

Stern-en segidan oinarritutako \mathbb{Q}^+ zenbaki arrazional positiboen zenbait zenbakitze-sistema

(Enumeration systems of positive rationals (\mathbb{Q}^+) based on Stern's sequence)

Yosu Yurramendi Mendizabal*

Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala Saileko lankide, Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

LABURPENA: Zenbaki arrazional positiboen multzoa (\mathbb{Q}^+) zenbakarria da. Idazlan honetan azaltzen ditut argitaratu diren hainbat zenbakitze-sistema, eta horietako batzuk, ezagunenak, sailkatu egiten ditut. Sailkapen horren ondorioz bi zenbakitze-sistema berri definitzen ditut. Gainera, sistema horiek guztiek Stern-en segidaren bitartez defini daitezkeela erakusten dut.

HITZ GAKOAK: *Sternen segida*, \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistemak.

ABSTRACT: \mathbb{Q}^+ is countable. In this paper some well-known enumeration systems are presented and classified. This classification brings out two new enumeration systems. It is also showed that all these systems can be defined by means of the Stern's sequence.

KEYWORDS: Stern's sequence, enumeration systems of \mathbb{Q}^+ .

* **Harremanetan jartzeko / Corresponding author:** Yosu Yurramendi Mendizabal. Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala saila, Informatika Fakultatea, Euskal Herriko Unibertsitatea, Lardizabal pasealekua, 1, 20018 Donostia. – yosu.yurramendi@ehu.eus – <https://orcid.org/0000-0002-4399-600X>

Nola aipatu / How to cite: Yurramendi Mendizabal, Yosu (2023). «Stern-en segidan oinarritutako \mathbb{Q}^+ zenbaki arrazional positiboen zenbait zenbakitze-sistema». *Ekaia*, 43, 2023, 247-272. (<https://doi.org/10.1387/ekaia.22943>).

Jasotze-data: 2021, ekainak 25; Onartze-data: 2022, apirilak 19.

ISSN 0214-9001 - eISSN 2444-3255 / © 2023 UPV/EHU

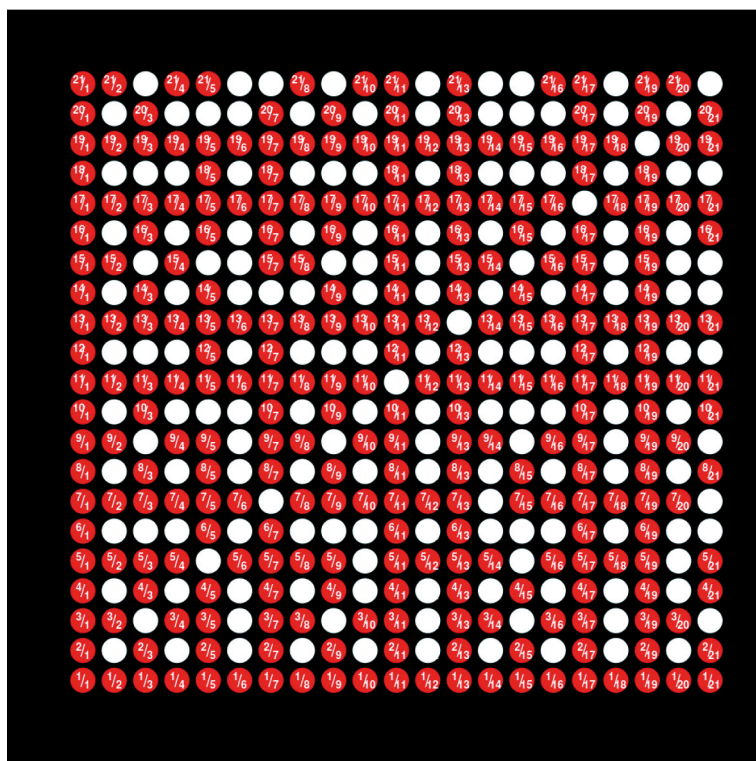


Lan hau Creative Commons Aitortu-EzKomertziala-LanEratorririkGabe 4.0 Nazioartekoa lizentzia baten mende dago

1. SARRERA

Zenbaki arrunten multzoari \mathbb{N} izena ematen zaio. Zenbaki arrazional positibo bat *elkar lehenak* diren bi zenbaki arrunten arrazoi, proportzio edo zatikia da. Elkar lehenak direla esaten da faktore komunik ez dutenean ([1]), hau da, zatitzaile komunetako handiena 1 denean ([2]). Zatikiaren bi zenbakiak elkar lehenak direla esatea da zatikia laburtezina dela esatea.

