# Zenbat kolorerekin margotu daiteke Autonomia Erkidegoko eskualdeen mapa?

*Leire Legarreta Solaguren*, Luis Martínez Fernández*

Matematika Saila. Zientzia eta Teknologia Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

*leire.legarreta@ehu.es

«Quand la couleur est à sa richesse, la forme est à sa plénitude».

Paul CEZANNE

Jasoa: 2013-06-14 Onartua: 2013-06-30

**Laburpena:** Artikulu honek grafo-teoria jorratzen du, zehatz-mehatz grafoen koloreztamenduak, hau da, grafo baten erpinei koloreak emateko moduak, lotuta dauden erpinak kolore desberdinekin koloreztatuz. Gaur egun, grafo-teoria ikerketa arlo bizi-bizia da, eta grafoen koloreztamenduek arreta handia jaso zuten hogeigarren mendean, 1976an Lau Koloreen Teoremaren frogarekin gorenera iritsiz. Lan honetan, Lau Koloreen Teoremaren aipamen historikoa ematen da, eta baita ere frogaren ideia nagusien inguruko iradokizun batzuk. Helburu horretarako, beharrezkoak ditugun grafo-teoriako kontzeptuak definitzen eta urratzen ditugu. Azkenik, grafoen koloreztamenduak erabilgarriak diren zertarako batzuk ere aipatuko dira.

**Hitz gakoak:** grafoa, koloreztamendua, Lau Koloreen Teorema.

**Abstract:** This paper is concerned with graph theory, and more specifically with the colouring of graphs in such a way that connected vertices get different colours. Graph theory constitutes a very lively field of research nowadays, and the colouring of graphs is a topic which received much attention in the twentieth century, culminating in the proof of the Four Colour Theorem in 1976. In this paper, we give a historical reference to the Four Colour Theorem, and give some clues about the main ideas of its proof. To this end, we introduce from scratch all the concepts from graph theory that are needed. Finally, we also present some useful applications of the colouring of graphs.

**Keywords:** graph, colouring, Four Colour Theorem.

## 1. SARRERA

Demagun Euskadi komunitatearen eskualdeen mapa margotu nahi dugula, muga komuna banatzen duten edozein bi herrialde kolore desberdinekin margotzen diren baldintzapean. Galde genezake zein den helburu horretarako erabili behar den kolore kopuru minimoa. Matematikako grafo teoria izeneko arlotik etorriko da erantzuna, eta hain zuzen ere, bere barnean ikasten den grafoen koloreztatzeetatik.

Grafo teoria, funtsean, edozeinek uler dezakeen oinarrizko kontzeptu batean datza, erlazio bitar simetrikoan, hain zuzen ere. Hau da, $V$ objektu bilduma bat emanda, $V$ multzoko elementuen bikoteek osatzen duten $R$ multzo bat dugu, zeinarentzat objektu bat beste batekin harremanetan baitago $R$ bidez, bigarrena ere lehenengoarekin harremanetan baldin badago.

Lan honetan aztergai hartuko ditugun grafoetan objektu bat ere ezin daiteke bere buruarekin harremanetan egon. Grafo mota horiek modu alternatibo eta trinkoago batera defini daitezke, $V$ multzoko 2 kardinaleko azpimultzoen bilduma erabilita.

Aurreko ideia grafikoki adieraz daiteke elkarrekin harremanetan dauden bi objektu lerro zuzen batekin lotuz. Orokorrean, objektuei erpin deitzen zaie eta elkarrekin lotzen dituzten lerroei ertz. Ohartu gaitezen aukera horrek grafo terminoari izena ematen diola, eta era berean, grafoak oso intuitibo egiten dituela edonorentzat, hastapenetako kontzeptuetan ez duelako eskatzen definizio matematiko zailegirik.

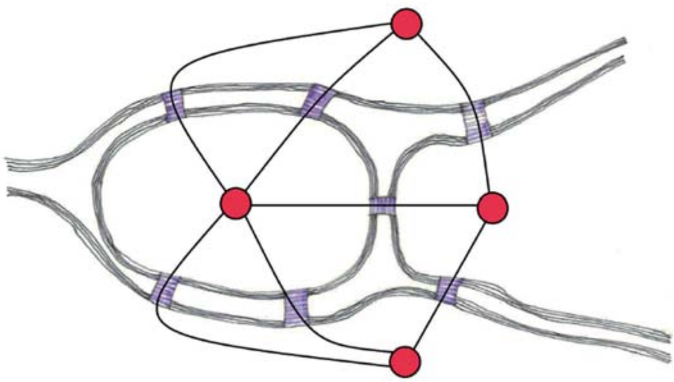
Baina horrek ez du esan nahi grafo teoria «erraza» denik. Urtero gai horri buruz ehundaka artikulu argitaratzen dira aldizkari espezializatuetan, haietako asko inpaktu faktore altukoak izanik. Artikulu horiek irakurrita ikus daiteke oso tresnaria konplexuak erabiltzen direla aljebran, analisi matematikoan, topologian, edota beste diziplina matematiko batzuetan.

Esandakoarekin ez dugu artikulu honen irakurle potentziala ikaratu nahi. Lan honetako frogek, erdi edo goi mailako zientzi formakuntza duen, edo goi mailako matematikako ikastaro bat edo bi egin dituen edozein ikaslerentzat ulergarriak izan beharko lukete. Ohartu gaitezen aipatutako matematikako ikastaroak zientzietako edozein lizentziaturatan edo gradutan ematen direla.

Has gaitezen problema bere testuinguru historikoan kokatzen. Onartu ohi da grafo teoria modernoa 1736. urtean hasten dela, Königsbergeko zubien problema aztertzen duen Eulerren lanarekin. Eulerren garaian, Königsberg hirian (gaur egungo Kaliningradon) Pregolya izeneko ibai bat zegoen. Ibai horrek bi irlatxo zituen, eta irlatxoak elkarrekin eta ibaiaren bi ertzekin lotzen zituzten zazpi zubi zeuden 1. irudian adierazten den bezala.

Garai hartan bertakoak ohiko denporapasa modura saiatzen ziren leku berean hasten eta bukatzen zen, eta zazpi zubietatik behin baino pasatzen ez zen zeharbide aurkitzen. Eulerrek hori ezinezkoa zela frogatu zuen argudio trebe bat erabiliz.

Lehenengo eta behin, problemaren zehaztapenak bakartu zituen, elementu bi horiek lotzen zituen zubi bat existitzen zenean irlatxo bakoitza eta ibaiaren ertz bakoitza puntu batekin ordezkatuz, eta bi elementuren artean kurba bat marraztuz. Lehenago esan dugu hori bera grafo baten definizioa dela. Hobeto esanda, orokorragoa den multigrafo kontzeptuaren definizioa da, zeren eta errepikatzen diren bi ertz baitaude irlatxo baten eta ibaiaren ertz bakoitzaren artean. Euler ohartu zen sistemako elementu batean, hau da, irlatxoren batean edo ibaiaren ertzen batean, zubi baten bidez sartzen garen bakoitzean ere, behartuta gaudela arinago erabili gabe dauden beste zubi desberdin batetik irtetera. 1. irudian adierazten dira ibaiaren ertzak, irlatxoak eta elkartutako multigrafoa.



**1. irudia.** Königsbergeko zubiak.

Laburbilduz, Euler konturatu zen aurkitu nahi zen motako zeharbide bat egongo balitz, lau elementuetako bakoitza zubi kopuru bikoiti batez inguratuta legokeela. Baina nabaria denez, hori ez da horrela, erraz ikus daitekeelako ibaiaren ertz bakoitza hiru zubiz, irlatxo bat bost zubiz eta beste irlatxoa hiru zubiz inguratuta daudela.

Gorago erabilitako arrazonamendua absurdora eramanez egindako arrazonamendua deitzen da matematikan. Baldin eta frogatu nahi den baieztapenaren kontrakoa suposatuz, emaitza kontraesankor bat lortzen bada, orduan hasierako baieztapenak egiazkoa izan behar du, hau da, gure kasuan frogatuta geratuko litzateke ez dagoela zeharbide itxirik leku berean hasi eta bukatu, eta zazpi zubi horietatik behin baino ez igarotzen ez denik.

Bere XVIII. mendeko hastapenetik, grafo teorian oinarritutako ikerkuntza asko aurreratu da, eta hainbat topiko interes handikoak bilakatu dira. Horietatik bat da ertz bakoitzetik soilik behin igarotzen diren zeharbide irekien eta itxien existentzia. Aipatutako zeharbide horiei ibilbide eta zirkuitu eulertarrak esaten zaie Eulerren ohorez, bera izan baitzen modu sistematiko zehatz batean horiek aztertu zituen lehena.

Beste adidibe bat da erpin bakoitzetik soilik behin igarotzen diren zeharbide irekien eta itxien existentzia (itxiak diren kasuetan, hasierako erpinarena da onartzen den erpinen errepikapen bakarra, zeina bukaerakoarekin bat datorren); erpin horiei bide edota ziklo hamiltondarrak esaten zaie, William Rowan Hamilton, problema mota horiek aztertu zituen lehen matematikariaren ohorez.

Aurkezten dugun hirugarren adibidean, parekatzeak aurkitu behar dira grafoetan, hau da, hasieran finkatutako grafo batetik kardinal handieneko ertzen multzoak; multzo horretako edozein bi ertzi, grafoan erpin komun gabekoak izatea eskatzen zaie. Grafo teorian aztertzen diren gaien barietate guztietatik, azken adibide gisa, automorfismo taldeen existentzia aipatuko dugu. Talde horiek adierazten dute grafo batzuetan simetria badagoela. Era berean, talde horien existentziatik ondoriozta daitezkeen propietateak aztertzea izango litzateke proposatzen dugun azken adibidearen parte bat.

Interes handiko topikoen artean dago halaber lan honetan aurkezten dugun grafoen koloreztatzea. Grafoen koloreztatzea, mugaketa batzuk errespetatuz, grafo bateko erpinei koloreak ematean datza; hain zuzen ere, ezin zaie ertz batekin lotuta dauden bi erpini kolore bera egokitu. Horrela, adibidez ezin daitezke bi erpin «berde» lotuta egon, eta modu berean gertatzen da, erabiltzen diren beste koloreekin.

Ondoren, lan honen gainerako antolamendua azalduko dugu, irakurleak lanaren egitura orokorraren ideia argi izan dezan. Bigarren atala hiru zatitan bananduta dago. Lehenengo zatian, geroago erabiliko diren grafoen kontzeptu eta emaitza orokor batzuk aurkeztuko dira, eta bere bigarren zatian grafoen koloreztatzearen kontzeptuaren definizio formala eta zehatza emango da, eta era berean koloreztatzeen oinarrizko propietate batzuk aletuko dira. Bereziki, grafo baten zenbaki kromatikoaren kontzeptua definituko da, grafo bat koloreztatzeko behar den kolore kopuru minimo gisa, eta azkenik, bigarren atal honen hirugarren zatian zenbaki kromatikoaren goi eta behe borne batzuk aipatuko eta probatuko dira.

Bestalde, lanaren hirugarren atalean, bi zatitan banatuta dagoelarik, mapen koloreztatzeak aztertuko dira. Beharbada, irakurleak jadanik ezaguna du «Lau koloreen teoremak» zer esaten duen. Teorema horrek ziurtatzen du muga zati komuna banatzen duten edozein bi herrialde kolore desberdinekin koloreztatzeko baldintzapean, nahikoa dela lau kolore erabiltzea edozein mapa koloreztatzeko. Atal horretako lehenengo zatian, teorema ahulago bat frogatzen da, hain zuzen ere, «Bost koloreen teorema», zeinak esaten duen aurreko baldintzapean edozein mapa koloreztatzeko nahikoa dela bost kolore desberdin erabiltzea. Atal beraren bigarren zatian, Lau koloreen teorema nola frogatu zen adieraziko da aipamen historiko txiki bat emanez; frogaren ideiaren iradokizun batzuk eskainiko dira.

Azkenik, lanaren laugarrena eta azkena den atala, hiru zatitan banatuta dago, eta bertan grafoen koloreztatzeen zertarako batzuk aurkeztuko dira. Lehenengo zatian, batzordeak eraginkor antolatzeko zertarako bat emango da. Bigarren zatian, zirkuitu estanpatuen probetan oinarritzen den zertarako bat aurkezten da. Atal horretako hirugarren zatian, sakondu gabe baina egokiak diren erreferentzia bibliografikoak emanik, beste zertarako batzuk aipatuko dira.

Lan hau ulertzeko ez da aurrebetekizun berezirik behar, hasieran esandako moduan, goi mailako matematika orokorreko ikastaroren bat eginda izateaz aparte. Hala ere, gustatuko litzaiguke grafo teorian irakurlearen jakin-mina piztea. Horrela balitz, [9] liburua gomendatuko genioke irakurleari, grafo teorian oinarrizkoa baino zabalagoa den ikuskera izan dezan, eta ordea ezagutza aurreratuagoa izan nahi duenarentzat [4] liburua gomendatuko genioke. Bukatzeko esan behar, grafoen koloreztatzeez aritzen diren liburuetatik, [1], [7] eta [10] iruditzen zaizkigula aipagarriak.

