horren existentziak, gure hasierako taldea bi azpitalderen biderkadura (erdizuzen) gisa idaztera eramango gaitu. Gehienetan, azpitalde horien propietateak ezagutzea errazago gertatzen da eta beraz, talde osoaren inguruko informazioa azkarrago lortuko da.

Ohar bedi, p zenbaki lehena aldatuz gero, lortu ahalko ditugun azpitaldeak ere aldatuz joango direla eta gerta daitekeela zenbaki lehen baterako azpitalde berezi hori existitzea baina beste baterako berriz, ez. Modu honetan, talde bat p zenbaki lehen guztietarako p-nilpotentea bada, orduan taldea nilpotentea dela esaten da. Esan genezake nilpotentzia nozioak talde bat abeldarra izatetik zein urrun dagoen aztertzen duela.

Hala ere, bai nilpotentzia bai p-nilpotentzia, nahiko nozio abstraktuak dira eta askotan zaila gertatzen da azpitalde jakin horiek aurkitzea. Horregatik, urteetan zehar, p-nilpotentzia aztertzeko hainbat irizpide eman dira propietate hori ezagutzeko bide gisa.

XX. mendearen hasieran Burnsidek p-nilpotentziaren lehenengo irizpideetako bat frogatu zuen talde teoriako nozioak erabiliz (cf. [1, Theorem II]).

1. **Teorema** (Burnside)**.** *Izan bitez G talde finitua eta P, G-ren Sylowen p-azpitaldea p zenbaki lehen baterako. Orduan,* $N_G(P) = C_G(P)$ *bada, G p-nilpotentea da.*

Geroago, Frobeniusek emaitza hori indartu zuen ondoko p-nilpotentzia irizpidea frogatuz (cf. [3]).

2. **Teorema** (Frobenius)**.** *Izan bitez G talde finitu bat eta P, G-ren Sylowen p-azpitaldea. Orduan:*

$$H \leq P \quad \textit{guztietarako} \quad \frac{N_G(P)}{C_G(P)} \quad p\textit{-talde bat da} \Leftrightarrow G \quad p\textit{-nilpotentea da.}$$

Frobeniusek bere izenez ezagunak diren taldeak definitu zituen eta Thompson izan zen talde horiek p-nilpotenteak direla frogatu zuena. Ondorengo teorema hau emaitza horren baliokidea da (cf. [8]).

3. **Teorema** (Thompson)**.** *Izan bedi G talde finitua. Orduan, existitzen bada identitatea ez den, puntu finkorik ez duen eta ordena lehena duen G-ren automorfismo bat, G p-nilpotentea da p zenbaki lehen guztietarako.*

Ikuspuntu geometrikoago batetik, aipatzekoak dira M. Atiyah, J. Tate eta D. Quillen. Haiek kohomologia taldeak erabili zituzten p-nilpotentzia irizpideak garatzeko garaian. Horien artean, Atiyah izan zen lehen p-nilpotentzia irizpidea frogatu zuena eta hortik Quillenek emaitza orokorrago bat eman zuen. Azkenik, Tatek dimentsio baxuko kohomologia erabiliz burutu egin zuen gaur egungo azken p-nilpotentzia irizpidea, artikulu honetan frogatuko duguna (cf. [5, 7]).

4. **Teorema** (Atiyah)**.** *Izan bitez G talde finitua eta P, G-ren Sylowen p-azpitaldea, p zenbaki lehen baterako. Orduan:* $H^i(P, \mathbb{F}_p) \to H^i(G, \mathbb{F}_p)$ *isomorfismo bat da i handi guztietarako baldin eta soilik baldin G p-nilpotentea bada.*

5. **Teorema** (Tate)**.** *Izan bitez G talde finitua eta P, G-ren Sylowen p-azpitaldea. Orduan:*

$$G \ p\textit{-nilpotentea da} \Leftrightarrow H^1(P, \mathbb{F}_p) \to H^1(G, \mathbb{F}_p) \ \textit{isomorfismo bat da.}$$

Artikulu honetan jakintzat ematen da irakurleak talde-teoriako ikastaroren bat hartuta bereganatuak dituela talde-teoriako definizioak. Hori bada, taldeen arteko biderketak definituz hasiko gara, horrek p-nilpotentzia nozioa definitzeko bide bat emango baitigu. Ondoren, talde bat nilpotentea izateak zer esan nahi duen erakutsiko dugu eta hasiera batean, hain definizio desberdinak dituzten nilpotentzia eta p-nilpotentziaren horien arteko erlazioa erakusten da 5. atalean. Hurrengo atalean, p-nilpotentzia irizpide bat aurkezten da, talde teoriako nozioak erabiliz; honek Tateren irizpidea frogatzeko bidea irekiko digu. Azkenik, talde baten kohomologia definitu eta propietate nagusiak ikusiko ditugu, Tateren p-nilpotentzia irizpidea frogatzeko.

Talde teorian nahiz kohomologia taldeen inguruan informazio gehiago nahi duten irakurleentzat, ondoko bi erreferentzia hauek ematen dira:[6] eta [2].

2. ESKERRAK

Nire eskerrik beroenak artikulua idazteko prozesuan jaso dudan laguntzagatik. Gustavo, Iraide eta Amaiaren gomendioak baliagarriak izan dira. Bereziki, Joni, eskerrik asko.

3. TALDEEN ARTEKO BIDERKETAK ETA *p*-NILPOTENTZIA

Atal honetan, taldeen familia bat izanik, beraien artean egin ahal diren biderketak aurkeztuko ditugu. Kasu batzuetan, taldeen arteko biderketa egiteak, bidea ematen digu talde berri bat sortzeko eta beste kasu batzuetan berriz, talde baten deskonposizio baterako bide bat. Azken kasu hori interesgarria da, izan ere, talde osoarekin lan egin ordez, deskonposizioko talde txikiagoak aztertuz lan egiteko aukera luzatzen digu eta normalean, lana errazagoa gertatzen da horrela.

Izan bitez $G_1, \dots, G_n$ talde finituak. Demagun talde horien artean biderketa bat definitu nahi dugula eta biderketa horrek berriro ere beste talde bat definituko duela. Badirudi ondoko biderketa izan daitekeela definitu ahalko genukeen biderketa natural edota intuitiboena, biderketa kartesiarra erabiliz.

6. **Definizioa.** Izan bitez $G_1, \dots, G_n$ taldeak. Orduan, $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ taldeari (kanpo) biderketa zuzena deritzo, bertan taldeko eragiketa ondoko eran definitzen delarik $(g_1, \dots, g_n)(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n) = (g_1\tilde{g}_1, \dots, g_n\tilde{g}_n)$, $(1, \dots, 1)$ elementu neutroa da eta $(g_1, \dots, g^n)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g^{-1})$.

7. **Notazioa.** (Kanpo) biderketa zuzena $\prod_{i=1}^{n} G_i$ idazten da eta G_i taldeak abeldarrak badira, G ere abeldarra da eta $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ idazten da.

8. **Adibidea.** Har dezagun $(\mathbb{R}, +)$ taldea, orduan $\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ non $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ den. Kasu honetan, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ berriro ere talde bat izango da. Irakurleek ariketa modura froga dezakete hori.