Zenbaki arrazional positiboaren multzoa izendatzeko \mathbb{Q}^+ erabiltzen da. Grafikoki, \mathbb{N}^2 -ren planoan adieraz daiteke \mathbb{Q}^+ (ikusi 1. irudia): puntu **gorriak** dira zenbaki arrazional positiboak.



1. irudia. \mathbb{Q}^+ -ren irudikapen grafiko bat.

Elkar lehenen proportzioa \mathbb{N}^2 -ren planoan % 60.92 dela ($6/\pi^2$) esan daiteke ([1]), berez arrazoia probabilitate-kalkuluan bilatu behar bada ere; zoriz aukeratutako bi zenbaki arrunt elkar lehenak izateko probabilitatea da.

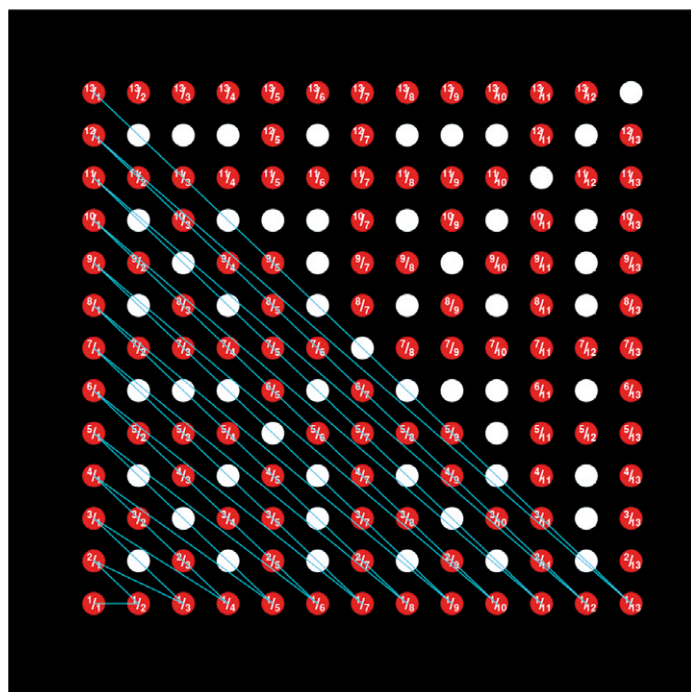
1. definizioa: \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema bat \mathbb{Q}^+ eta \mathbb{N} -ren arteko *bijekzio* bat da ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+, f^{-1}: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$).

Honen arabera zenbaki arrazional positibo bati zenbaki arrunt bakar bat dagokio, eta alderantziz. Bi multzoak infinituak direnez gero, bien arteko bijekzio bat definitzearen *algoritmo* edo prozedura bat behar da.

Zenbakitze-sistema bat 1. irudiko *puntu gorri guztietatik behin baka-rrik* pasatzen den *ibilbide* bat da.

Infinitu sistema dago \mathbb{Q}^+ zenbakarria dela azaltzeko, infinitu bijekzio, infinitu ibilbide alegia.

Ezagunena Cantor-ena da ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$). 1886ko ekainaren 18an Goldscheider-i idatzitako eskutitz batean argi eta garbi azaltzen dizkio zenbait multzo ondo ordenaturen adibideak, eta tartean aipatzen du zenbaki arrazional positiboentzako ordena bat ([3]), hain zuzen \mathbb{Q}^+ zenbakarria dela frogatzeko erabiltzen dena (ikusi 2. irudia). Sistema hau ez da, ordea, konputazionalki efizientea, \mathbb{N}^2 planoaren ibilbideko puntu bakoitzean erabaki behar baita bi zenbakiak elkar lehenak diren ala ez (hori egin gabe \mathbb{N}^2 -ren zenbakarritasuna frogatzen da).



Jakina, ez da zenbakitze-sistema bakarra ([4]), baina bai ulerterraza.