## 2. GRAFOAK ETA KOLOREZTATZEAK GRAFOETAN

### 2.1. Grafoak

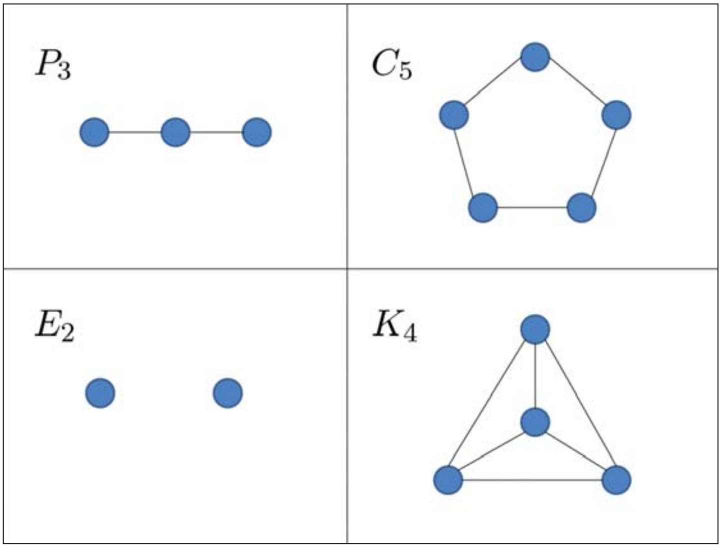
Has gaitezen grafoei buruzko definizio eta teorema orokor batzuk aurkezten. Jakitun gaude aurkezten ditugun terminoetara ohituta ez dagoen irakurlea nonbait nekatuta gera daitekeela hasierako definizioen ugaritasunagatik. Hori dela eta, irakurleari pazientzia pixka bat ere eskatzen diogu, zalantzarik gabe, beranduago emaitza interesgarriagoak ikusten hasten garenean sari bat lortuko du eta.

Grafo bat $\mathcal{G} = (V, A)$, bikote bat da, hutsa ez den $V$ multzo finitu batez, eta $V$-ren 2 kardinaleko azpimultzo batzuk osatzen duten $A$ multzoaz osatua. $V$-ren elementuak erpinak deitzen dira eta $A$-renak ertzak. $\{u, v\}$ motako ertz bat, besterik gabe $uv$ bidez denotatuko da. Baldin eta $uv \in A$ bada, esaten da $u$ eta $v$ erpinek $uv$ ertzean eragiten dutela, eta erpin bi horiek alboko erpinak direla. Bestalde, $u$ eta $v$ erpinak $uv$ ertzaren muturrak direla esaten da. Horrez gain, $V$ multzoaren kardinala grafoaren ordena eta $A$ multzoaren kardinala grafoaren tamaina direla esaten da.

Pseudografoa dugu grafoaren kontzeptua baino orokorragoa den kontzeptu bat, zeinarentzat $A$ multzo bat izatea baino zerrenda bat izatea onartzen den. Hau da, pseudografo batean ertz anizkoitz deritzen $A$-n elementu batzuk errepikatuta egotea onartzen da, eta $A$-n 1 kardinaleko azpimultzoak ere, begizta izenekoak azken hauek. Ohartu gaitezen begiztak mutur berdinak dituzten ertzak direla, hau da, bere gainean ixten diren ertzak direla.

Maizen erabiltzen diren grafoen artean ondokoak dira aipagarrienak: $P_n$ bide-grafoak $v_1, ..., v_n$ , $n$ erpin eta $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n$ ertzak ditu. $n$ ordenako

$C_n$ grafo ziklikoa $v_1, ..., v_n$ , $n$ erpinez eta $v_1v_2, v_2v_3, ...., v_{n-1}v_n, v_nv_1$ ertzez osatuta dago. Bestalde, $v_1, ..., v_n$, $n$ erpin dituen eta aldi berean ertzik ez duen grafoari, $n$ ordenako grafo hutsa esaten zaio eta $E_n$ bidez denotatzen da. Orain, baldin eta grafoak $v_1, ..., v_n$, $n$ erpin baditu eta ertzen multzo gisa $\{v_1, ..., v_n\}$ multzoko 2 kardinaleko azpimultzo guztiek osatutako multzoa badu, orduan grafoa $K_n$ bidez denotatzen da, eta $n$ ordenako grafo osoa deitzen da.




**2. irudia.** Mota bereziko grafoak.

Grafo batean $v$ erpin baten maila esaten zaio $v$ erpinaren alboko erpinen kopuruari, eta grad($v$) bidez denotatzen da. Beraz, zentzua dauka grafo bateko erpin guztien maila maximoaz hitz egiteak, eta horri $\mathcal{G}$ grafoaren maila maximoa esaten zaio, eta $\Delta(\mathcal{G})$ bidez denotatzen da. Era berean, $\mathcal{G}$ grafoko maila minimoa, hau da $\delta(\mathcal{G})$ bidez denotatzen dena, grafoko erpin guztien maila minimoa da. $\mathcal{G}$ grafoa $d$ mailako grafo erregularra dela esaten da, baldin eta grafoko erpin guztiak maila berekoak eta $d$-ren berdinak badira.

Definizioz $\mathcal{G} = (V, A)$ grafoaren azpigrafo bat, $\mathcal{G}' = (V', A')$ motako beste edozein grafo da; bertan, $V' \subseteq V$ eta $A' \subseteq A$ dira. Hau da, $\mathcal{G}$ grafoan erpin batzuk eta mutur biak erpin horietan dituzten ertz batzuk aukeratuz lortzen da azpigrafo bat.

Emandako grafo batetik azpigrafoak lortzeko berezko bi modu daude. Horietariko batean ertzak ezabatzen dira, ertz horien muturrak ezabatu gabe. Baldin eta $\mathcal{G} = (V, A)$ grafoa eta $A' \subseteq A$ ertzen multzo bat badira, $\mathcal{G} - A'$ bidez denotatuko da $(V, A - A')$ grafoa, hau da, erpin berdinak mantentzen dira eta

$A'$-n dauden ertzak ezabatzen dira. Bereziki, garrantzitsua da $A' = \{a\}$ ertz bakar batek sortzen duen kasu partikularra, zeren eta kasu orokorra behin eta berriz ertz bat ezabatuz lortzen baita. Bestalde, erpinen multzo bat ezabatuz eta muturren bat erpin horietan dituzten ertz guztiak ezabatuz ere lortzen dira azpigrafoak. Baldin eta $\mathcal{G} = (V, A)$ grafoa eta $V' \subseteq V$ erpinen multzo bat badira, $\mathcal{G} - V'$ bidez denotatuko da $(V - V', A')$ grafoa; bertan, $A'$, $V - V'$ multzoan mutur biak dituzten $A$-ren ertzen azpimultzoa da. Berriro ere eta lehengo arrazoi berarengatik, bereziki interesgarria da $V' = \{v\}$ erpin bakar batek sortzen duen kasu partikularra.

Grafo teorian funtsezkoa da ulertzea nola bidaiatu genezakeen erpin batetik beste batera ertzak zeharkatuz. Horrek ondoko definizioak iradokitzen ditu. Baldin eta $u$ eta $v$ grafo bateko bi erpin badira, $u - v$ paseoa esaten zaio ondoko erpinen eta ertzen segidari:

$$u = w_0,\ w_0w_1,\ w_1,\ w_1w_2,\ ...,\ w_{n-1}w_n,\ w_n = v.$$

Normalean, paseoko erpinak baino ez dira adierazten, igartzen baita ondoz ondoko erpinak alboko erpinak direla, eta horrela sinpleagoa den $u = w_0, w_1, ..., w_n = v$ notazioa erabiltzen da. Kasu horretan $u - v$ paseoa $n$ luzerakoa dela esaten da. Horrez gain, $u = v$ bada $u - v$ paseoa itxia dela esaten da eta kontrako kasuan irekia. Ibilbideak dira paseo mota berezi bat, eta bertan paseoko ertz guztiak desberdinak izatea eskatzen da (nahiz eta erpinen errepikapenak egotea posible izan). Partikularki, ibilbidea itxia bada, hau da, hasierako erpina eta bukaerakoa bat datozenean, zirkuitua dela esaten da. Azkenik, bidea deitzen zaio erpin guztiak desberdinak dituen $u - v$ paseo bati. Zehatzak izan nahi badugu, ezin izango genituzke definitu bide itxiak, hasierako erpina eta bukaerakoa bat datozelako. Hala eta guztiz ere, salbuespen hori eginez, bide itxiari zikloa esaten zaio, bertan erpinen errepikapen bakarra hasierako eta bukaerako erpina delarik.

Paseoak grafoen konexutasun kontzeptuarekin lotuta daude, ondoren ikusiko dugun bezala. Izan bedi $\mathcal{G} = (V, A)$ grafo bat, orduan $V$ erpinen multzoaren gainean ondoko erlazioa defini dezakegu: baldin eta hartzen badira edozein $u$, $v$, $V$-ko bi elementu, $uRv$ dugu baldin eta existitzen bada $u - v$ paseo bat $\mathcal{G}$ grafoan. Erlazio hori bideen modura ere aurkez daiteke, zeren eta bi erpin paseo batekin lotu daitezke baldin eta soilik baldin bide batekin lotu badaitezke.

Nabaria da $\mathcal{R}$ erlazioa baliokidetasun erlazioa dela. Kasu horretan, baliokidetasun klaseei grafoaren osagai konexuak esaten zaie. Partikularki, baldin eta baliokidetasun klasea bakarra bada, grafoa konexua dela esaten da, eta kasu horretan hartuta edozein bi erpin, gutxienez horiek lotzen dituen bide bat existitzen da.

Beste hainbat egitura matematikorekin gertatzen den bezala, bi grafoen erpinen arteko aplikazio bat izanda, galde genezake noiz aplikazio horrek gordetzen duen grafoen egitura bi norabideetan, hau da, funtsean noiz diren berdinak bi grafo. Erantzuna gordetzen duela izango da grafo biek erpin eta ertz berdinak dituztenean. Bestalde, izanda $(V, A)$ eta $(V', A')$ edozein bi grafo, $(V, A)$ grafotik $(V', A')$ grafora definituta dagoen isomorfismo bat, $f : V \to V'$ aplikazio bijektibo bat da ondoko baldintza betetzen duelarik: $uv \in A$ baldin eta soilik baldin $f(u)f(v) \in A'$, hau da, lehenengo grafoko bi erpinek ertz bat zehazten dute lehenengo grafoan baldin eta soilik baldin erpin bi horien $f$-ren irudiek bigarren grafoan ere ertz bat zehazten badute. Kasu horretan, bi grafoen artean isomorfismo bat existitzen bada, grafo bi horiek isomorfoak direla esaten da, edo bat bestearen isomorfoa dela.

Ohartu gaitezen grafo batean ziklo bat hartzen badugu eta azpigrafotzat hartzen badugu, grafo zikliko baten isomorfoa dela, eta era berean bide bat, azpigrafotzat hartuta, bide-grafo baten isomorfoa dela. Bestalde, definizioz grafo bateko *clique* bat grafo oso baten isomorfoa den azpigrafo bat da.

Atal honi bukaera emateko, grafo mota garrantzitsu bat jorratuko dugu: zuhaitzak. Definizioz zuhaitz bat ziklo gabeko grafo konexu bat da. Ondoren, frogatuko dugu zuhaitz batean ertzen kopurua erpinen kopurua baino unitate bat gutxiagokoa dela.

**Teorema 2.1.** *Baldin eta* $(V, A)$ *grafoa* $n$ *ordenako zuhaitza bada, orduan bere tamaina* $n - 1$ *da.*

*Froga*. Emaitza $n$ gaineko indukzioaren bidez frogatuko da. Baldin eta $n = 1$ bada, emaitza nabaria da, grafoa $K_1$ -en isomorfoa delako eta horrek ez duelako ertzik. Izan bedi orain $n \geq 2$, eta demagun indukzio hipotesiagatik teoremaren emaitza egia dela $n$ baino ordena hertsiki txikiago duten zuhaitzentzako. Hasierako zuhaitzak, partikularki grafo konexua denez, gutxienez $uv$ ertz bat onartzen du. Baldin eta ezabatzen badugu aipatutako $uv$ ertza ($u$ eta $v$ erpinak ezabatu gabe), $\mathcal{G} - \{uv\}$ grafoa lortzen dugu, eta grafo berri horrek bi osagai konexu ditu, $n_1 < n$ eta $n_2 < n$ ordenakoak. Nabaria da $n_1 + n_2 = n$ dela. Osagai konexu horietariko bat $u$-rekin $\mathcal{G} - \{uv\}$ grafoan bideren batekin lotu daitezkeen erpinek osatutakoa da, eta bestea $v$-rekin lotu daitezkeenekin lortutakoa. Bestalde, argi dago era berean lortutako osagai konexu biak ziklo gabeko grafo konexuak direla, hau da, zuhaitzak direla hain zuzen ere. Orain, lortutako $n_1$ eta $n_2$ ordenako zuhaitzei hipotesi induktiboa ezarriz, haien tamainak $n_1 - 1$ eta $n_2 - 1$ direla ikusten dugu. Bestalde, ohartu gaitezen hasierako grafoaren tamaina lortutako osagai konexu bi horien tamainen batura gehi 1 eginez lortzen dela. Beraz, hasierako grafoaren tamaina $n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$ da, nahi genuen bezala.