Orokorrean, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $(\mathbb{R}^n, +)$ ere taldea da. Baita $(\mathbb{Z}^n, +)$ eta $(\mathbb{Q}^n, +)$ ere.

Gerta daiteke ordea guk aztergai ditugun talde horiek beste talde baten azpitaldeak izatea. Hau da, demagun $H_i \leq G$, $i = 1, \ldots, n$ azpitaldeak ditugula. Galde hau egin daiteke: H_i azpitaldeen biderketa zuzena eginez gero, G berreskuratu dezakegu? Galdera hori erantzutetik dator (barne) biderketa zuzenaren definizioa zeinak baldintza bat gehiago eskatzen duen.

9. **Definizioa.** Izan bitez G taldea eta $H_1, \ldots, H_n$ bere azpitaldeak. Orduan, G azpitalde horien (barne) biderkadura zuzena dela esaten da, baldin eta $\phi : \prod_{i=1}^{n} Hi \to G$ isomorfismo bat bada, bertan $\phi(h_1, \ldots, h_n) = h_1 \cdots h_n$ izanik.

Nabarmendu nahi da G talde bat eta bere azpitaldeak hartuta, ez dela orokorrean posible izango azpitalde horien biderketa zuzena eginez G berreskuratzea. Hala ere, baldintza jakin batzuen menpean, gai izango gara G talde bat azpitalde jakin batzuen biderketa zuzen gisa idazteko.

10. **Teorema.** *Izan bedi G taldea eta demagun $H_i \leq G$, azpitaldeak direla $i = 1, \ldots, n$ guztietarako. Orduan, G, H_i azpitaldeen (barne) biderkadura zuzena da baldin eta soilik baldin H_i azpitaldeak normalak badira eta $H_i \cap \prod_{j\neq i} H_j = 1$ betetzen bada i guztietarako.*

Biderketa kartesiarrak beraz, barne nahiz kanpo biderketa zuzena definitzen dizkigu. Baina bi talde izanik, biderketa kartesiarra egitea al da biderketa posible bakarra? Demagun G taldea dela eta H eta K bere bi azpitalde ditugula. Orduan $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ ere G-ren azpitaldea al da? Lehenengo eta behin, ikus dezagun HK talde bat ote den. Ohar bedi multzo horretako elementuak hk modukoak direla. Izan bitez h_1k_1 eta h_2k_2 bertako bi elementu. Beraien arteko biderketa, $h_1k_1h_2k_2$ izanik, hasiera batean ez dago HK-n eta ez dakigunez H eta K azpitaldeetako elementuak elkarrekin trukatzen diren edo ez, hasiera batean behintzat HK ez da taldea. Izan ere, garbi dago G abeldarra bada HK azpitaldea izango dela. Hala ere, $h_1 \in H$ eta $k_2 \in K$ direnez, HK talde bat izateko baldintza $k_1h_2 \in HK$ betetzea da $k_1 \in K$ eta $h_2 \in H$ guztietarako. Eta beraz, HK taldea da baldin eta $HK = KH$ bada.

Demagun orain K, G-ren azpitalde normala dela. Idatz bedi

$$h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2h_2^{-1}\, k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1^{h_2}k_2$$

non elementu hau $H\,K$ multzoan dagoen. Ondorioz, G taldea izanik, H bere azpitaldea eta K bere azpitalde normala izanik, $H\,K$ ere G-ren azpitaldea da.

Aurreko kasuetan egin dugun moduan, berriro galde dezakegu, N azpitalde normal bat izanik, ea existitzen den H, G-ren azpitalde bat non $N\,H$ biderketa eginda, G taldea berreskuratzen dugun.

11. **Definizioa.** Izan bedi G taldea, H bere azpitaldea eta N G-ren azpitalde normala. Orduan, ondoko baieztapen hauek baliokideak dira:

i) $G = NH$ eta $N \cap H = 1$ dira.
ii) $G = HN$ eta $N \cap H = 1$ dira.
iii) G-ko elementu bakoitza H eta N -ko elementuen biderkadura bezala idatz daiteke modu bakar batean, azpitalde horiek biderkatzeko ordena finkaturik ($H\,N$ edo $N\,H$).

Baieztapen horietako bat (eta ondorioz, guztiak) egia bada, orduan G, H eta N-ren biderkadura erdizuzena dela esaten da eta $G = H \ltimes N$ idazten da.

Azpimarratu nahi da, orokorrean ez dela egia G taldea eta N bere azpitalde normala hartuta, badenik $G = H \ltimes N$ betetzen duen beste H azpitalde bat. Hona hemen, $G = H \ltimes N$ betetzeko baldintza nahikoa luzatzen digun emaitza (cf. [9]).

12. **Teorema** (Schur-Zassenhaus). *Izan bitez G talde finitua eta N, G-ren azpitalde normala non $|N|$ eta $|G : N|$ elkarren artean lehenak diren. Orduan, existitzen da G-ren azpitalde bat H non $G = H \ltimes N$ den.*

13. **Adibidea.** Ikus ditzagun biderkadura erdizuzen gisan deskonposatu ahal diren edo deskonposatu ezin diren taldeen adibideak.

(1) Talde bakunak ezin dira biderketa erdizuzen moduan deskonposatu, talde horiek azpitalde normal eztribial propiorik ez dutelako.
(2) Izan bedi $Q_8 =< x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2 , y^{-1} xy = x^{-1} >$ quaternioen taldea. Q_8-ren azpitalde guztiak normalak dira nahiz eta Q_8 bera abeldarra ez izan. Ez da posible talde hori bi azpitalderen arteko biderketa erdizuzen modura idaztea.
(3) Izan bedi $D_8 =< x, y \mid x^4 = y^2 = 1, y^{-1} xy = x^{-1} >$ talde diedrikoa non $|D_8| = 8$ den. Ohar bedi D_8 talde ezabeldarrak azpitalde normal bat duela; $< x >$, $| < x > | = 4$ izanik. Gainera, $< y >$ azpitaldeak ondokoak betetzen ditu: $| < y > | = 2$ eta $< x > \cap < y >= 1$ dira. Orduan, $D_8 =< y > \ltimes < x >$ da. Ohar gaitezen beraz, Schur-Zassenhausen teoreman aurkako inplikazioa ez dela zertan bete.
(4) Izan bedi G talde finitua non $|G| = pq$ den p, q zenbaki lehenetarako. Cauchyren teoremari esker, badakigu G taldeak bi azpitalde izango dituela, bata, H, p ordenakoa eta bestea, K, q ordenakoa. Ohar gaite-

> zen $H \cap K = 1$ dela. Beraz, bi aukera ditugu: G abeldarra izatea eta beraz, $G = H\,K$ izatea, edo G abeldarra ez izatea. Azken kasu horretan, demagun $p < q$ dela. Orduan, Sylowen 3. teoremaren arabera, K denez G-ren Sylowen p-azpitalde bakarra, K azpitalde normala da. Orduan, $G = H \ltimes K$ da.

Adibideetako kasu batzuetan beraz, gai izan gara talde bat bere azpitaldeen arteko biderketa erdizuzen moduan deskonposatzeko. Orokorrean errazagoa gertatzen da azpitalde horien propietateak ezagutzea eta beraiekin lan egitea, talde osoa hartzea baino.