Grafo guztiak ezin dira marraztu planoan ertzek elkarrekin moztu gabe erpinez kanpo, eta horregatik aipamen berezia merezi dute grafo horiek, non esandako hori posible den. Hain zuzen ere, mapen koloreztatzea sartzen dugunean, agertuko zaizkigun grafoak ertzen arteko gurutzaketarik gabe marraz daitezke. Grafo bat planarra dela esaten da $\mathbb{R}^2$ planoan adieraz badaiteke, grafoaren edozein bi ertz gehienez beraien muturretan baino ez dutelarik elkar mozten. Horrelako adierazpen bati grafoaren adierazpen planarra esaten zaio. Grafo baten ertzen bilduraren planoko osagarriaren osagai konexuei, hasierako grafoaren adierazpen planarraren aurpegiak esaten zaie. Deskribatu berri ditugun osagai konexu horiek, zentzu topologikoan definituak dira, eta ez dira nahasi behar grafoko osagai konexuekin. Aurpegi horietako bat ez dago bornatuta eta horri infinituko aurpegia deitzen zaio.

Ondorengo teorema funtsezkoa da grafo planarren ikerketarako, eta bertan grafo konexu baten adierazpen planarrean, erpinen, ertzen eta aurpegien kopurua elkarrekiko harremanetan daude.

**Teorema 2.2** (Eulerren teorema)**.** *Baldin eta n ordenako eta m tamainako grafo konexu baten adierazpen planar batek c aurpegi baditu, orduan*

$$n - m + c = 2.$$

*Froga*. Aurpegien kopuruaren gaineko indukzioaren bidez egingo dugu. Baldin eta $c = 1$ bada, orduan grafoa konexua eta ziklo gabekoa da. Kontrako kasuan, zikloren bat existituko balitz, gutxienez aurpegi bat zikloaren barruan eta beste bat ziklotik kanpo egongo lirateke eta $c > 1$ izango litzateke. Beraz, aipatutako grafoa zuhaitza da. Kasu horretan, aurreko Teorema 2.1 aplikatuta, $m = n - 1$ da, eta ondorioz $n - m + c = n - n + 1 + 1 = 2$ dugu. Izan bedi orain $c \geq 2$, eta demagun indukzio hipotesiagatik teoremaren emaitza betetzen dela $c - 1$ aurpegidun adierazpenetarako. Grafoko zikloetako batean ertz bat ezabatzen dugu, ertzaren muturrak ezabatu gabe. Ohartu bedi aurreko prozesua posible dela, eta prozesu horrekin erpinen kopurua ez dela aldatzen baina bai aurpegien eta ertzen kopuruak unitate bat txikitzen direla, eta ohartu bedi halaber prozesu horrekin konexua eta adierazpena planarra izatearen propietateak mantetzen direla. Partikularki, konexua izaten jarraitzen du, zeren eta zikloan ezabatu den ertzaren mutur batetik bestera bidaiatu daiteke ezabatutako ertza erabili gabe. Azkenik, lortutako grafo berriari indukzio hipotesia aplikatuz, $n - (m - 1) + (c - 1) = 2$ dela ondorioztatzen da, eta hemendik $n - m + c = 2$ dugu.

## 2.2. **Koloreztatzeak**

Hauxe dugu lanaren gai nagusia. Grafo baten koloreztatze propioa esaten zaio grafoaren erpinen multzotik beste $X$ multzo batera definituta dagoen aplikazio bati, ondoko baldintza betetzen badu: grafoan albokoak diren edozein bi erpinek irudi desberdina izatea.

Hemendik aurrera, propio adjektiboa ez dugu erabiliko, eta laburtuz koloreztatzeez baino ez dugu hitz egingo, jadanik aipatutako baldintza inplizituki betetzen dela suposatuz. Baldin eta $X$ multzoaren kardinala $n$ bada, $n$-koloreztatzeez hitz egingo da. Batzuetan, $X$ kolore multzo finitutzat hartzen da. Ordea, aurrekoa ez da matematikoki oso zehatza, jadanik koloreak ez daudelako inekibokoki definituta, baina laguntzen du koloreztatzeak «ikusiarazten», eta hain zuzen, hemendik dator terminoa. Komenigarria izaten da $X$ multzo gisa, besterik gabe, $\{1, ..., n\}$ zenbaki arruntek osatzen duten multzoa hartzea. Elementu horiei lengoaiaz abusatuz «koloreak» esaten zaie.

Matematika arloan gorago definitutako kontzeptua erpinen koloreztatzea izenaz ezagutzen da. Badago ertzei buruzko antzeko definizio bat, non ertz bakoitzari kolore bat egokitzen zaion, eta mutur komun bat banatzen duten ertzei kolore desberdinak egokitzea eskatzen zaien. Guk ez dugu lan honetan bigarren motako koloreztatzerik aztertuko, eta beraz koloreztatzeez hitz egiten dugunean, besterik gabe, erpinen koloreztatzeez arituko gara. Gainera, zehatzak izan nahi badugu, $\mathcal{G}$ grafo baten ertzen koloreztatzeak, $L(\mathcal{G})$ lerro grafoaren erpinen koloreztatzeak baino ez dira. Bertan $\mathcal{G}$ grafoko erpinen eta ertzen paperak aldatzen dira. Beraz, ertzen koloreztatzeak erpinen koloreztatzeen kasu partikularra dira.

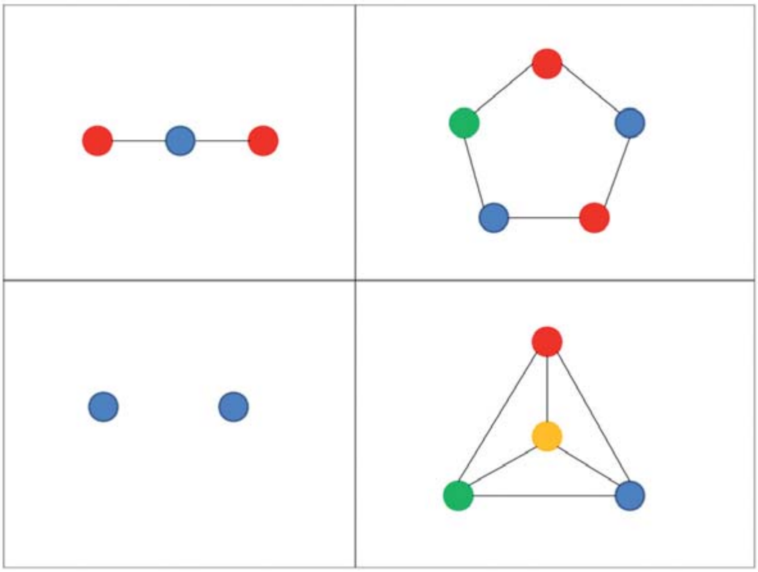
Definizioz grafo bat $n$-koloreztagarria dela esaten da, grafoak $n$-koloreztatze bat onartzen badu. Ez da batere zaila $n$-koloreztatzeak lortzea. Nahikoa da, adibidez, erpin bakoitzari kolore desberdin bat egokitzea. Ordea, zailtasuna dator grafo bat koloreztatu nahi denean kolore gutxi erabilita. Horren harira, gure lanaren garrantzia handia duen ondoko definizioa emango dugu: $\mathcal{G}$ grafo baten zenbaki kromatikoa, $\mathcal{G}$ grafoa koloreztatzeko behar den kolore kopuru minimoa da, $\chi(\mathrm{G})$ bidez denotatzen dena.

Nabari da $n$ ordenako $\mathcal{G}$ grafo batean $\chi(\mathcal{G})$ zenbaki kromatikoak ondoko desberdintzak betetzen dituela:

$$1 \leq \chi(\mathrm{G}) \leq n.$$

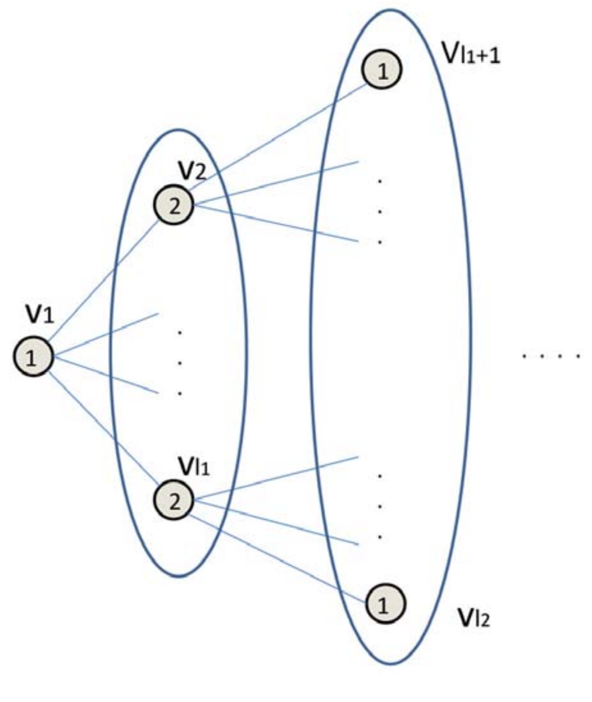
Aurreko desberdintza biak, kasu batzuetan, berdintza bihur daitezke. Adibidez, nabari da $E_n$ grafo hutsaren zenbaki kromatikoa 1 dela, grafoaren erpin guztiei kolore bera eman diezaiekegulako; bestalde, $K_n$ grafo osoaren zenbaki kromatikoa $n$ da, zeren eta grafoko edozein bi erpin desberdinei, alboko erpinak direnez, kolore desberdinak egokitu behar zaizkie halabeharrez.

Erraz froga daiteke era berean, $P_n$ bide-grafoaren zenbaki kromatikoa bat dela, $n = 1$ denean eta bi $n > 1$ den kasuan. Baldin eta $n = 1$ bada, emaitza berehalakoa da. Izan bedi orain $n > 1$. Orduan, argi dago $P_n$ ezin daitekeela koloreztatu kolore bakar batekin, gutxienez ertz bat duelako (hain zuzen ere $n$ ertz), eta ertz horren mutur biei kolore desberdinak egokitu behar zaizkielako. Ordea, kolorezta daiteke bi kolore erabilita: horretarako nahikoa da txandaka 1 eta 2 koloreak erpinei egokitzen joatea. Horrela, baldin eta $i$ azpindizea bakoitia bada, $v_i$ erpinari 1 kolorea egokitzen zaio, eta 2 kolorea $v_i$ erpinari, $i$ azpindizea bikoitia bada. Bestalde, $C_n$ grafo zikliko baten zenbaki kromatikoa ere erraz kalkula daiteke: baldin eta $n$ bikoitia bada 2 da eta baldin eta $n$ bakoitia bada 3. Has gaitezen $n$ bikoitia den kasua aztertzen. Kasu horretan, jadanik $P_n$ bide-grafoarekin egindako antzeko argudioa erabiltzen da. Gutxienez grafoak ertz bat duenez, ezin daiteke grafoa kolore bakar batez koloreztatu, baina bai ordea bi kolorez: 1 kolorea egokituko zaie $v_i$ erpinei, $i$ azpindizea bakoitia denean eta 2 kolorea kontrako kasuan. Azkenik, $n \geq 3$ bakoitia denean, berriro ere $C_n$ grafoa ezin kolorezta daiteke kolore bakar batez, gutxienez ertz bat duelako, eta ez bi kolorez ere. Kontrako kasuan kolore bi horiek erpinen azpindizeekiko txandakatzen joan beharko lukete eta prozesu horrekin $v_1$ eta $v_n$ erpinek kolore bera hartu beharko lukete. Hori ezinezkoa da $v_1v_n$ ertz bat delako $C_n$ grafoan. Bestalde, hiru kolorez koloreztatzeko prozesua ondokoa litzateke: baldin eta $i$ azpindizea bakoitia eta $n$-ren desberdina bada, $v_i$ erpinari 1 kolorea egokitzen zaio; baldin eta $i$ azpindizea bikoitia bada, $v_i$ erpinari 2 kolorea egokitzen zaio; azkenik, $v_n$ erpinari 3 kolorea egokitzen zaio. 3. irudian adierazten dira arinago aipatutako grafo familia berezi batzuen koloreztatzeak.



**3. irudia.** Grafo berezi batzuen koloreztatzeak.

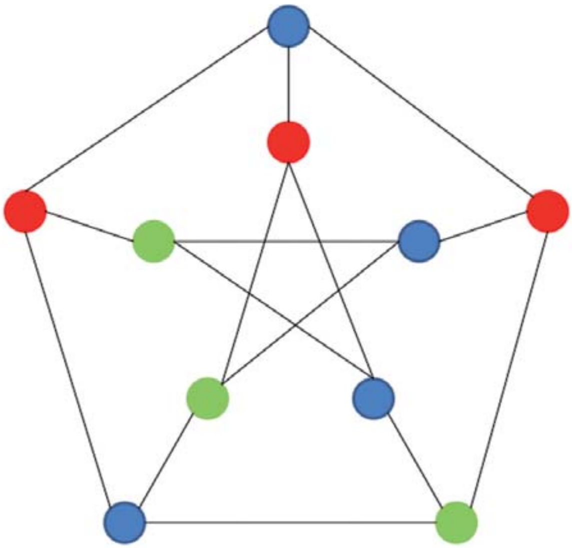
Erraza da halaber jakitea zein den edozein zuhaitzen zenbaki kromatikoa. Hain zuzen ere, erpin bakar bat duen zuhaitzaren salbuespena ezik (1 zenbaki kromatikoa duena), beste edozein kasutan 2 da. Frogatu dezagun aipatutako emaitza ondoko argudioari jarraituz. Har dezagun arbitrarioki grafoaren $v_1$ erpin bat, zuhaitzaren erroa esaten dena, eta horri 1 kolorea egokitzen diogu. Denota ditzagun $v_2, ..., v_{l_1}$ bidez $v_1$-en alboko erpinak diren erpin guztiak, eta erpin horiei 2 kolorea egokitzen diegu. Ohartu posible dela aurrekoa egitea, $\{v_2, ..., v_{l_1}\}$ multzoko edozein bi erpin ez direlako inoiz alboko erpinak. Izan ere, kontrako kasuan horiek $v_1$ erpinarekin lotuta 3 ordenako ziklo bat osatuko lukete, eta hori ezinezkoa da zuhaitz batean. Erraz ikus daiteke prozesu hori jarrai daitekeela eta bi koloretako koloreztatze bat ematen duela. Ondoren, hurrengoko pausoa baino ez dugu aurkeztuko, prozesuaren bukaera irakurlearentzat utziz. Orain, har dezagun $v_1$-en desberdinak diren eta aldi berean $\{v_2, ..., v_{l_1}\}$ multzoko erpineren baten albokoak diren $v_{l_1+1}, ..., v_{l_2}$ erpin guztien multzoa. Erpin horiei 1 kolorea egokitzen diegu eta horrela, ondoz ondoko hurrengo pausoetan ere. Modu honetan, grafoko erpin guztiei kolore bat ematea lortuko dugu, zuhaitza grafo konexua baita. Azaldutako prozedura 4. irudian adierazten da.




**4. irudia.** Zuhaitz baten koloreztatzea.

Bestalde, bide-grafoak zuhaitzak dira, eta zuhaitzen zenbaki kromatikoaren balioa 1 edo 2 izatearen ondorio gisa lor dezakegu ere, bide-grafoaren zenbaki kromatikoaren balioa.

Petersenen grafoa dugu oso ezaguna den grafo bat. 5. irudian erakusten da hiru kolore erabilita grafo horren koloreztatze bat. Irakurlea, erraz kontura daiteke grafo hori ezin daitekeela koloreztatu kolore batez edo biz.



**5. irudia.** Petersenen grafoa.

Nahiz eta aurreko kasuetan erraz kalkulatu ditugun grafo familia batzuen zenbaki kromatikoak, grafo ziklikoen edo zuhaitzen kasuetan bezala, orokorki oso zaila da grafo arbitrario baten zenbaki kromatikoa kalkulatzea. Grafoko erpinen eta ertzen kopurua handitzen den heinean, grafoaren egiturari buruzko informazio nahikoa ez baldin badugu (eta batzuetan informazio nahiko izanda ere!), orduan praktikan lan ia ezinezkoa da jakitea zein den grafo horren zenbaki kromatikoa.

Ordea, errazagoa ohi da grafo baten zenbaki kromatikoaren goi eta behe borneak ematea. Jadanik, horrelako borne pare bat aipatu ditugu, zenbaki kromatikoa 1 eta erpinen kopuruen artean dagoela esan dugunean. Noski, borne horiek ez dira, ez interesgarrienak ez erabilgarrienak ere. Hurrengo azpiatalean aztertuko ditugu interesgarriagoak diren beste borne batzuk.

### 2.3. **Zenbaki kromatikorako borneak**

Aztertuko dugun lehen borneak, elkarrekiko harremanetan jartzen ditu zenbaki kromatikoa, independentzia-zenbakia eta grafoaren ordena. Definizioz, esaten da grafo bateko erpinen multzoaren azpimultzo bat, erpinen multzo independentea dela, baldin eta ez bada existitzen ertz bat ere multzo horretako bi erpin lotzen dituena. $\mathcal{G}$ grafo baten $\alpha(\mathcal{G})$ independentzia-zenbakia esaten zaio, $\mathcal{G}$ grafoko erpinez osatutako multzo independente guztien tamaina handienari. Hau da, grafoan aukera daitekeen erpin kopuru handienari, erpin horiek elkarrekin albokoak izan behar ez duten baldintzapean gaude. (Ohartu horrek ez duela esan nahi ezin aurki daitekeenik multzo independenterik, bere erpinak kanpoko beste erpin batzuen albokoak direnik.)

**Teorema 2.3.** *Baldin eta $\mathcal{G}$ grafoa $n$ ordenakoa bada, orduan $n/\alpha(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G}) \leq n - \alpha(\mathcal{G}) + 1$.*

*Froga*. Har dezagun $\chi(\mathcal{G})$ kolore erabiltzen dituen grafoaren koloreztatze bat. Orduan $i$ kolore bakoitzerako, $i$ kolorez koloreztatuta dauden grafoaren $V_i$ erpinen multzoa independentea da, zeren eta $V_i$ barnean alboko erpin bi egongo balira, kolore berdina hartzea aukeratutako koloreztatzearen kontra joango litzateke. Ondorioz, $V_i$ multzoaren kardinala gehienez, $\alpha(\mathcal{G})$ da. Bestalde, grafoko erpin bakoitzari koloreren bat ematen zaionez, $n \leq \alpha(\mathcal{G})\chi(\mathcal{G})$ dugu, eta hemendik lehenengo desberdintza lortzen da. Orain, $\alpha(\mathcal{G})$ tamainako grafoaren erpinen $S$ multzo independente bat hartzen dugu, eta $S$ multzoko erpin guztiei kolore bera ematen diegu. Ohartu gaitezen hori egitea posible dela, zeren eta definizioz $S$-n ezin daizteke bi alboko erpin egon. Gainera, $S$-tik kanpo dauden grafoko beste erpin guztiak $n - \alpha(\mathcal{G})$ kolorez kolorezta daitezke, eta hemendik bigarren desberdintza lortzen dugu.

Kasu batzuetan aurreko desberdintzak berdintzak izan daitezke. Adibidez, $E_n$ grafo hutsaren kasuan $\chi(E_n) = 1$ eta $\alpha(\mathcal{G}) = n$ da, eta $K_n$ grafo osoaren kasuan $\chi(K_n) = n$ eta $\alpha(\mathcal{G}) = 1$ dira.

Ondoko teoreman adieraziko den bezala, grafo bateko zenbaki kromatikorako borne bat erpinen mailaren arabera eman daiteke.

**Teorema 2.4.** *Baldin eta $\mathcal{G}$ grafoa bada, orduan $\chi(\mathcal{G}) \leq \Delta(\mathcal{G}) + 1$.*

*Froga*. Izan bitez $v_1, ..., v_n$ , $\mathcal{G}$ grafoaren erpin guztiak. Eman dezagun grafoa $1, ..., \Delta(\mathcal{G}) + 1$ kolorez koloreztatzen duen prozedura bat. Horretarako, $i$ balio bakoitzerako $v_i$ erpinari egokitzen zaion kolorea zehaztuko dugu. Lehenengo urratsean, $v_1$ erpinari 1 kolorea ematen diogu. Bigarren urratsean, $v_2$ erpinari 2 kolorea ematen diogu, $v_1$ eta $v_2$ alboko erpinak direnean, eta bestalde 1 kolorea. Orokorrean, $i$.urratsean $v_i$ erpinari, aurreko urratsetan $v_i$-ren alboko erpinak diren $v_j$ ($j < i$ izanik) erpinak koloreztatzerakoan erabili ez den lehen kolorea ematen diogu. Ohartu gaitezen $v_i$ erpin bakoitzari kolorea egokitzeko moduagatik, bere alboko erpinak diren erpinek kolore desberdinak hartzen dituztela. Bestalde, metodo horretan erabilitako kolore kopurua gehienez $\Delta(\mathcal{G}) + 1$ da, $v_i$-ren alboko erpinak diren erpinen kopurua $v_i$ erpinaren maila delako, eta hori gehienez $\Delta(\mathcal{G})$ delako.

Gorago aipatutako prozedura *algoritmo zekenen* kategoriako prozeduren artean koka daiteke, une guztietan kolore kopuru gutxienekoa erabiltzen saiatzen garelako bertan, alboko erpinak diren erpinek kolore desberdinak hartu behar dituzten baldintzapean. Baina orokorki algoritmo hori erabiltzen duten prozedurek ez dute lortzen kolore kopuru minimoa erabiltzea.

Existitzen dira grafo batzuk, non 2.4 teoremaren desberdintza berdintza bihurtzen den. Adibidez, $K_n$ grafo osoaren maila maximoa $n - 1$ da eta zenbaki kromatikoa, $n$. Baldin eta $n$ zenbaki bakoitia bada, $C_n$ grafo ziklikoak ere berdintza betetzen du, zeren eta bere maila maximoa 2 da eta bere zenbaki kromatikoa, 3. Ondoko teoreman (Brooksen teoreman) emaitza aipagarri bat azalduko dugu. Horretatik, ondorioztatzen da paragrafo horretan aipatutako adibideak 2.4 teoremako desberdintza berdintza bihurtzen duten grafo konexu bakarrak direla.

**Teorema 2.5.** *Baldin eta $\mathcal{G}$ grafo konexua ez bada grafo oso baten edota ordena bakoitiko grafo zikliko baten isomorfoa, orduan $\chi(\mathcal{G}) \leq \Delta(\mathcal{G})$ dugu.*

Lanaren lehen irakurketa batean irakurleak, nahi izanez gero, ondoren emango dugun Brooksen teoremaren froga baztertu, eta bigarren irakurketa baterako utz dezake. Lehenengo eta behin, beharrezkoa izango dugu konexioari dagozkion aurrekontzeptu batzuk azaltzea.

Grafo bat $d$-konexua dela esaten da, grafoa ezkonexu edo $K_1$-en isomorfoa bihurtzeko beharrezkoa bada ezabatzea gutxienez $d$ erpin eta erpin horietariko batean muturren bat duten ertz guztiak. Baldin eta grafoa 1-konexua bada baina ez 2-konexua, orduan badago gutxienez erpin bat grafoa ezkonexu bihurtzen duena, hori ezabatzerakoan. Horrelako erpinei ebaki erpin esaten zaie. Antzera, grafo konexu bateko ertz bati zubia esaten zaio, baldin eta muturrak mantenduz ertza ezabatzerakoan hasierako grafoa ezkonexu bihurtzen bada. Grafo konexuaren blokea esaten zaio ondoko bi motako edozein azpigrafori: azpigrafo 2-konexu maximal bati, edo zubi bat bere bi muturrekin bildutako azpigrafori. Nahiko erraz ikusten da edozein grafo konexuk blokekako deskonposizio bakarra onartzen duela. Deskonposizio horretan ertz bakoitza bloke bakar batean dago, baina ez da erpinekin gauza bera gertatzen. Bloke batean baino gehiagotan dauden erpinak, hain zuzen ere, ebaki-erpinak dira.

Orain bai, prest gaude Lovaszek emandako froga erabilita, Brooksen teorema frogatzeko. Froga hori eraikitzailea da eta 2.4 teoremako frogan aurkeztutako algoritmoan oinarritzen da.

*Froga*. Baldin eta $\Delta(\mathcal{G}) = 0$ bada, grafoa $K_1$-en isomorfoa da. Baldin eta $\Delta(\mathcal{G}) = 1$ bada, grafoa $K_2$-ren isomorfoa da, eta $\Delta(\mathcal{G}) = 2$ bada, orduan grafoa bide-grafoa edo ordena bikoitiko grafo ziklikoa da, eta ondorioz $\chi(\mathcal{G}) = 2$ da. Beraz, nahikoa da emaitza probatzea aldi berean $\Delta(\mathcal{G}) \geq 3$ eta $\mathcal{G} = (V, A)$ grafoa oso baten isomorfoa ez denean.

Demagun grafoa ezerregularra dela, eta izan bedi $v$ erpina, $\Delta(\mathcal{G})$ baino maila txikiagoko erpin bat. Adieraz dezagun erpin hori $v_n$ gisa. Izan bedi $E_1$, $v_n$-ren albokoak diren erpinen multzoa. Zenbakitu ditzagun $E_1$-eko erpinak $v_{n-1}, ..., v_{n-r_1}$ moduan, $r_1 = |E_1|$ izanik. Orain izan bedi $E_2$, $V - (\{v\} \cup E_1)$ multzoan $E_1$-eko erpinen baten albokoak diren erpinek osatutako multzoa. Zenbakitu ditzagun $E_2$-ko erpinak $v_{n-r_1-1}, ..., v_{n-r_1-r_2}$ moduan, $r_2 = |E_2|$ izanik. Erpinen kopurua finitua denez, prozesu hori behin eta berriz errepikatuz $E_s$ multzo ez-hutsa eta $E_{s+1}$ multzo huts bat lortuko dira. Baldin eta 2.4 teoremako algoritmoa aplikatzen badugu, kolore kopuru egoki bateko koloreztatze bat lortzen da. $E_s$ multzoko erpin bakoitza gutxienez $E_{s-1}$-eko erpin baten albokoa da, eta ondorioz, gehienez azpindize txikiagoko $\Delta(\mathcal{G}) - 1$ erpinen albokoa da. Beraz, gehienez $\Delta(\mathcal{G})$ kolore erabiliko dira. Argudio bera erabil daiteke beste $E_i$-ko erpinekin. Azkenik, $v_n$-ren maila $\Delta(\mathcal{G})$ baino txikiagoa denez, berriro koloreztα ditzakegu erpin guztiak gehienez $\Delta(\mathcal{G})$ kolore erabilita. Beraz, orain demagun $\mathcal{G}$ grafoa $k$ mailako erregularra dela.