Orain arte, G taldea eta N bere azpitalde normala izan ditugu abiapuntu. Demagun orain ondoko galdera egiten dela: G talde bat eta H G-ren edozein azpitalde izanik, ba al da N azpitalde normal bat non $G = H \ltimes N$ den? Espero bezala, orokorrean, galdera horren erantzuna ere ezezkoa izango da.

Ohar gaitezen hasiera batean, H , G-ren edozein azpitalde izan daitekeela. Demagun H ez dela edozein azpitalde, eta bereziki, demagun H G-ren Sylowen p-azpitaldea dela p zenbaki lehen baterako. Azpitalde hori $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ modura idatziko dugu. Abiapuntu hori izango da p-nilpotentziaren ideiaren sorrera, hain zuzen ere.

14. **Definizioa.** Izan bedi G talde finitua. Orduan, p zenbaki lehen baterako, G p-nilpotentea dela esango dugu, baldin eta P Sylowen p-azpitalde baterako, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, existitzen bada G-ren azpitalde normal bat N non G eta $P \ltimes N$ isomorfoak diren, hots, $G \simeq P \ltimes N$.

G talde bat izanik, ez da erraza izango p-nilpotentea den edo ez jakitea definizioa erabilita. Horregatik, artikuluaren sarreran esan bezala, hainbat matematikari aritu dira arlo honetan, hainbat irizpide eman ahal izateko. Artikulu honetan, Tateren p-nilpotentzia irizpidea frogatuko dugu, baina horren aurretik, beharrezkoa izango da talde baten kohomologia definitzea, besteak beste.

Hala ere, atal horretara iritsi aurretik, sarreran esana da, nilpotentziaren definizio eta propietate nagusi batzuk azalduko ditugula. Hasiera batean nilpotentzia eta p-nilpotentziaren definizioak oso desberdinak izan arren, eta beraz, beraien artean erlaziorik ez dagoela pentsa dezakegun arren, erakutsi nahi da, badela erlaziorik bi ideia horien artean.

4. NILPOTENTZIA: DEFINIZIOA ETA PROPIETATEAK

Hasieran esan dugun moduan, nilpotentziak aztertzen du talde bat abeldarra izatetik zein hurbil edo urrun dagoen. Izan ere, talde finitu bat nilpotentea bada eta elkarrekiko ordena lehena duten bi elementu hartzen baditugu, elementu horiek elkarrekin trukatzen dira. Honekin lotua dago beste kontzeptu bat, talde baten azpitalde deribatuarena alegia. Taldeko azpitalde normalik txikiena da azpitalde deribatua, hasierako taldearekin zatidura hartzean talde abeldar bat ematen duena. Hori ere, modu bat da talde bat abeldarra izatetik zein urrun dagoen jakiteko eta bereziki, deribatua 1 bada, taldea abeldarra izango da.

Izan bedi G talde finitu bat, orduan bere azpitalde deribatua, $[G, G]$ modura adieraziko duguna, $[g, h]$ motako elementuez sortua da, $[g, h] = g^{-1} \cdot h^{-1} \cdot g \cdot h$ izanik. Hala ere, G talde bat eta H haren azpitalde bat badira, $[H, G]$ ere ondo definituta dago zeina $[h, g] = h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot h \cdot g$ motako elementuez sorturik dagoen, $g \in G$ eta $h \in H$ guztietarako.

Gainera, $[g, h] = 1$ beteko da baldin eta soilik baldin g eta h elkarrekin trukatzen badira.

15. **Definizioa.** Izan bedi G talde finitu bat, orduan:

i) G-ren serie zentral beherakorra, $\{\gamma_i(G)\}$, G-ren azpitaldeen segida bat da

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_n(G) \supseteq \ldots$$

non $\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$ den $\forall i \geq 2$.

ii) G-ren serie zentral gorakorra, $\{Z_i(G)\}$, G-ren azpitaldeen segida bat da

$$1 = Z_0(G) \subseteq Z(G) = Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \cdots \subseteq Z_n(G) \subseteq \ldots$$

non $\frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}\right)$ betetzen den.

iii) G-ren serie zentral bat, $\{N_i\}$, G-ren azpitalde normalen segida bat da

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_k$$

non $\frac{N_i}{N_{i-1}} \subseteq Z\left(\frac{G}{N_{i-1}}\right)$ betetzen den, edo baliokidea dena, $[N_i, G] \subset N_{i-1}$.

Existizen bada k zenbaki bat zeinentzat $\gamma_{k+1}(G) = \{1\}$, $Z_k(G) = G$ edo $N_k = G$ eta $N_0 = 1$ betetzen duen $\{N_i\}$ serie zentral baterako, orduan hiru propietate horiek beteko dira, baliokideak direlako. Kasu horretan, G nilpotentea dela esaten da eta k zenbaki horietan txikienari G-ren nilpotentzia indizea deritzo.

Ikusi nahi dugu, benetan definizioko hiru baldintza horiek baliokideak direla eta horretarako ondorengo proposizio hau frogatuko dugu.

16. **Proposizioa.** *Izan bedi G talde finitua eta $\{N_i\}$, G-ren serie zentrala. Orduan:*

(1) $N_0 = 1$ bada, orduan $N_i \leq Z_i(G)$ da $i \geq 0$ guztietarako.
(2) $N_k = G$ bada, orduan $\gamma_i(G) \leq N_{k+1-i}$ da $i \geq 1$ guztietarako.

Froga. Lehendabizi, $i \geq 0$ guztietarako, $N_i \leq Z_i(G)$ dela ikusiko dugu indukzioa erabiliz. $i = 0$ kasua tribiala da $N_0 = 1 \leq 1 = Z_0(G)$ betetzen baita.

Demagun $N_{i-1} \leq Z_{i-1}(G)$ dela. Frogatu nahi dugu $N_i \leq Z_i(G)$ dela. Gogoratu bedi, definizioz, $\frac{N_i}{N_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{N_{i-1}}\right)$ betetzen dela. Izan bitez $x \in N_i$ eta $y \in G$ edozein elementu. Ohar gaitezen $N_{i-1}x$ eta $N_{i-1}y$ elkarrekin trukatzen direla. Hots, $[x, y] \in N_{i-1} \leq Z_{i-1}(G)$. Orduan, $Z_{i-1}(G)x$ eta $Z_{i-1}(G)y$ ere elkarrekin trukatzen dira. Edozein $y \in G$ hartu dugunez,

$$Z_{i-1}(G)x \in Z(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}) = \frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)}.$$

Gainera, hau egia da $x \in N_i$ guztietarako, eta beraz, $N_i \leq Z_i(G)$ betetzen da.

Beste partekotasuna frogatzeko ere indukzioa erabiliko dugu. Ohar gaitezen, $i = 1$ kasuan ondoko berdintza daukagula: $\gamma_1(G) = G \leq N_k(G) = G$. Demagun indukzio hipotesia betetzen dela, hau da, $\gamma_{i-1}(G) \leq N_{k+2-i}$ dela.

Izan bitez $x \in \gamma_{i-1}(G)$, $y \in G$ edozein elementu. Orduan,

$$N_{k-1-i}x \in \frac{N_{k+2-i}}{N_{k+1-i}} \leq Z(\frac{G}{N_{k+1-i}})$$

Beraz, $N_{k+1-i}x$ eta $N_{k+1-i}y$ elkarrekin trukatzen dira, hau da, $[x, y] \in N_{k+i-1}$ da $y \in G$, $x \in \gamma_{i-1}(G)$ guztietarako. Ondorioz, $\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G] \leq N_{k+1-i}$ betetzen da. □

Orain, aurreko definizioko hiru baldintzak baliokideak direla ikusiko dugu aurreko proposizioa erabiliz:

Froga. Inplikazio ezberdinak betetzen direla ikusiko dugu:

iii) $\Rightarrow$ i) Demagun, existitzen dela $\{N_i\}$ serie zentral bat non $1 = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = G$ den. Aurreko proposiziotik, $\gamma_i(G) \leq N_{k+1-i}$ denez eta N_{k+1-i} azpitalde tribialera iristen denez, $\gamma_i(G)$ ere azpitalde tribialera helduko da.

iii) $\Rightarrow$ ii) Hemen, aurreko ideia bera erabiliko dugu. Kasu honetan, $N_i \leq Z_i(G)$ da eta N_i segida $k \in$ N baterako G-ra iristen denez, orduan $Z_i(G)$ segidari ere gauza bera gertatuko zaio.

ii) $\Rightarrow$ iii) Demagun, definizioz ondoko segida gorakorra daukagula $\{Z_i(G)\}$. Ikusi dugu, $Z_i(G)$ bakoitza $Z_{\{i+1\}}(G)$-ren azpitalde normala izango dela eta $\frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)} \subseteq Z\left(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}\right)$ betetzen dela. Beraz, nahikoa da $N = Z(G)$ hartzea, serie zentrala eraikitzeko.

i) $\Rightarrow$ iii) Demagun $\gamma_i(G)$ definizioan ematen den segida dela non $\gamma_{k+1}(G) = 1$ den. Ohar bedi, hori serie zentral bat dela. Izan ere, $x \in \gamma_{i-1}(G)$ eta $y \in G$ badira, orduan $[x, y] \in \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$. Beraz, $\frac{\gamma_{i-1}(G)}{\gamma_i(G)} \leq Z\left(\frac{G}{\gamma_i(G)}\right)$. Ondorioz, nahikoa da $N_{k+1-i} = \gamma_i(G)$ hartzea $i \geq 1$ bakoitzerako.

$\square$

17. **Proposizioa.** *Izan bitez G taldea eta N bere azpitalde normala, orduan* $\gamma_c\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{\gamma_c(G)N}{N}$ *da.*

18. **Adibidea.** Izan bedi G, gorputz baten gaineko Heissenbergen taldea, ondoko matrizeek osaturik:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non a, b, c gorputzeko elementuak diren. G taldea lehenago adierazitako motako matrizeen multzoa da.

Orduan, existitzen da ondoko motako matrizeez osaturiko serie zentrala:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \leq \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \leq \left\{\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

eta beraz, G nilpotentea da, definizioko hirugarren propietatea (eta beraz, hirurak) betetzen delako; nilpotentzia indizea bi da.

19. **Adibidea.** p-talde finituak nilpotenteak dira.

20. **Propietateak.** Talde nilpotenteen propietate nagusi batzuk ondokoak dira:

(1) Talde abeldar oro nilpotentea da.
(2) Talde nilpotente baten azpitaldeak ere nilpotenteak dira.
(3) Talde nilpotente baten irudi homomorfikoa berriro ere nilpotentea da.
(4) Talde nilpotenteen biderketa zuzen finitua berriro ere talde nilpotentea da.

5. *p*-NILPOTENTZIA ETA NILPOTENTZIAREN ARTEKO ERLAZIOA

Lehenago esan moduan, atal honetan erakutsi nahi da erlazio hertsia dagoela p-nilpotentzia eta nilpotentziaren artean, nahiz eta beraien definizioak oso desberdinak izan. Horretarako, lehendabizi ikusiko dugu, G talde bat p-nilpotentea bada G-ren ordena zatizen duten p zenbaki lehen guztietarako, orduan G nilpotentea izango dela. Gainera, kasu honetan, G hori biderkadura zuzen gisa idatzi ahal dela erakutsi nahi dugu eta deskonposaketa hori p-nilpotentzia nozioarekin lotuta dago.

21. **Proposizioa.** *Izan bedi G talde finitua, orduan ondoko baieztapenak baliokideak dira:*

(1) G p-nilpotentea da $|G|$ zatitzen duten p zenbaki lehen guztietarako.
(2) G bere Sylowen p-azpitaldeen biderkadura zuzena da. Hau da, $p_1, \ldots, p_k$ G-ren ordena zatitzen duten zenbaki lehenak badira hurrenez hurren eta $S_{p_1}, \ldots, S_{p_k}$ G-ren Sylowen $p_1, \ldots, p_k$ -azpitaldeak badira, orduan,

$$G \cong S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}.$$

Froga. Hurrengo karakterizazio hau erabiliko dugu: $G \cong S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}$ da baldin eta soilik baldin S_{p_i} azpitalde bakoitza G-ren azpitalde normala bada.

(2) $\Rightarrow$ (1) Demagun S_{p_i} azpitalde bakoitza G-ren azpitalde normala dela. Orduan, $G = S_{p_i} \ltimes N_{p_i}$ non $N_{p_i} = \prod_{p_j \neq p_i} S_{p_j}$. Beraz, G p_i -nilpotentea da $i = 1, \ldots, k$ guztietarako.

(1) $\Rightarrow$ (2) Demagun G p-nilpotentea dela $|G|$ zatitzen duten p zenbaki lehen guztietarako eta froga dezagun S_i azpitalde bakoitza G-ren azpitalde normala dela $i = p_1, \ldots, p_k$ guztietarako. Izan bedi $q \| G|$ zenbaki lehen bat. G q-nilpotentea denez, $G = S_q \ltimes N_q$ idatzi ahalko dugu. Har dezagun $p \neq q$ beste zenbaki lehen bat eta ohar gaitezen p-k ez duela $|G : N_q|$ zatitzen. Izan bedi T_p, N_q-ren Sylowen p-azpitaldea. Orduan, T_p, G-ren Sylowen p-azpitaldea ere bada. Sylowen 2. teoremaren arabera, existitzen da$g \in G$ elementu bat non $S_p = T_p^g$ den eta beraz, $S_q \subseteq N_q^g = N_q$ beteko da $q \neq p$ zenbaki lehen guztietarako.

Ondorioz, $S_p \subseteq \bigcap_{q \neq p} N_q$. Bestalde $q \neq p$ guztiek ez dute $|N_q|$ zatitzen eta beraz, $\bigcap_{q \neq p} N_q$ p-azpitaldea da. Ondorioz, $S_p = \bigcap_{q \neq p} N_q$ da. Gainera, $S_p = \bigcap_{q \neq p} N_q$ azpitalde normalen ebakidura denez, S_p azpitalde normala da. □

22. **Proposizioa.** *Izan bedi G talde finitua eta demagun G p-nilpotentea dela G-ren ordena zatitzen duten p zenbaki lehen guztietarako. Orduan G nilpotentea da.*

Froga. Aurreko proposizioari esker, badakigu G Sylowen p-azpitaldeen biderkadura zuzena dela. Gainera, 19. Adibidean ikusi dugu p-talde finituak nilpotenteak direla eta 20-ko 4. propietateari jarraiki, talde nilpotente horien biderkadura zuzen finitua berriro ere nilpotentea da. Ondorioz, G talde nilpotentea da.