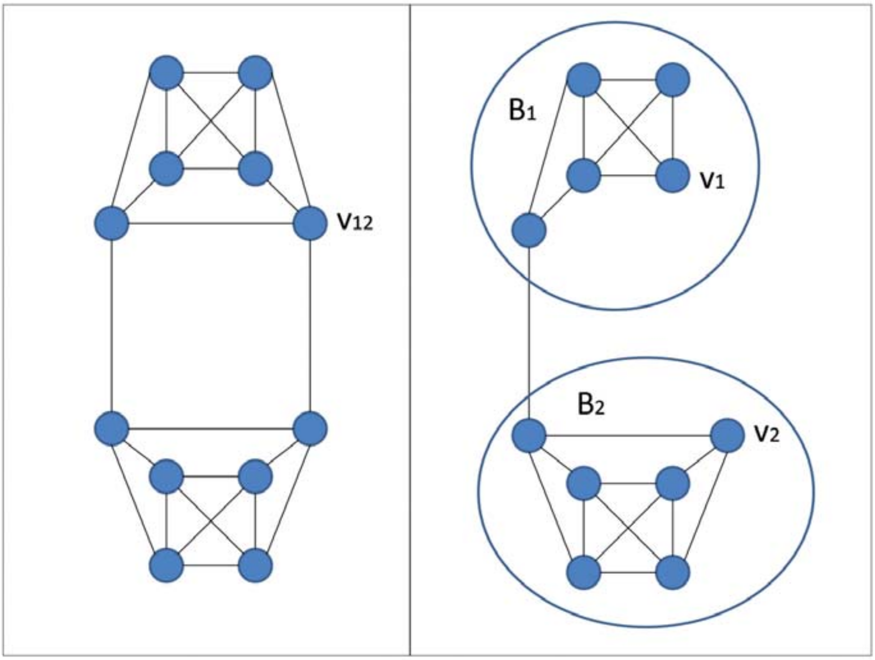
Lehenengo eta behin, demagun grafoak $v$ ebaki-erpin bat onartzen duela. Orain $v$ erpina eta $v$-n muturren bat duten ertz guztiak ezabatzerakoan, lortutako $\mathcal{G} - \{v\}$ grafoa ezkonexua da. Izan bitez $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_r$ aurreko grafoaren osagai konexuak. Edozein $i = 1, ..., r$ baliotarako, izan bedi $\mathcal{G}_i'$ grafoa ondoko eran lortutakoa: $\mathcal{G}_i$ bildu $v$ erpina bildu $\mathcal{G}$-ko ertzak, mutur bat $v$-n eta bestea $\mathcal{G}_i$-ko erpin batean dutenak. $\mathcal{G}_i'$-n $v$ erpinaren maila $k$ baino txikiagoa da, eta lehenago egindako argudioagatik $\chi(\mathcal{G}_i') \leq k$ dugu. Orain, orokortasuna galdu gabe demagun $\mathcal{G}_i'$ bakoitzean $k$ kolore edo gutxiagoko koloreztatze bat dugula eta guztietan $v$ erpinak kolore bera hartzen duela. Azken hori suposa genezake, zeren eta kontrako kasuan, $\mathcal{G}_i'$-ren koloreztatze bakoitzean koloreen trukaketa bat egitea posible litzateke. Ondorioz, hemendik erraz lortzen dugu $\mathcal{G}$-ren koloreztatze bat, gehienez $k$ kolore erabilita. Hori egitea zuzena da, koloreztatze guzti horiek independenteak direlako, eta aurrekoa betetzen da ez delako $\mathcal{G}_i'$ desberdinetan ertz komunik existitzen.

Beraz, orain demagun grafoa erregularra eta 2-konexua dela; egoera horretan bi azpikasu bereizten dira: 3-konexua denean edo ez denean 3-konexua.

1. kasua: Demagun grafoa 3-konexua dela. Grafoa ez denez osoaren isomorfoa, ziurta daiteke existitzen direla $v_n$ zenbakitzen dugun erpin bat, eta beste bi erpin, $v_1$ eta $v_2$ ; bertan $v_1$ eta $v_2$ ez dira alboko erpinak, baina badira $v_n$-ren albokoak. Kontrako kasuan, edozein bidetako erpinak binaka alboko erpinak izango lirateke, eta grafoa konexua denez, grafoko edozein bi erpin ere alboko erpinak izango lirateke; hori hipotesiaren kontrakoa da. Orain baieztatzen dugu existitzen dela $v_{n-1}$ beste erpin bat, $v_n$-ren albokoa dena. Kontrako kasuan, $v_1$, $v_2$, eta erpin horietariko batean muturra duten ertz guztiak ezabatuz, grafo ezkonexu bat lortuko genuke, ezin izango genukeelako igaro $v_n$-tik beste inolako erpin batera. Eta hori $\mathcal{G}$ grafoa 3-konexua izatearen aurkakoa da. Prozesua errepikatuz, $i \geq 3$ balio bakoitzerako existitzen da $v_i$ erpin bat $v_{i+1}$, ..., $v_n$ erpinetako baten albokoa dena. Orain bai, erraza da 2.4 teoremako algoritmoa erabiliz koloreztatze bat aurkitzea. Lehenago egin den bezala, $i < n$ izanik, $v_i$ erpina koloreztatzerakoan existitzen da $i$ baino azpindize handiagoko erpin bat, $v_i$-ren albokoa dena; horrela, $k$ kolore gehienez erabilita koloreztatze bat eman daiteke. Gainera, prozesuaren hasieran $v_1$ eta $v_2$ erpinei kolore bera eman diezaiekegu ez direlako alboko erpinak. Bestalde $v_n$ erpina $v_1$ eta $v_2$-ren alboko erpina denez, $v_n$-ren alboko erpin guztiak koloreztatzerakoan gehienez $k - 1$ kolore erabili izan ditugu, eta oraindik kolore bat libre geratzen zaigu $v_n$ koloreztatzeko.

2. kasua: Demagun grafoa 2-konexua dela baina ez 3-konexua. Existitzen da $\mathcal{G}$-n erpin bat, $v_n$ zenbakitzen duguna, non $\mathcal{G} - \{v_n\}$ grafoa 1-konexua den, baina ez den 2-konexua. Beraz, grafoak gutxienez ebaki-erpin bat du. Orduan, $\mathcal{G} - \{v_n\}$ grafoa bloketan banatzen da. Bloke horietatik, existitzen dira behintzat bi, $B_1$ eta $B_2$ izenekoak, ebaki-erpin bakar bana dutenak $\mathcal{G} - \{v_n\}$ grafoarekiko. $B_i$ bloke bakoitzean $v_n$-ren albokoa den $v_i$ erpinen bat existitu behar da. Gainera, $v_i$ ez da $B_i$-ren ebaki-erpin bakarra. Kontrako kasuan, hasierako $\mathcal{G}$ grafoaren ebaki-erpina ere izango litzateke. Azkeneko hori betetzen da, zeren eta $\mathcal{G}$-n aipatutako erpina ezabatzerakoan ez litzateke existituko $B_i$-ko erpin bat kanpoko erpin batekin lotzen duen biderik. Orduan $\mathcal{G}$ ez litzateke 2-konexua izango, eta hori kontraesan bat da. Nabari da $v_1$ eta $v_2$ erpinak ez direla albokoak, zeren eta $\mathcal{G}$ grafoan $v_n$ eta $B_1$ blokeko ebaki-erpin bakarra ezabatzerakoan, ezin igaro daiteke bide baten bidez $v_1$ erpinatik $B_2$-ko erpinen batera. Aipatutako egitura adibide baten bidez azaltzen da 6. irudian. Orain, argudioa $\mathcal{G}$ grafoa 3-konexua den kasuaren antzekoa da, eta erpinen zenbaketa egoki bat lor dezakegu horri aurreko algoritmo zekena aplikatzeko.

Nahiz eta Brooksen teorema grafo konexuetara aplikatzen den, benetan hori ez da murrizketa garrantzitsua, grafo baten zenbaki kromatikoa bere osagai konexuen zenbaki kromatikoen maximoa delako; ohartu gaitezen grafo bateko osagai konexu bakoitza kolore kopuru minimoarekin koloreztA daitekeela.




**6. irudia.** Brooksen teoremako 2. kasuko adibidea.

## 3. MAPEN KOLOREZTATZEAK

### 3.1. Bost koloreen teorema

Grafo abstraktuen koloreztatzeen sarrera plazaratu zuen problema, gehienez lau kolore erabilita mapa bat koloreztatzearen problema da, mapan muga zati komuna duten edozein bi herrialde kolore desberdinekin koloreztatzen diren baldintzapean. Muga komunak ezin daitezke puntu batera gutxitu, eta marrez osatuta egon behar dute. Adibidez, 9. irudian Euskadi komunitatearen eskualdeen mapa dugu, eta bertan adierazten da Arratia Nerbioia eta Enkartazioen muga puntu batera estutzen dela. Argi dago hori idealizazio matematikoa baino ez dela, errealitatean hori ezin gerta daitekeelako. Baina idealizazio horretan posible izango litzateke Arratia Nerbioia eta Enkartazioak kolore berdinaz margotzea.

1878. urtean Francies Guthriek ondoko galdera plazaratu zuen: koloreztа ote daiteke edozein mapa gehienez lau kolore erabilita, jadanik aipatutako baldintzapean? Emaitza hori lau koloreen konjektura edo susmo gisa ezagutu izan da luzaro. Hurrengo atalean, aipamen historiko laburra egingo dugu konjektura horren ebazpenean egin diren ahaleginen, eta prozesuan sortu diren poztasunen eta hutsegiteen berri emateko. Azkenik, 1976. urtean Kenneth Appelek, Wolfgang Hakenek eta John Kochek frogatutzat eman zuten teorema.

Ordea, atal honetan ahulagoa den teorema baten froga osoa emango dugu, hain zuzen ere, frogatuko dugu aurreko baldintzapean edozein mapa gehienez bost kolorez kolorezta daitekeela. Teorema hori bost koloreen teorema izenarekin ezagutzen da. Beharbada, irakurleak galde dezake zer zentzu daukan bost koloreen teorema emateak, jadanik lau koloreen teorema frogatuta badago. Erantzuna erraza da, irakurleak ez baitu une honetan tresna matematiko nahiko lau koloreen teorema frogatzeko, baina bai ordea bost koloreen teorema frogatzeko.

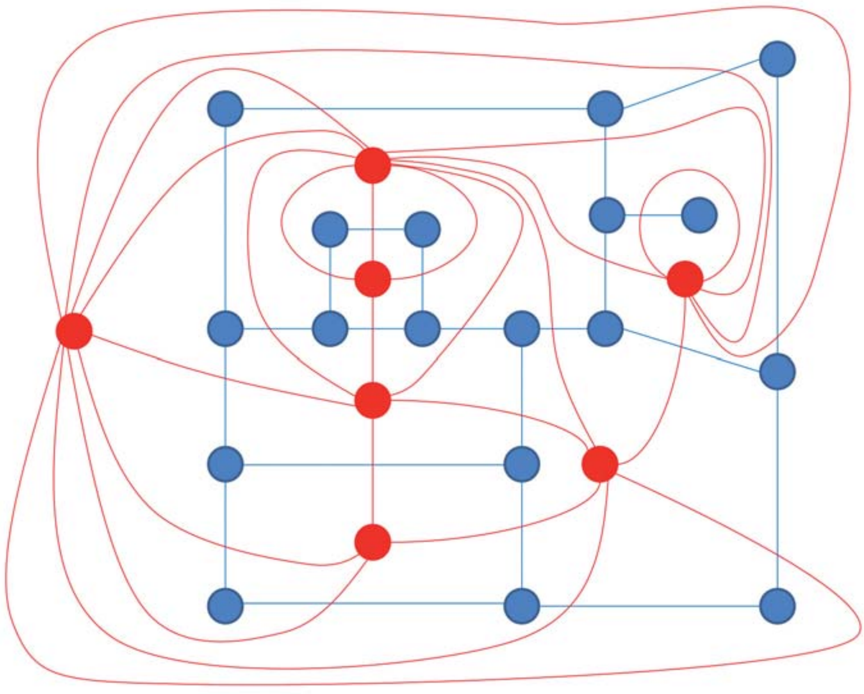
Lehenengo eta behin beharrezkoa da maparen kontzeptua matematikoki formalizatzea. Baina horrek ez du esan nahi gure buruan formalismoaren zehaztapen guztiak etengabe mantendu behar ditugunik. $[0, 1]$ tartean definituta dagoen aplikazio injektibo eta jarraiki baten irudiari $\mathbb{R}^2$ planoan arku esaten zaio. 0 eta 1en irudiak arkuaren muturrak direla esaten da. Mapa bat ondoko baldintza betetzen duen arku finituen multzoa da: multzoko edozein bi arku disjuntuak dira edo horien ebakidura arku bien mutur komun bat da. Ohartzen gara goragoko definizio matematikoak oso ondo islatzen duela mapa geografikoaren ideia intuitiboa. Kasu horretan arkuak bat datoz herrialdeek dituzten mugekin.

Orain herrialdearen kontzeptua ere formaliza daiteke. Arkuen bilduraren $\mathbb{R}^2$-ko osagarriaren osagai arku-konexuak, zentzu topologikoan, $A_1, ..., A_c$, herrialdeak izango lirateke. Hau da, herrialde bat denotatuko duen $A_i$ osagai arku-konexu bakoitza, aipatutako osagarri horren azpimultzo maximal bat da, non $A_i$-ko edozein bi puntu $A_i$-n barne dagoen arku baten bidez «konekta» daitezkeen.