□

Esan behar da aurreko proposizio horretan frogatu dugunaren alderantzizkoa ere egia dela eta hala nahi duen irakurleak erreferentzia honetan aurki dezake emaitza (cf. [6, Theorem 5.2.4]). Teorema horren eta aurreko emaitzen ondorioa da ondorengo teorema hau zeina atal honetako emaitza nagusia izango den. Emaitza honek nilpotentzia eta p-nilpotentziaren arteko erlazioa azaltzen du:

23. **Teorema.** *Izan bedi G talde finitua. Orduan ondoko baieztapenak baliokideak dira:*

(1) G nilpotentea da.
(2) G p-nilpotentea da $|G|$ zatitzen duten p zenbaki lehen guztietarako.
(3) G bere Sylowen p-azpitaldeen biderkadura zuzena da.

6. *p*-NILPOTENTZIA IRIZPIDE BAT

Atal honetan p-nilpotentzia irizpide bat ikusi eta frogatuko dugu. Horretarako, ondoko notazio hau erabiliko dugu: izan bitez G talde finitua eta p zenbaki lehena. Defini dezagun $\lambda_1(G) = G$, $\lambda_i(G) = \lambda_{i-1}(G)^p \cdot [\lambda_{i-1}(G), G]$ $i \geq 2$ guztietarako eta $\lambda_\infty(G) = \cap_i \lambda_i(G)$.

Frogatu nahi dugu G taldea p-nilpotentea dela baldin eta soilik baldin $\lambda_n(P) = \lambda_n(G) \cap P$ bada n guztietarako, P G-ren Sylowen p-azpitaldea izanik. Horretarako,ondorengo hiru lema hauek ikusiko ditugu.

24. **Lema.** *P p-taldea bada, orduan $\lambda_\infty(P) = 1$ da.*

Froga. p-taldeak nilpotenteak direnez existitzen da serie zentral bat $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{1\}$ azpitalde tribialetik G talde osoraino. Har dezagun serie zentral hori $i \geq 1$ guztietarako $|N_i : N_{i+1}| = p$ baldintza betetzen duelarik. Indukzioz $\lambda_i(P) \leq N_i$ betetzen dela ikusiko dugu: $i = 1$ kasuan, $\lambda_1(P) = N_1 = P$ betetzen da. Orain, demagun $\lambda_i(P) \leq N_i$ dela, orduan N_i/N_{i+1} berretzaile modura p duen talde abeldarra denez, $\lambda_{i+1}(P) = \lambda_i(P)^p\ [\lambda_i(P), P] \leq N_{i+1}$ beteko da. Azkenik, bada $k \in$ N zenbaki bat non $N_{k+1} = 1$ beteko den eta beraz, $\lambda_\infty(P) = 1$ da. □

Ondorengo emaitza azaldu ahal izateko, azter dezagun $p_i : P \to G \to G/\lambda_i(G)$ inklusio eta epimorfismo kanonikoaren konposizioaren bidez definituriko homomorfismoa. Orduan, $\lambda_i(P) \subseteq \lambda_i(G)$ eta $\lambda_i(P) \subseteq P$ direnez, $\pi_i : P/\lambda_i(P) \to G\ \lambda_i(G)$ ondo definiturik dago. Homomorfismo hori erabiliko dugu ondoko leman.

25. **Lema.** *Izan bitez G talde finitua eta P, G-ren Sylowen p-azpitaldea. Orduan, $i \geq 1$ guztietarako,*

$$\pi_i : \frac{P}{\lambda_i(P)} \to \frac{G}{\lambda_i(G)} \textit{ isomorfismo bat da} \Leftrightarrow \lambda_i(P) = \lambda_i(G) \cap P.$$

Froga. $\Rightarrow$) Demagun π_i: $\frac{P}{\lambda_i(P)} \to \frac{G}{\lambda_i(G)}$ isomorfismo bat dela. Orduan, definizioz, Ker $\pi_i = \{x \in P |\ \pi_i(x) = 1\} = \lambda_i(P)$ da, baina aldi berean, Ker $\pi_i = P \cap \lambda_i(G)$ da. Beraz, $\lambda_i(P) = \lambda_i(G) \cap P$ da.

$\Leftarrow$) Demagun $P \cap \lambda_i(G) = \lambda_i(P)$ dela. Ohar bedi $G = P\lambda_i(G)$ dela $i \geq 1$ guztietarako. Hori horrela dela ikusteko, izan bedi $|G| = p^a m$ non $(p, m) = 1$ den. Alde batetik, $|G : \lambda_i(G)|$ p-ren potentzia bat denez, $m \mid |\lambda_i(G)|$ da, eta beraz, $m \mid |P\lambda_i(G)|$. Beste alde batetik, $p^a \mid |P|$ da eta beraz, $p^a \mid |P\lambda_i(G)|$. Ondorioz, $p^a m \mid |P\lambda_i(G)|$. Beraz, $P\lambda_i(G) \subseteq G$ eta $|G| \mid |P\lambda_i(G)|$ izanik, $G = P\lambda_i(G)$ betetzen da. Orduan, isomorfiaren 2. teoremari jarraiki, $i \geq 1$ guztietarako ondokoa lortuko dugu:

$$\frac{P}{\lambda_i(P)} = \frac{P}{P \cap \lambda_i(G)} \cong \frac{P\lambda_i(G)}{\lambda_i(G)} = \frac{G}{\lambda_i(G)}.$$

□

26. **Lema.** *Izan bedi G talde finitua eta P bere Sylowen p-azpitaldea. Orduan, G p-nilpotentea da baldin eta soilik baldin $\frac{G}{\lambda_i(G)} \cong \frac{P}{\lambda_i(P)}$ bada $i \geq 1$ guztietarako.*

Froga. $\Rightarrow$) Izan bedi N G-ren p-konplementu normala, hau da, demagun $G = P \ltimes N$ dugula. Demagun $|G| = p^a m$ dela. Alde batetik $|G : \lambda_i(G)|$ p-ren berretura bat da, eta beraz Lagrangen Teoremaren arabera $|N\lambda_i(G) : \lambda_i(G)|$ p-ren berretura bat da. Bestetik $|N| = m$ dugu, eta beraz $|N\lambda_i(G) : \lambda_i(G)|$ m-ren zatitzaile bat da. Orduan $|N\lambda_i(G) : \lambda_i(G)| = 1$, honek esan nahi du, $N \subseteq \lambda_i(G)$ dela. Orduan,

$$\frac{G}{\lambda_i(G)} \cong \frac{\frac{G}{N}}{\frac{\lambda_i(G)}{N}} = \frac{\frac{G}{N}}{\lambda_i(\frac{G}{N})} \cong \frac{P}{\lambda_i(P)}$$

$\Leftarrow$) Demagun $\frac{G}{\lambda_i(G)} \cong \frac{P}{\lambda_i(P)}$ dela $i \geq 1$ guztietarako. Berriro ere erabil dezagun $\lambda_\infty(P) = 1$ dela, $\frac{P}{\lambda_\infty(P)} = P \cong \frac{G}{\lambda_\infty(G)}$ lortzeko. Kasu honetan, $\lambda_\infty(G) = N$ izango da G-ren p-konplementu normala. Hau da, G p-nilpotentea da. $\square$

Aurreko bi lema horien ondorioa izango da ondoko teorema hau.

27. **Teorema.** *Izan bitez G talde finitua eta P bere Sylowen p-azpitaldea p zenbaki lehen baterako. Orduan, G p-nilpotentea da baldin eta soilik baldin* $\lambda_i(P) = \lambda_i(G) \cap P$ *bada* $i \geq 1$ *guztietarako.*

7. KOHOMOLOGIA TALDEAK

7.1. Homologia teoria

Orokorrean, X espazio topologiko bat, eta zenbaki arrunt bat k izanik, X-ri talde abeldar bat lotu ahal zaio: $H_k(X)$, k. homologia taldea izenekoa. Talde horiek $k \in \mathbb{N}$ bakoitzerako definitu daitezkeenez, homologia espazio topologiko bat talde abeldarren segida batekin lotzen duen prozedura orokor baten moduan uler dezakegu. Geometri ikuspegi batetik aldiz, talde horiek, espazio topologikoak dituen k dimentsioko zuloen berri ematen digute. Baina gerta liteke, k dimentsioko zulo horiek geometrikoki ikusgaiak ez izatea.

Nola eraiki homologia taldeak: Izan bedi X espazio topologikoa. Lehendabizi, X-ri loturiko konplexuen kate bat $\{C_n(X)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eraiki behar da, hau da, $C_n(X)$ talde abeldarrez eta horien arteko homomorfismoez $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ osatutako ondoko segida:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

non $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ betetzen duten $i \in \mathbb{Z}$ guztietarako. Ohar gaitezen, propietate hori dela-eta $\mathrm{Im}\ \partial_n \subseteq \mathrm{Ker}\ \partial_{n-1}$ betetzen dela. Orduan, honela definitzen dugu k. homologia taldea $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako:

$$H_k(X) := \frac{\mathrm{Ker}\ \partial_k}{\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}}.$$

Horren antzera, X espazio topologiko bat izanik, X-ren k. kohomologia taldea definitu dezakegu, $H^k(X)$ alegia. Talde horiek definitzeko modua aurreko berdina da, baina kasu honetan konplexuen kokate bat eraikitzen da. Hau da, $\{C^n(X)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ talde abeldarrak d^i homomorfismoen bidez lotuta egongo dira baina graduaren balioa unitate bat igoz:

$$\cdots \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

non $d^n \circ d^{n-1} = 0$ den $n \in \mathbb{Z}$ guztietarako. Beste behin, propietate horrengatik, $\operatorname{Im} d^n \subseteq \operatorname{Ker} d^{n+1}$ beteko da eta k. kohomologia taldea ondoko eran definituko dugu $k \in$ Z guztietarako:

$$H^k(X) := \frac{\operatorname{Ker} d^k}{\operatorname{Im} d^{k+1}}.$$

Henri Poincaré izan zen homologiak zer izan behar zuen 1895. urtean definitzera ausartu zen lehen matematikaria eta horregatik, homologia teoriaren sortzailetzat hartzen da. Garai horretan, Poincarék proposatutako definizioek kalkulu astunak behar zituzten baina Noetherrek 1940 inguruan emandako argibideei esker, hainbat homologia teoria garatzen hasi ziren. Horrela, homologia sinpliziala, homologia singularra, Cechen homologia eta bestelako batzuk garatu zituzten hainbat matematikarik: Cech, Alexander, Eilenberg eta Vietoris, besteak beste. Hala ere, homologia-teoria horiek independenteki definitu ziren eta Samuel Eilenberg eta Norman Steenrod matematikariei esker garatu zen homologia-teoria orokorra 1945. urtean.

Kohomologia teoria berriz, homologiaren atzetik etorri zen, Poincarék bi teoria horien arteko erlazio bat aurkitu baitzuen. Hala ere, Poincarék froga plazaratu eta urte batzuk geroago jabetu ziren erlazio garrantzitsu horretaz. Kohomologian ere hainbat teoria garatu ziren, Cechen kohomologia eta De Rhamen kohomologia besteak beste.

Talde (ko)homologikoak, espazio topologikoentzat definitzeaz gain, G talde baterako ere defini daitezke eta guk talde finituen kohomologia eraikitzea dugu helburu. Are gehiago, artikulu honetan, nahikoa izango da lehen hiru kohomologia-taldeak definitzea, hau da, H^0, H^1 eta H^2 .

28. **Oharra.** *Nahiz eta (ko)homologia taldea $H_k^{(k)}(X)$ moduan idatzi dugun, talde hauek badute bigarren osagarri batekiko menpekotasuna. Beraz, $H^k(X)$ idaztean, $H^k(X, \mathbb{Z})$ esan nahi dugu zehazki. Aurrerago ikusiko dugu definizioa baina esan dezagun oraingoz (ko)homologia taldeak talde, gorputz nahiz moduluen gainean definitu ahal direla. Guk, bereziki, G talde finitua izanik, G-moduluen gainean eraikiko ditugu.*

7.2. Talde finitu baten kohomologia

Atal honetan ikusiko dugu G-ren kohomologia taldeak nola definitzen diren M modulu bat eta G talde baterako. Horretarako, beharrezkoa izango da bai moduluen bai ebazpen injektiboen nozioak definitzea.

29. **Definizioa.** Izan bitez G taldea eta M talde abeldarra. M G-modulu bat da, baldin eta existitzen bada $\psi : G \times M \to M$ aplikazio bat non (g, m) bikotearen irudia gm idatziko dugun eta ondoko propietateak betetzen dituen $g, g' \in G$ eta $m, m' \in M$ guztietarako:

a) $g(m + m') = gm + gm'$.
b) $(gg')(m) = g(g'm)$ eta $1m = m$.

Kasu honetan, G-k M-ri eragiten diola esaten da.

Taldeen arteko homomorfismoak definitzen diren moduan, bi G-modulu M eta N izanik, $\alpha : M \to N$ moduluen arteko aplikazioa homomorfismoa da, $\alpha(m + m') = \alpha(m)+\alpha(m')$ eta $\alpha(gm) = g\alpha(m)$ betetzen badira. Orokorrean, M eta N moduluen arteko homomorfismoen multzoa $\mathrm{Hom}(M, N)$ moduan idazten da.

30. **Definizioa.** Izan bitez G taldea eta M G-modulua. M injektiboa dela esango dugu, baldin eta M-ren G-azpimodulu bakoitzeko definitzen den homomorfismo bakoitza M modulu osora hedatu ahal bada.

Gure kasuan, G talde finitu baten moduluak aztertzen ditugu, eta modulu guztiak izango dira injektiboak.

Defini dezagun $M^G = \{m \in M|\ gm = m\ \forall g \in G\}$ (M moduluko elementuak, G taldearen eragiketarekiko inbarianteak direnak) eta izan bedi $Mod_G \to \mathcal{A}b$ funktorea M bakoitzari M^G esleitzen diona. Ohar bedi, Mod_G moduluen kategoria adierazteko erabiliko dugula eta $\mathcal{A}b$ berriz, talde abeldarren kategoria adierazteko. Funktore hau ezkerretik zehatza da, hau da, $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ segida zehatza bada, orduan $0 \to M'^G \to M^G \to M''^G$ ere zehatza da. Gogoratu bedi mota horretako segida zehatza dela baldin eta aplikazio bakoitzaren irudia hurrengoaren nukleoa bada.