Jakina, edozein mapak grafo bat zehazten du; bertan, ertzak arkuak dira eta erpinak arkuen muturrak hain zuzen. Mapa errealetatik lortutako grafoek ertz errepikatuak eta begiztak ere izan ote ditzaketen pentsa genezake oztopo gisa. Baina hori ez da benetan oztopo bat, kasu horretan posible delako begiztak eta ertz errepikatuak alderatzeko horiei dagozkien ertzak azpibanatzen dituzten erpin gehigarriak gehitzea.

Zoritxarrez, atal honen hasieran aurkeztu dugun mapa koloreztatzeko problema, ez da lanaren gainerakoan aztertzen den grafoaren erpinen koloreztatzeko problema bera. Eman berri dugun maparen definizioan, herrialdeak grafoaren adierazpen planarraren aurpegiekin datoz bat, eta ez erpinekin. Hori ez da benetan arazoa, eta erraza da pseudografo dualaren kontzeptuaren bidez ikuspuntu bi horiek batzea. Grafo baten adierazpen planarraren duala, intuitiboki, erpinen eta aurpegien funtzioak aldatuz lortzen den pseudografoa da.

Matematikaren ikuspegitik, prozesu zehatza aurpegi bakoitzean edozein puntu hartzea litzateke eta horiekin dualeko erpinen multzoa izango genuke, eta bestalde, ondoko eran egingo genuke hasieran emandako grafoko ertz bakoitzetik dualean ertz berri bat osatzea: baldin eta hasierako grafoko *a* ertza bi aurpegien bide ertza bada, dualean *a´* ertza eraikitzen dugu, horren muturrak aipatutako aurpegien aurretik aukeratu ditugun puntuetan egonik, eta aldi berean *a* ertzaren barnetik igarotzen delarik. Kontrako kasuan, *a* ertza aurpegi bakar baten bide ertzean badago, horrek begizta bat sortzen du grafo dualean. Aipatutako prozedura 7. irudian irudikatzen da. Hasierako grafoaren erpinak eta ertzak urdinez margotuta daude, eta ordea dualaren erpinak eta ertzak gorriz. Argi dago hasierako grafoan agertzen den motako bat mailako erpinek, hau da, dualen begiztak sortzen dituztenek, ez dutela zentzu askorik mapa errealaren trazaduran, baina bat datoz emandako maparen definizioarekin.



**7. irudia.** Grafo planar bat, urdinez, eta haren duala, gorriz.

Argi dago grafo dualean erpinak koloreztatzerakoan, begiztak ezabatu eta ertz anizkoitzen tokian ertz bakarra jar daitekeela.

Beraz, esan dezakegu orokortasuna galdu gabe grafoa eta planarra direla benetan lortzen ditugunak. Orain, gauza bera da hasierako grafoaren aurpegiak koloreztatzea edo grafo dualaren erpinak koloreztatzea. Horrela, ezaguna dugun alorrean koka gaitezke. Beraz, guztiz konbinatorioa den hurrengo teoremaren ondorioa da edozein mapa gehienez bost kolorez koloreztatu ahal izatea.

**Teorema 3.1** (Bost koloreen teorema). *Baldin eta $\mathcal{G}$ grafo planarra bada, orduan* $\chi(\mathcal{G}) \leq 5$.

Hori frogatzeko beharrezkoak ditugu ondoko bi lemak.

**Lema 3.2.** *Baldin eta grafo konexu planar batek n erpin eta m ertz baditu, orduan* $m \leq 3n - 6$.

*Froga*. Denota dezagun $k(f)$ bidez $f$ aurpegiaren bide ertzean dauden ertzen kopurua. Kalkula dezagun aurpegi guztiak zeharkatuz $k(f)$ balio guztien batura. Baldin eta $i$ balio bakoitzerako bide ertzean $i$ ertz dituzten aurpegien kopuruari $n_i$ deitzen badiogu, orduan aurreko batura $\Sigma i n_i$ da, eta aldi berean hori $2m$ baino txikiago edo berdina da. Aurreko desberdintza betetzen da, zeren eta $k(f)$ bakoitzean kontatzen dugun ertz bakoitza aurpegi baten edo biren bide ertzean dago. Bestalde, aurpegi bakoitzak gutxienez hiru bide ertz dituenez, aurrerago aipatutako batura $\geq 3\Sigma n_i$ da, eta hori aldi berean aurpegien kopuruaren hirukoitza da. Orduan, $3c \leq 2m$ da. Orain Eulerren formula erabiliz, $n - m + c = 2$ da eta ondorioz, $6 = 3n - 3m + 3c \leq 3n - 3m + 2m$, hau da, $m \leq 3n - 6$, eta hori da frogatu nahi genuena.

**Lema 3.3.** *Baldin eta $\mathcal{G}$ grafo konexu planarra bada, orduan bere maila minimoak $\delta(\mathcal{G}) \leq 5$ bornea betetzen du.*

*Froga*. Demagun absurdora eramanez $\delta(\mathcal{G}) \geq 6$ dela. Aurreko leman oinarrituta, $m \leq 3n - 6$ dugu. Bestalde, erpin guztien mailen batura $2m$ da. Orduan,

$$6n \leq \sum_{u \in V} grad(u) = 2m \leq 6n - 12,$$

eta emaitza hori kontraesankorra da.

Orain 3.1 teoremaren froga aurkeztuko dugu.

*Froga*. Orokortasuna galdu gabe, demagun grafoa konexua dela. Emaitza grafoaren $n$ ordenaren gaineko indukzioaren bidez egingo dugu. Emaitza nabaria da $n \leq 5$ denean. Orain, demagun $n \geq 6$ dela. Aurreko leman frogatutakoaren arabera, existitzen da $u$ erpin bat zeinarentzat bere maila $\leq 5$ den. Denota dezagun $\mathcal{G}'$ bidez $\mathcal{G} - \{u\}$ grafoa. Indukzio hipotesia erabiliz,

$\mathcal{G}'$ grafoa bost kolorez kolorezta daiteke. Baldin eta $u$ erpinaren alboko erpineetarako bost kolore baino gutxiago erabili badira, oraindik bosgarren kolore bat libre dugu $u$ erpina koloreztatzeko. Kontrako kasuan, demagun orokortasuna galdu gabe, $u$ erpinaren ingurunea $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$ erpinez osatua dagoela, eta horiei 1, 2, 3, 4 eta 5 «koloreak» egokitzen dizkiegula hurrenez hurren. Orain bi kasu bereizten dira: lehenengo kasuan, existituko da bide bat $v_1$ erpinean hasten dena, $v_3$-an bukatzen dena eta txandaka 1 eta 3 «koloreei» dagozkien erpinak zeharkatzen dituena; bigarren kasuan, ez da horrelako biderik existitzen. Bigarren kasuan, har dezagun $S$ multzoa $v_1$ erpinean hasten diren bideetatik 1 eta 3 koloreez koloreztatuta dauden erpin guztiez osatua. Multzo horretako erpinei dagokien kolorea, 1etik 3ra aldatuz eta alderantziz, oraindik koloreztatze bat dugu, $v_3$ erpina ez delako $S$-ko baten ere alboko erpina. Hori egiterakoan, $u$-ren alboko erpinak koloreztatzeko bost kolore baino gutxiago erabiltzen dira, eta horrela berriro ere bosgarren kolore bat libre dugu. Ordea, beste kasuan, $v_1$ erpinean hasi, $v_3$-an bukatu eta 1 eta 3 koloreak txandakatzen dituen bide bat aukeratuz eta horri $v_3u$ eta $uv_1$ ertzak gehituz, orduan $v_2$ edo $v_4$ erpina barne duen ziklo bat lortzen da. Adibidez, 8. irudian $v_2$ erpina barne duen ziklo baten kasua adierazten da.

Ohartu gaitezen orain aipatutako azken azpikasuko bietan, $v_2$ edo $v_4$ erpinak aurreko kasuan deskribatutako egoeran egongo liratekeela.

### 3.2. **Lau koloreen teorema**

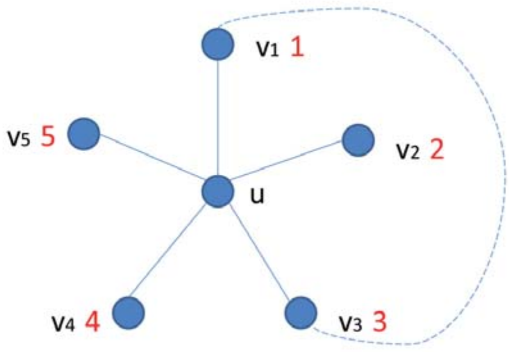
Aurreko ataleko emaitza hobetu daiteke.

**Teorema 3.4** (Lau koloreen teorema)**.** *Baldin eta $\mathcal{G}$ grafo planarra bada, orduan* $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$.

Bost koloreen teoremaren kasuan bezala, mapak zehazten duen grafoari dagokion grafo duala hartuz, problema erpinen koloreztatze batera murriz daiteke. Egoera horretan, frogatzen da edozein grafo planarren zenbaki kromatikoa 4 dela gehienez.

Teoremaren enuntziatua erraza izan arren, teorema horren istorioa luzea eta ezbehartsua da. Horren sorrera 1878. urtean Francis Guthriek azaldu zuen galderan dago. Bere garaiko beste hainbat matematikari bezala, Francis Guthrie gizon polifazetikoa izan zen, matematikaria izateaz gain abokatua eta botanikaria baitzen. Ingalaterrako mapa bat margotuz, adierazi zuen edozein mapa gehienez lau kolore erabilita margotu litekeela, eta nahiz eta berak erantzuna beti baiezkoa zela pentsatu, ezin izan zuen hori bera frogatu.

Bere anaia Frederick ere matematikaria zen eta bere bidez, Fredericken irakaslearengana, Augustus de Morgan matematikari ospetsuarengana heldu zen galdera hori, eta horrek Sir Rowan Hamiltoni jakinarazi zion.




**8. irudia.** Bost koloreen teoremaren frogako zikloa.

Baina Sir Rowan Hamiltonek ez zuen uste problema interesgarria zenik eta ez baiezko froga aurkitzeak edo kontradibide bat emateak merezi zutenik ere.

Matematikari batzuek problema hori ebazteko egindako ahaleginen ondoren, problemaren interesa jaisten joan zen, eta ez zen berriro ere berpiztu Arthur Cayleyk 1878. urtean ea baten batek emaitza frogatuta ote zeukan jakiteko mina adierazi arte.

Historiaren une horretan, Alfred Bray Kempek zutarri bat ezarri zuen, 1879. urtean lau koloreen teoremaren froga eman zuela ustekoan. «Ustekoan» esaten dugu, zeren eta 1890. urtean Percy John Heawoodek Kemperen akats bat aurkitu baitzuen frogan.

Nahiz eta Kemperen froga ez zen zuzena izan, lau koloreen teoremarekin zerikusia duten ideia oso emankor ugari daude bertan, geroago egindako lanetan hori bera frogatzeko. Horretarako funtsezkoa izan da Kemperen kateen kontzeptua, hau da, bi kolore bakarrik erabilita kolorezta daitekeen azpigrafo konexu maximalaren kontzeptua. Hain zuzen ere, irakurlea konturatu daiteke Kemperen kateen ideia jadanik bost koloreen teoremaren frogan agertzen dela, zeren eta Kemperen arrazonamendu orokorra baimenduta baitago kasu horretan.

Kemperen frogan aurkitutako akatsak matematikari askoren jakinmina berpiztu zuen, baina hala eta guztiz ere, oraindik urte askoko ahaleginak egin behar izan ziren, Kenneth Appelek, Wolfgang Hakenek eta John Kochek 1976. urtean teorema frogatutzat eman zuten arte.

Frogaren ideia erpinen kopuruaren kontradibide minimalaren bitartez egiten da. Argi dago grafoak lau edo erpin gutxiago baditu, grafoa lau kolorez margotu daitekeela. Absurdora eramanez, demagun orain lau koloreen teoremaren emaitza ez dela betetzen, eta orduan behintzat lau kolorez ezin kolorezta daitezkeen erpinen kopuru minimoko grafo bat existituko litzateke. Kasu horretan, grafo mota horiei «kriminal minimalak» esaten zaie, teoremaren legea oztopatzen dutelako.

Appelek, Hakenek eta Kochek deskarga-laburtze sistema trebe bat erabili zuten teorema frogatzeko. Fisikako karga elektrikoetan oinarritutako metodo matematiko baten bidez, hain zuzen ere deskarga izeneko metodoaren bidez, 1936 nahitaezko egiturez osatuko multzoa lortu zuten; multzo horretan denak laburgarriak zirela frogatu zen.

Metodoaren ideia intuitiboa eman nahi genuen, eta argi dago ez garela oso zorrotzak izan. Oraindik definutu gabe ditugu nahitaezko egiturak eta laburgarri delako kontzeptua, baina horiek ondoren aurkeztuko dira.

Nahitaezko egiturak tamaina txikiko azpigrafoak dira, eta «kriminal minimal» bakoitzak nahitaezko egituraren bat azpigrafotzat du.

Laburgarri esaten zaie honelako baldintzak betetzen dituzten egiturei: 1) Erpin batzuk egoki identifikatuta egitura bakoitzerako ordena txikiagoko grafoa lor badaiteke; ohartu gaitezen azken hauek indukzio hipotesiagatik gehienez lau kolorez margotu daitezkeela. 2) Aldi berean, ordena txikiagoko grafo horren koloreztatzea hedatu badaiteke emandako grafoaren koloroztatze batera.