Demagun M G-modulua dela. Orduan, M-ren ebazpen injektibo bat, eskuinetik zehatza den ondoko erako segida bat da:

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

non I^n modulu injektiboak diren $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Aurreko funktorea aplikatuz, eskuinetik beharbada zehatza ez den ondoko segida lortzen dugu:

$$0 \longrightarrow M^G \xrightarrow{\varepsilon} (I^0)^G \xrightarrow{d^0} (I^1)^G \xrightarrow{d^1} (I^2)^G \xrightarrow{d^2} \cdots$$

Orduan, G-ren M gaineko k. kohomologia taldea ondoko eran definitzen da $k \geq 0$ guztietarako:

$$H^k(G, M) := \frac{Ker\ d^k}{Im\ d^{k-1}}.$$

7.3. **Dimentsio baxuko kohomologia taldeak**

Lehen esan bezala, artikulu honetan p-nilpotentziaren irizpideen artean John Taterena azpimarratu nahi dugu. Tatek kohomologia teoria erabiltzen du bere irizpidea frogatzeko eta teoria horrek, froga erraz bat eskaintzen digu. Gainera, nahikoa da 0, 1 eta 2. dimentsioko talde finituen kohomologia $\mathbb{F}_p = \{0, \ldots, p-1\}$ moduluarekiko ezagutzearekin. Horregatik, atal honetan kohomologia talde horien deskribapena emango dugu. Ondorengo emaitzak frogarik gabe emango ditugu (cf. [2]):

31. **Lema.** *$H^0(G, M) = M^G$ da. Bereziki, $H^0(G, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$ da, $\mathbb{F}_p$ modulu tribiala delako, G talde finitu guztietarako.*

32. **Lema.** *Izan bedi G talde finitua. Orduan, $H^1(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(\frac{G}{\lambda_2(G)}, \mathbb{F}_p)$ da.*

Demagun G talde finitua eta N bere azpitalde normala direla. Ohar bedi $H^1(N, \mathbb{F}_p)$ modulu bat dela non G taldeak eragiten duen. Bereziki, N azpitaldeak tribialki eragiten du. Beraz, $\frac{G}{N}$ zatidura taldeak ere $H^1(N, \mathbb{F}_p)$-ren gainean eragiten du. Horregatik, H^1 $(N, \mathbb{F}_p)$ moduluaren $\frac{G}{N}$-ren eragiketarekiko elementu finkoak aztertu ditzazkegu.

33. **Lema.** *$H^1(N, \mathbb{F}_p)^{\frac{G}{N}} = \mathrm{Hom}(\frac{N}{N^p[G, N]}, \mathbb{F}_p) \cong \frac{N}{N^p[G, N]}$ da.*

34. **Lema.** *$H^2(G, \mathbb{F}_p)$ kohomologia taldeko klase bakoitzak, G-ren $\mathbb{F}_p$ bidezko hedapen bat ordezkatzen du. Hots, $H^2(G, \mathbb{F}_p)$-ko klase bakoitzak, $1 \to \mathbb{F}_p \to \tilde{G} \to G \to 1$ motako hedapen bat irudikatzen du, bertan $\tilde{G}$ talde bat izanik.*

35. **Propietateak.** Ondokoak betetzen dira:

(i) Izan bitez G talde finitua, $H \leq G$ eta M , H -modulu bat. Orduan, bada murrizketa izeneko aplikazio bat: $\mathrm{Res} : H^i(G, M) \to H^i(H, M)$.

(ii) Izan bitez G talde finitua, H bere azpitalde normala eta M, H-modulua. Orduan, M^H, $\frac{G}{H}$-modulua da eta inflazio deituriko aplikazio bat daukagu $\mathrm{Inf} : H^i(\frac{G}{H}, M^H) \to H^i(G, M)$.

(iii) Izan bedi G talde finitua eta P G-ren Sylowen p-azpitaldea, p zenbaki lehen baterako. Orduan, $G \to P$ aplikazioak, homomorfismo injektibo bat eratzen du kohomologia taldeen artean $H^i(P, \mathbb{F}_p) \to H^i(G, \mathbb{F}_p)$.

36. **NOTAZIOA.** Hemendik aurrera, kohomologia taldeak $\mathbb{F}_p$ moduluarekiko hartuko ditugu besterik esan ezean eta $H^k(G)$ idaztean $H^k(G, \mathbb{F}_p)$ adierazi nahiko dugu.

37. **OHARRA.** *Lehenago ikusi ditugu kohomologia taldeen artean definitu ahal diren hainbat homomorfismo. Oraingo honetan, trasgresio izeneko homomorfismo bat definituko dugu ondorengo leman beharrezkoa izango baita kohomologia talde batzuen segida zehatz bat eraikitzeko. Izan bitez G talde finitua eta N bere azpitalde normala. Trasgresio izeneko homomorfismoa,* $t : H^1(N, \mathbb{F}_p)^{\frac{G}{N}} \to H^2(\frac{G}{N}, \mathbb{F}_p)$, *ondoko eran definiturik dago: izan bedi* $f \in H^1(N, \mathbb{F}_p)^{\frac{G}{N}}$. *Hau da,* $f : \frac{N}{N^p[G,N]} \to \mathbb{F}p$ *homomorfismo bat da. Izan bedi M G-ren azpitaldea zeinak* $\frac{M}{N^p[G,N]} = \mathrm{Ker}\, f$ *betetzen duen. Modu honetan,*

$$1 \to \frac{N}{M} \to \frac{G}{M} \to \frac{G}{N} \to 1,$$

segida zehatza daukagu non $\frac{N}{M}$ *azpitaldea p ordenako* $\frac{G}{M}$*-ren azpitalde zentrala den. Beraz, segida zehatz hori* $H^2(\frac{G}{N}, \mathbb{F}_p)$*-ren elementua da.*

38. **LEMA** (Inflazio-murrizketa segida zehatza)**.** *Izan bitez G talde finitua, N G-ren azpitalde normala eta* $\mathbb{F}_p$*, G-modulu tribiala. Eraiki dezagun* $1 \to N \to G \to \frac{G}{N} \to 1$ *segida zehatza. Orduan, ondoko segida zehatza existitzen da kohomologia taldeetan* $\mathbb{F}_p$ *G-modulu tribialarekiko, inflazio-murrizketa segida zehatza deiturikoa:*

$$0 \longrightarrow H^1(\frac{G}{N}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(N)^{\frac{G}{N}} \xrightarrow{tr} H^2(\frac{G}{N}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^2(G)$$

Seigarren ataleko definizioen eta propietateen bidez, nahikoa informazio daukagu Tateren *p*-nilpotentziaren irizpidea frogatzeko.

8. TATEREN *p*-NILPOTENTZIA IRIZPIDEA

Atal honetan, Tateren *p*-nilpotentzia irizpidea frogatuko dugu. Ondoko teorema hau, Atiyahren galdera batetik dator. Izan ere, berak galdetu zuen nahikoa ote den jakitea Res : $H^*(G, \mathbb{F}_p) \to H^*(P, \mathbb{F}_p)$ isomorfismo bat dela *G* taldea *p*-nilpotentea dela ondorioztatzeko. Galdera horren erantzuna J. Thompsonek eman zuen. Berak zioen nahikoa zela Res homomorfismoa isomorfismoa zela jakitea. Are gehiago, berak eta Huppertek frogatu zuten nahikoa dela Res isomorfismo bat izatea kohomologiaren 1. mailan. Froga horiek, ordea, zailtasun maila altukoak dira eta hemen aztertuko dugun Tateren froga berriz errazagoa gertatzen da, homologia teoriari esker.

Lehenengo eta behin, lema tekniko bat frogatuko dugu Tateren irizpidea frogatzeko bide erraz bat utziko digulako.

39. **Lema.** *Izan bedi G talde finitua, P G-ren Sylowen p-azpitaldea p zenbaki lehen baterako eta N G-ren azpitalde normala. Demagun $|G : N|$ p-ren berretura bat dela eta $H^1(G) \to H^1(P)$ isomorfismo bat dela. Jar dezagun $M = N \cap P$. Orduan,*

$$\frac{N}{N^p[N, G]} \cong \frac{M}{M^p[M, P]}$$

Froga. Eraiki dezagun ondoko diagrama hau emandako datuak erabiliz:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & G \arrow[r] & \frac{G}{N} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[u] & P \arrow[r] \arrow[u] & \frac{P}{M} \arrow[r] \arrow[u] & 1
\end{tikzcd}$$

Ohar gaitezen $G = PN$ dugula, $|G : N|$ p-ren berretura izateagatik. Ondorioz, isomorfiaren 2. teorematik $\frac{G}{N} \cong \frac{P}{M}$ daukagu. Orain, diagrama horri, kohomologia funktorea ($\mathbb{F}_p$ moduluarekiko) aplikatuz gero, ondoko diagrama hau lortzen dugu:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\frac{G}{N}) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "f_1"] & H^1(G) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "g_1"] & H^1(N)^{\frac{G}{N}} \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[d, "h_1"] & H^2(\frac{G}{N}) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "f_2"] & H^2(G) \arrow[d, "g_2"] \\
0 \arrow[r] & H^1(\frac{P}{M}) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^1(P) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^1(M)^{\frac{P}{M}} \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & H^2(\frac{P}{M}) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^2(P)
\end{tikzcd}$$

Alde batetik, f_1 eta f_2 bijektiboak dira $\frac{P}{M} \cong \frac{G}{N}$ delako. Beste alde batetik, hipotesiaz, $g_1 : H^1(G) \to H^1(P)$ isomorfismo bat da eta $g_2 : H^2(G) \to H^2(P)$ injektiboa da ikusi ditugun kohomologiaren propietateetatik ondorioztatuta. Orain, 38. Lemaren arabera lerro bakoitzak segida zehatz bat izaten jarraitzen duenez, nahikoa da Bosten Lema (cf. [4]) aplikatzea, $h_1 : H^1(N)^{\frac{G}{N}} \to H^1(M)^{\frac{P}{M}}$ isomorfismo bat dela ondorioztatzeko. Beraz, 33. Lema aplikatuz, nahi genuena frogatu dugu; hau da;

$$\frac{N}{N^p[N, G]} \cong \frac{M}{M^p[M, P]}.$$

□

40. **Teorema** (J. Tate). *Izan bitez G talde finitua, p zenbaki lehena eta $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Orduan, G p-nilpotentea da baldin eta solik baldin $H^1(G) \to H^1(P)$ isomorfismo bat bada.*

Froga. $\Rightarrow$) Frogaren norabide hau ikusteko 6. ataleko emaitzak erabiliko ditugu (25, 26). G p-nilpotentea denez, $\lambda_2(P) = \lambda_2(G) \cap P$ da P G-ren Sylowen p-azpitalderako. Gainera, badakigu $\frac{P}{\lambda_2(P)} \cong \frac{G}{\lambda_2(G)}$ dela. Orain, bi talde horiek isomorfoak badira, beraien dualak ere isomorfoak izango dira. Hau da,

$$\lambda_2(P) = \lambda_2(G) \cap P \Leftrightarrow \mathrm{Hom}(\frac{P}{\lambda_2(P)}, \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{Hom}(\frac{G}{\lambda_2(G)}, \mathbb{F}_p)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Hom}(P, \mathbb{F}_p) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{F}_p) \Leftrightarrow H^1(P, \mathbb{F}_p) \cong H^1 G, \mathbb{F}_p).$$

$\Leftarrow$) G taldea p-nilpotentea dela ikusi nahi dugu eta gogoratu bedi, 27. Teoremaren arabera, nahikoa dela frogatzea $\lambda_i(P) = \lambda_i(G) \cap P$ dela i guztietarako. Aurreko ataletik, ordea, badakigu $H^1(P) \cong H^1(G)$ izateak $\lambda_2(P) = \lambda_2(G) \cap P$ izatea dakarrela. Emaitza hori oinarritzat hartuz, i-ren gaineko indukzioa erabiliko dugu ikusmiran dugun emaitza lortzeko.

Demagun $\lambda_i(P) = \lambda_i(G) \cap P$ betetzen dela. Ikusi nahi dugu $i + 1$-erako ere egia dela. Notazioa errazteko, har bedi $N = \lambda_i(G)$ eta $M = \lambda_i(G) \cap P$. Orduan, G, N eta M horiek, aurreko lemako baldintzak betetzen dituzte eta, beraz,

$$\frac{N}{N^p[N, G]} \cong \frac{M}{M^p[M, P]}.$$

Azkenik, ohar gaitezen alde batetik $\pi_{i+1} : \frac{P}{M^p[M, P]} \to \frac{G}{N^p[N, G]}$ epimorfismoa dugula. Beste alde batetik, $|\frac{N}{N^p[N, G]}| = |\frac{M}{M^p[M, P]}|$ eta $|\frac{G}{N}| = |\frac{P}{M}|$ direnez, $|\frac{G}{N^p[N, G]}| = |\frac{P}{M^p[M, P]}|$ da. Beraz, π_{i+1} isomorfismoa izan behar du. Orduan, 25. Lema erabiliz, $\lambda_{i+1}(G) \cap P = \lambda_{i+1}(P)$ dugu.

Horrek indukzio hipotesia frogatzen du eta, ondorioz, G p-nilpotentea da. $\square$

ERREFERENTZIAK

[1] BURNSIDE, W. *Theory of groups of finite order*. 2d ed. Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[2] EVENS, L. *The cohomology of groups*. Oxford Mathematical Monographs, Claredon Pres, New York, 1991.

[3] FROBENIUS G., *Über auflösbare Gruppen IV*, Sitz. Wiss. Akad. Berlin (1901), 1216-1230.

[4] MASSEY, W. S. (1991), *A basic course in algebraic topology*, Graduate texts in mathematics 127 (3rd ed.), Springer.
[5] QUILLEN, D. «A cohomological criterion for p-nilpotence», *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), no. 4, 361–372.
[6] ROBINSON, D. J. S. *A course in the theory of groups*. Springer-Verlag, New York, 1996.
[7] TATE, J. «Nilpotent quotient groups», *Topology* **3** (1964), no. suppl. 1, 109–111.
[8] THOMPSON, J. «Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order», *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,* **45**, 578-581 1959.
[9] ZASSENHAUS H., *The theory of groups*. 2nd ed. Chelsea Publishing Company, New York, 1958.