Ohartu gaitezen aipatutako hedadurarako beharbada kasu batzuetan Kemperen kateak erabil daitezkeela. Horrela, «kriminal minimalen» lau kolorez osatuko koloreztatzeak lortzen direnez, grafo horien existentzia ezinezkoa dela ziurta dezakegu.

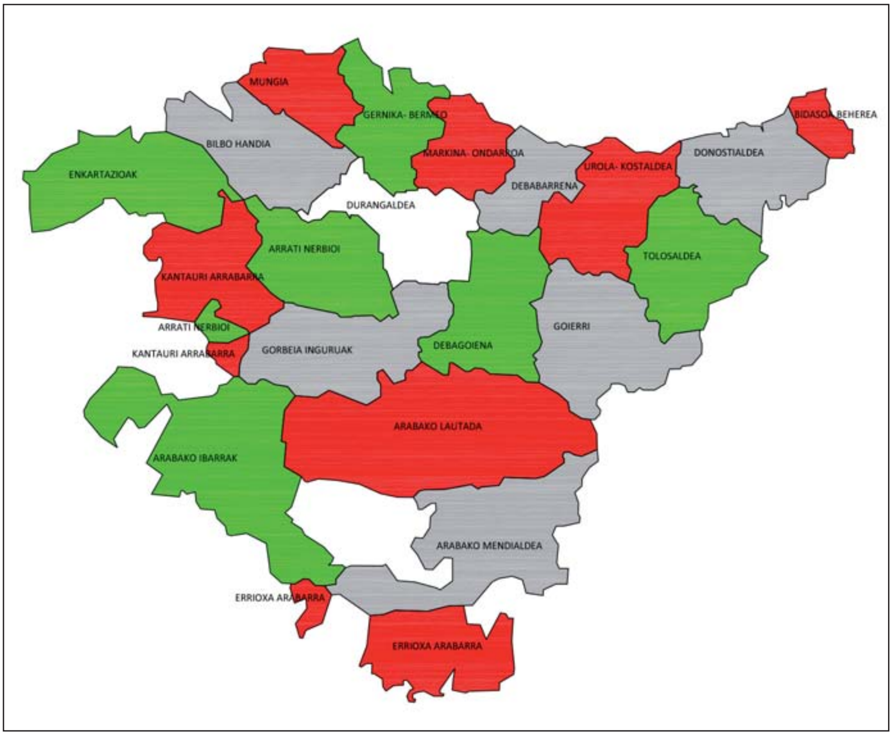
Teoremaren froga bi zatitan argitaratu zen eta guztira 535 orrialde betetzen zituen. Kalkuluak egiteko eta emaitza egiaztatzeko ordenagailuaren 120 orduko lana behar izan zen. Hori dela eta, eztabaida ugari sortu ziren matematikarien artean.

Matematikari askorentzat hori ez zen benetan froga bat, ezinezkoa zelako arrazoizko denbora batean pertsona batek ordenagailuaren laguntzarik gabe, kalkuluak eskuz eginda hori bera egiaztatzea. Garai horretako komentario kritiko batek horrela esaten zuen: «Froga matematiko bat poema baten modukoa dugu, hau da, telefono aurkitegi bat.» Egia da matematikarien gehiengoa ados dagoela ordenagailuaren laguntzarik gabe ulergarria den froga matematikoaren edertasunaz, baina zorionez, gero eta gutxiagok baztertuko lukete ordenagailu batek sortutako eta egiaztatutako froga. Azken finean, mota horretako egiaztapenen atzean ideia matematiko egonkorrek egon behar dute eta programazioa zuzen eginda badago, ordenagailuaren huskortasuna gizatiarrarena baino askoz txikiagoa da.

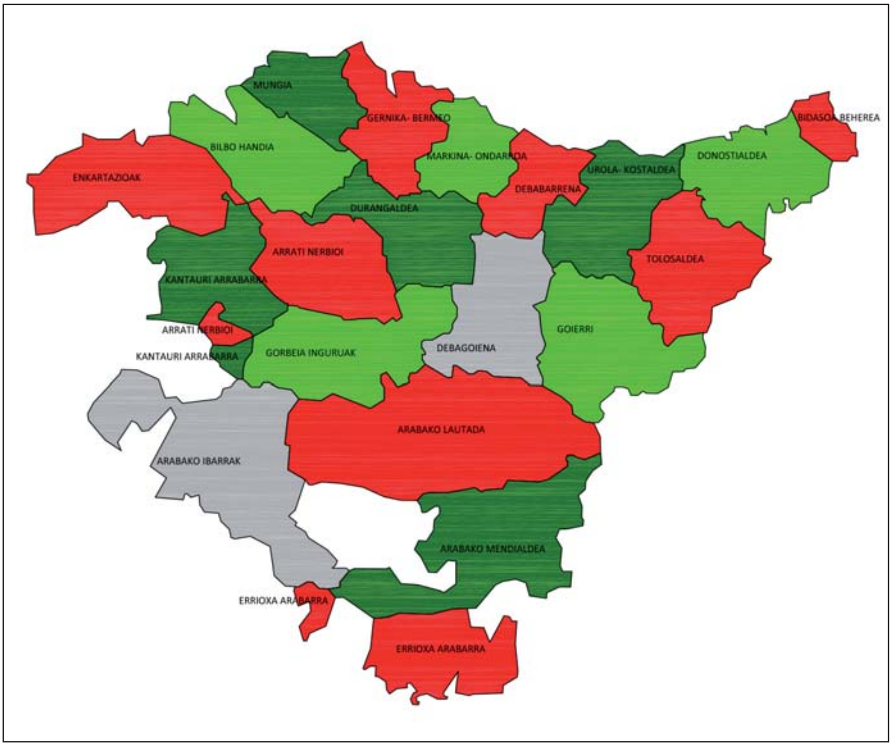
Noski, horrek ez du esan nahi, posible denean, ez denik saiatu behar ordenagailua erabili gabeko froga ulergarria eta egiaztagarria lortzen. Ahaleginak egitea merezi izaten du eta problemaren ulergarritasun sakonago batera eramaten gaitu horrek.

Azkenik, lanaren izenburuan eta sarreran azaldu dugun problema aurkeztuko dugu. Euskadi komunitatearen eskualdeen mapari dagokion grafoa kalkulatu dugu. 9. irudian eta 10. irudian adierazten dira mapa hori eta berari dagozkion eta geroago azalduko ditugun ondoz ondoko koloreztatzeak.

Grafoa kalkulatzerakoan kontuan hartu behar da infinituko aurpegia ere. Normalean infinituko aurpegia, mapan adierazitako eremuen kanpoko eskualdearekin identifikatzen da. Nahiz eta aipatutako eskualde hori ez dagoen planoan bornatuta, mapetan horren zati txiki bat baino ez da adierazten, eta zati hori hegaletatik hurbilen dagoen zati moduan definitzen da. Guk aurkezten dugun mapan, komenioz, onartuko dugu infinituko aurpegiari dagokion erpinak, Euskadiko eskualdea ez den Treviño eremua ere hartzen duela. Modu horretan, grafoak 21 erpin ditu; horietariko 20 eskualdeei dagozkie, eta bestea infinituko aurpegiari eta Treviñori dagokiona.




**9. irudia.** Eskualdeen maparen lehen koloreztatzea.




**10. irudia.** Eskualdeen maparen bigarren koloreztatzea.

Bi osagai konexu izateagatik, hain zuzen ere bat Treviñoz osatua eta bestea infinituko aurpegiaz, orduan Treviño hartzen duen infinituko aurpegiaren erpinak ez du adierazten grafo konexurik. Beraz, oso nabarmentzekoa da kasu horretan ez direla lau koloreen teoremaren baldintzak betetzen.

Arratia Nerbioia eta Errioxa Arabarra ere ez dira konexuak, bakoitzak bi osagai dituelako. Beraz, aztertzen gabiltzan mapari dagokion grafoaren zenbaki kromatikoa, hasiera batean behintzat, lau baino handiago izan daiteke, eta ondorioz baliteke mapa margotzeko lau kolore baino gehiago behar izatea.

Gorago aurkeztutako zalantzari erantzuna emateko, Magma programa erabiliz, grafo horren zenbaki kromatikoa konputatu dugu, eta bitxia bada ere, lau da. Ondorioz, margotu daiteke mapa hori lau kolore desberdin erabilita, baina ez gutxiago erabilita. 9. irudian erakusten da horrelako koloreztatze bat.

Jakina, lau kolore erabiltzeak ez du esan nahi infinituko aurpegia eta Treviño koloreztatzeko erabili den kolorea zuria, ezin denik eskualde gehiagotan erabili. Gure kasuan, kolore zuria Durangaldea margotzeko ere erabili da. Honen harira, hurrengo galdera interesgarria egin daiteke: baldin eta erabakitzen badugu infinituko aurpegia eta Treviño zuriz margotzea eta eskualde guztiak beste kolore desberdin batez margotzea, zein izango litzateke aurreko baldintzapetan mapa margotzeko beharrezkoa den kolore kopuru minimoa? Adibidez, ikusten dugu 10. irudian eskualdeak lau kolore desberdinez margotu daitezkeela, baina gure hurrengo urratsean saiatuko gara finkatzen ea lau den kolore kopuru minimoa eskualdeak baino ez margotzeko. Magma programarekin 10 orduko bilaketa konputazional bat egin ondoren ez da lortu kolore kopuru gutxiagoko koloreztatzerik, baina noski, horrek ez du esan nahi ez denik horrelakorik existitzen. Orain, guk irakurlea animatzen dugu lau kolore baino kolore kopuru gutxiagoko koloreztatze bat topatzera, edo ordea horrelakorik aurkitzea ezinezkoa dela frogatzera.

## 4. GRAFOEN KOLOREZTATZEEN ZERTARAKOAK

### 4.1. Batzordeen antolakuntzak

Grafoen koloreztatzeak ez dira artifizio matematiko teoriko hutsak zertarako asko dituen arlo bateko osagaiak baitira. Giza taldeko gaietan, teknologia berrien garapenetan, eta baita ere dibertimenduzko problemetan eta problema ludikoetan zertarako ugari dituzte.

Azpiatal honetan ikusiko ditugun zertarakoen artean batzordeen antolakuntza sistematikoa dago. Giza taldeko askotan, adibidez, lantegietan, unibertsitateetan, udaletxeetan, etabar.... beharrezkoa izaten da lan jakin batzuk egiteko batzordeak eratzea, batzorde bakoitza kopuru murriztu batek osatua egonik. Hasiera batean behintzat, giza taldeko langile guztiek batzorde batean baino gehiagotan parte har dezakete, eta hain zuzen ere, hori da maizen gertatzen dena. Baina aukera horrek arazoak sortzen ditu, eta arazo horiek dira, grafoen koloreztatzeak erabilita, konpontzen saiatuko garenak.

Batzorde desberdinak denbora tarte jakin batzuetan biltzen dira, eta normalean denbora tarte horiek bata bestetik hurbil egotea espero da, batzordeetako denbora tarteetatik kanpo geratzen diren langileen lan-orduak optimizatzeko.

Batzordeen denbora tarteen muturretako banaketetako bat izan daiteke batzorde guztiak aldi berean, aurretik finkatutako maiztasunarekin, bilera gela desberdinetan bilduta egotea. Egia da aipatutako antolaketa horrek denboran banaketa trinkoa ematen digula, baina desabantaila nabariak ere baditu. Lehenik, gerta daiteke egokitutako bilera gela nahiko ez izatea, eta bigarrenik, matematikaren ikuspegitik funtsezkoagoa dena, batzorde batean baino gehiagotan dagoen kide batek bilera batera baino gehiagotara joan ezin izatea.

Arinago deskribatutako baterazintasunak kontuan harturik, eragozpen hori saihestu daiteke bilerak ahal diren aldiberekoen antolatzen baldin badira. Hau da, bilerak denbora tarteen kopuru minimoan banatu behar dira, denbora tarte berean kide komuna duten edozein bi batzorde biltzea debekatuta egotea ezarriz. Zorionez, problema hori ebazteko grafo teoriak eta partikularki grafoen koloreztatzeek asko lagundu dezakete.

Ondoko grafoa erantsi diezaiokegu batzorde-banaketari: grafoaren erpinek batzordeak adierazten dituzte, eta grafoko bi erpin ertz baten bidez lotuta daude, baldin eta batzorde bi horiek gutxienez bazkide komun bat badute.

Orain, batzordeen bileren denbora tarteak emateko problema, dagokion grafoaren koloreztatze bat aurkitzera murrizten da. Kasu horretan kolore bakoitzak denbora tarte bat adierazten du. Modu horretan, baliokidea da esatea alboko erpinek kolore desberdinak hartu behar dituztela edo esatea, gutxienez kide komun bat duten edozein bi batzorde denpora tarte berean ezinezkoa dutela biltzea. Eta aurrekoa da, hain zuzen ere ebatzi nahi dugun problema logistikoa.

Arinago esan dugun bezala, askotan denbora tarteen kopurua ahal den txikiena izatea nahi da bilerak modu trinkoenean egiteko, eta egoerak baimentzen duen heinean, ahal den eta aldibereko bilera gehien egitea ere nahi izaten da. Horrela, ideia horiek arinago deskribatutako $\mathcal{G}$ grafoan, kolore kopuru minimoa topatzera behartzen gaituzte.

Hain zuzen ere, zenbaki kromatikoak, erabili behar den kolore kopuru minimoa adierazten du, eta ondorioz grafoaren $\chi(\mathcal{G})$ zenbakia, eta $\chi(\mathcal{G})$ kolorearen bidez emandako koloreztatze bat aurkitu nahi ditugu. Ordea, grafoaren erpinen eta ertzen kopurua oso handia bada, praktikan hori ezin da bete, baina beti erabil daiteke 2.4 teoremak emandako emaitza, zeinak kolore gutxiko koloreztatzeak emateko metodo praktikoa adierazten duen; hala ere, koloreztatzearen kolore kopuru hori $\chi(\mathcal{G})$ baino handiagoa da.

Ondoren ikusi berri dugunaren adibide erraz bat jarriko dugu. Demagun Euskal Herriko Unibertsitatean ondoko sei batzordeak osatu nahi direla:

Ikasleen batzordea: Kepa, Leire

Ikerkuntza-batzordea: Amagoia, Aitziber

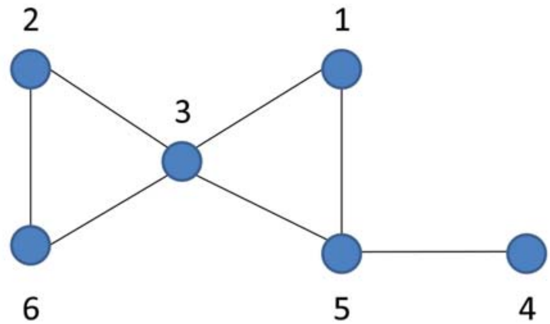
Irakaskuntza-batzordea: Kepa, Koldo, Amaia, Aitziber

Kanpo harremanetako batzordea: Iker, Aitor

Azpiegituretako batzordea: Amaia, Iker, Leire, Aitor

Euskarako batzordea: Koldo, Amagoia

Batzorde horiei elkartutako grafoak sei erpin ditu, eta horiek 1etik 6arte zenbakituko ditugu, 11. irudian adierazten den moduan. Grafoko ertzak zein diren erabakitzeko ondoko analisia egiten dugu: 1 erpina bat dator Kepak eta Leirek osatutako ikasleen batzordearekin. 1 erpinean muturren bat duten ertzak osatzeko, Kepa edo Leire batzorde horretatik kanpo zein batzordetan dauden begiratzen dugu. Kepa irakaskuntza-batzordean ere badagoenez 1 erpina eta 3 erpina lotzen dituen ertza existitzen da. Bestalde, Leire ere azpiegituretako batzordean dago, eta beraz 1 erpina eta 5 erpina lotzen dituen ertza existitzen da. Prozedura bera erabiliz beste erpin guztiekin, erraz ikus daiteke grafoaren ertzak ondokoak direla: 1 – 3, 1 – 5, 2 – 3, 2 – 6, 3 – 5, 3 – 6 eta 4 – 5.



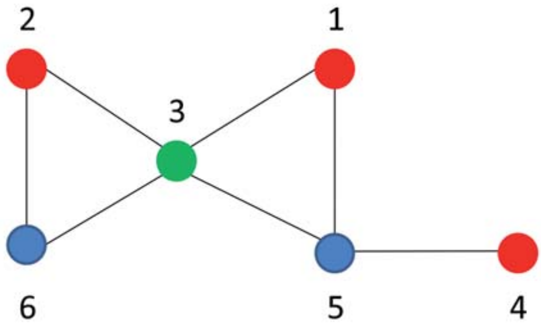

**11. irudia.** Batzordeei elkartutako grafoa.

Orain koloreztatze egokiak topatu behar ditugu. Muturreko aukeraketa bat litzateke, ez oso ekonomikoa, batzorde bakoitzari denbora tarde desberdin bat egokitzea; adibidez, ikasleen batzordea astelehenetan 9:00etatik 11:00etara, ikerkuntza-batzordea astelehenetan 11:00etatik 13:00etara, irakaskuntza-batzordea astelehenetan 15:00etatik 17:00etara, kanpo harremanetako batzordea astearteetan 9:00etatik 11:00etara, azpiegituretako batzordea astearteetan 11:00etatik 13:00etara, eta euskarako batzordea astearteetan 15:00etatik 17:00etara.

Nabaria denez, banaketa hori ez da oso gomendagarria, astero bi egunetan irakaslegoaren parte bat bileretan lanpetuta egongo litzatekeelako. Ikus dezagun nola antola daitekeen ordutegia modu egokiagoan. Aurreko grafoaren kolore kopuru txikiko koloreztatze bat topako dugu, 2.4 teoremako algoritmoa erabiliz, 12.irudian adierazten den moduan.

Egokitu diezaiogun, adibidez, gorri kolorea 1 erpinari. Nola 2 erpina ez den 1 erpinaren albokoa, berriro ere 2 erpinari gorri kolorea egokitu diezaiokegu. 3 erpina 1 erpinaren eta 2 erpinaren albokoa da, eta ondorioz ezin diogu 3 erpinari gorri kolorea egokitu; kolore berri bat behar dugu, adibidez, berdea. 4 erpina ez da ez 1aren ez 2aren eta ez 3aren alboko erpina, eta beraz egokitu diezaiokegu adibidez, erabilitako lehenengo kolorea, hau da, gorria. 5 erpina 1 erpinaren, 3 erpinaren eta 4 erpinaren albokoa da, eta ondorioz ezin diogu 5 erpinari ez gorria ezta berdea egokitu, hau da, hirugarren kolore bat behar dugu, adibidez, urdina. Bestalde, 6 erpina 2 erpinaren eta 3 erpinaren albokoa da, eta berriro ere ezin diogu 6ari ez gorria ezta berdea egokitu, baina libre dugu urdina. Modu horretan, grafoa hiru kolorez koloreztatu dugu.

Jadanik esanda dago erabilitako metodoak ez duela beti kolore minimoko koloreztatze bat erakusten, baina erraz ikus dezakegu kasu horretan behintzat posible izan dela, grafoak 1, 3 eta 5 erpinak dituen 3-ziklo bat barne duelako, eta ikusi bezala horrelako grafoak ezin daitezkeelako bi kolorez margotu. Ondorioz, bilerak hiru denbora tarte desberdinetan antolatzean datza batzordeen bilerak antolatzeko modu eraginkorrena. Adibidez, astelehenetan 9:00etatik 11:00etara ikasleen batzordea, ikerkuntza-batzordea eta kanpo harremanetako batzordeak (gorria), astelehenetan 11:00etatik 13:00etara irakaskuntza-batzordea (berdea), eta astelehenetan 15:00etatik 17:00etara azpiegituretako eta euskarako batzordeak (urdina).




**12. irudia.** Batzordeei elkartutako grafoaren koloreztatzea.

Horrek ez du esan nahi erabilitako hiru koloreko koloreztatzea bakarra denik. Hasiera batean behintzat, beste aukera batzuk ere egon litezke, eta beharbada beste antolakuntza-eragile batzuk ere kontuan hartzekoak lirateke zein koloreztatze aukeratu erabakitzeko unean.

## 4.2. **Zirkuitu estanpatuen proba**

[2] lanean grafoen koloreztatzeen beste zertarako bat aurkezten da. Bertan, grafoen koloreztatzeak erabiltzen dira zirkuitu estanpatuak probatzeko eta baita ere, ziurtatzeko diseinutik kanpoko ustegabeko zirkuitulaburrik ez

dela sartzen. Aipatutako artikulu horretan islatzen da zirkuitu estanpatu bat, horizontalki eta bertikalki distantzia berdinera banatuta dauden nodoen antolamendu angeluzuzen finitu baten bidez. Zirkuitu eroaleak horizontalki edo bertikalki ondoz ondoko nodoak bilduz estanpatzen edo inprimatzen dira. Lotura prozesu horretan osatzen diren sareko patroietan ez dira existitzen bi nodo bide bat baino gehiagorekin lotu daitezkeenik. Sareko patroien osagai konexuei sareak esaten zaie. Batzuetan, nodoetatik igarotzen ez diren bideetatik, ustegabez joaten diren zirkuitulaburrak sartzen dira eta kalitatezko kontrol egokiek aurkitu behar dituzte zirkuitulabur horiek. Ondokoa litzateke hori lortzeko modu bat: sare bikote guztiak aztertzea, bikoteko sare bati korronte elektrikoa ezarriz eta ikusiz ea korrontea beste sareraino heltzen den ala ez. Praktikan, metodo hori ez da oso erabilgarria, sare kopurua eta ondorioz testatzeko sare bikote kopurua oso handia delako eta horrek prozesua luzatzen eta garestitzen duelako. Ordea, ez da beharrezkoa zehatz-mehatz bikote sare guztiak testatzea, zeren eta askotan A eta B sareen arteko zirkuitulabur batek hirugarren C sare bat gurutzatzen du, eta orduan nahikoa litzateke A, C eta C, B bikoteak testatzea. Kasu horretan, esaten da A, C eta C, B bikote kritikoak direla, eta ordea A, B bikote ezkritikoa. [2] artikuluko egileek islatzen dute fisikoki arrazoizko diren hiru irizpideren bidez noiz den sare bikote bat bikote kritikoa.

1 Irizpidea: $N_1$ eta $N_2$ sareek bikote kritiko bat osatzen dute, beste inolako sarerik ebakitzen ez duen zuzen bertikal egoki baten bidez lotu badaitezke.

2 Irizpidea: $N_1$ eta $N_2$ sareek bikote kritiko bat osatzen dute, aurretik finkatutako luzera gainditzen ez duen, eta aldi berean beste inolako sarerik ebakitzen ez duen zuzen bertikal edo horizontal egoki baten bidez lotu badaitezke.

3 Irizpidea: $N_1$ eta $N_2$ sareek bikote kritiko bat osatzen dute, beste inolako sarerik ebakitzen ez duen zuzen bertikal edo horizontal egoki baten bidez lotu badaitezke, zuzenaren luzera edozein izanik.

Orain, zirkuitu estanpatu bati grafo bat egokitu diezaiokegu: erpinak zirkuitua osatzen duten sareak dira, eta esango dugu bi erpin albokoak direla, sare bikote hori bikote kritikoa denean. Baldin eta grafo hori $k$ kolore erabilita koloreztatzen bada, orduan kolore berdina duten sare guztiak, binaka, bikote ezkritikoak osatzen dituzte, eta hori dela eta, kolore berdineko sare horiek kanpoko eroaleen bidez lotu daitezke bloke bakar bat osatzeko. Beraz, bloke horien biren arteko zirkuitulaburrak badaudela probatzea nahikoa litzateke. Proba kopurua minimizatzeko, erabilitako $k$ kolore kopurua ahal den txikiena izatea, hau da, zenbaki kromatikoaren berdina edo ahal den hurbilen izatea nahi dugu. [2] artikuluko egileek algoritmoak aurkeztu zituzten ondokoa adierazteko: erabilitako kolore kopurua gehienez 5 da, 1 irizpidea erabiltzerakoan; gehienez 8 da, 2 irizpidea erabiltzerakoan, luzera 2 baino txikiagoa edo berdina izanik; gehienez 12 da, 3 irizpidea erabiltzerakoan.

### 4.3. **Beste zertarako batzuk**

Nahiz eta gure lanean grafoen koloreztatzeen bi zertarako baino ez ditugun aurkeztu xehetasunez, beste zertarako ugari daude, eta adore eman nahi diogu irakurleari bere kabuz horiek iker ditzan. Adibidez, zertarakoak aurkitu dira, tokiko haririk gabeko maiztasunen banaketan [8], CPU memoriako erregistroetan bildumagailuek egokitzen dituzten balioen prozesuan [6], kriptografian [3], edo egun hurbilago dugun sudokuaren ebazpenetan [5].

**Eskerrak:** Eskertu nahi genioke Idoia Legarretari mapak eta horiei dagozkien grafoak margotzeko eskaini digun laguntzagatik.

## ERREFERENTZIAK

[1] FRITSCH R., FRITSCH G. 2000. *The four-color theorem. History, topological foundations, and idea of proof*. Springer.
[2] GAREY M.R., JOHNSON D.S., SO H.C. 1976. «An application of graph coloring to printed circuit testing». *IEEE transactions on circuits and systems*. V. 23 No.10.
[3] GOLDREICH O., MICALI S., WIGDERSON A. 1991. «Proofs that yield nothing but their validity or all languages in NP have zero-knowledge proof systems». *JACM*. V. 38 No. 3.
[4] HARRIS J., HIRST J.L., MOSSINGHOFF M. 2010. *Combinatorics and graph theory*. Springer.
[5] HERZBERG A.M., MURTY M.R. 2007. «Sudoku squares and chromatic polynomials». *Notices Amer. Math. Soc*. 54(6),708–717.
[6] HIRNSCHROTT U., KRALL A., SCHOLZ B. 2003. «Graph coloring vs. optimal register allocation for optimizing compilers». *Lecture notes in computer science*, V. 2789, 202–213.
[7] ORE O. 1967. *The four-color problem*. Academic press inc.
[8] RIIHIJÄRVI J., PETROVA M., MÄHÖNEN P. «Frequency allocation for WLANs using graph colouring techniques». *Proceedings of the second anual conference on wireless on-demand network systems and services(WONS'05)*.
[9] TRUDEAU R.J. 1994. *Introduction to graph theory*. Dover.
[10] WILSON R.A. 2002. *Graphs, colourings and the four-colour theorem*. Oxford science publications.