Aipatzekoa da *Sagher-en zenbakitze-sistema* ([5]), formula esplizitu batean mamitzen baitu \mathbb{Q}^+ eta \mathbb{N} -ren arteko bijekzio bat ($f^{-1}: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$). Bedi $a/b \in \mathbb{Q}^+$ eta hauexek beren deskonposaketak zenbaki lehenetan: $a = p_1^{r_1} \cdots p_f^{r_f}$ eta $b = q_1^{s_1} \cdots q_g^{s_g}$.

Sagher-en zenbakitze-sistema honela definitzen da:

$$f^{-1}(1) = 1 \quad \text{eta} \quad f^{-1}(a/b) = p_1^{2r_1} \cdots p_f^{2r_f} q_1^{2s_{1-1}} \cdots q_g^{2s_{g-1}}.$$

$$\text{Adibidez: } f^{-1}(25/14) = 5^{2 \cdot 2} \cdot 2^{2 \cdot 1-1} \cdot 7^{2 \cdot 1-1} = 8750.$$

Zenbaki arruntak biderkagai edo faktore lehenetan deskonposatzeak ordea (modu bakarra dago, aritmetikaren oinarritzko teoremaren arabera) arazo bat dakar zenbakiak handiak direnean, zenbaki arrunt handien faktORIZAZIOAK algoritmo konplexuak eskatzen baititu.

Bitxikeria bat aipatze aldera hortxe da *Kimberling-en zenbakitze-sistema*, Fibonacci-ren segidaren ordenan oinarritzen den sistema zatiki-segidak mailakatzeko ([6]).

Badira beste zenbait sistema ezagun interesgarri. Hurrengo atalean azalduko ditut, eta idazlan honen mamia osatuko dute. Izan ere, haien definizioak emango ditut era bateratuan, eta bi sailetan banatuko ditugu. Sailkapenaren arabera bi sistema berri proposatuko ditut, eta bi sailen arteko erlazio erakutsiko (2. atala). Guztiak daude oinarrituta *Sternen segidan*, eta haren bitartez guztiak defini daitezkeela ere azalduko dut (3. atala).

Azkeneko atalean (4.a) azaltzen ditut sistema berriak bilatzeko bide batzuk, baita sistemen inguruan sortzen diren zenbait ikergai ere.

Idazlan hau ahalbidetzeko ezinbestekoa izan da *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS, [7]). Hor segida bakoitzak izen bat du A*****, non * bat 0 eta 9 tarteko digitu bat den. Adibidez, A002487. Segida bakoitzak webgune bat du eta bertara joan daiteke: <http://oeis.org/A002487>. Horrela lan honetan azalduko diren zenbakitze-sistemen propietate asko aurki daitezke. Egilearen webgunea ([8]) gidari izan daiteke idazlan honen xehetasunak egiaztatzeko; besteak beste, aipatzen diren zenbaki-segida guztien programak *R* lengoian ([9]).

2. ZENBAIT ZENBAKITZE-SISTEMA EZAGUNEN DEFINIZIOAK ETA SAILKAPENA

Bada \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema bat Sterni zor zaiona ([10]), nahiz honek \mathbb{Q}^+ -en zenbakarritasunaren arazoa esplizituki ez azaldu. Berak zenbaki

arruntez osatutako $s(n)$ ($n > 0$) segida baten propietateak aztertzen ditu. Errekurtsiboki definitzen da ([10], [11]).

2.1 definizioa: *Sternen segida*, s ($s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} s(1) &= 1 \\ \forall n > 0, \\ s(2n) &= s(n) \\ s(2n+1) &= s(n) + s(n+1) \end{aligned}$$

Funtzio honi *fusc* funtzioa ere esaten zaio [12].

Hona hemen segidaren hasiera (OEIS-en $s \equiv A002487$ segida), gerora begira, erosotasunagatik, blokeka taldekatuta (2^m -ko blokeak, $m \geq 0$):

1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 ...

Blokeka adierazita ($\forall n > 0 \exists m \geq 0, \exists k \ 0 \leq k < 2^m, n \equiv 2^m + k$) honelakoxea da definizioa:

$$\begin{aligned} s(1) &= 1 \\ \forall m \geq 0, \forall k \ 0 \leq k < 2^m, \\ s(2^{m+1} + 2k) &= s(2^m + k) \\ s(2^{m+1} + 2k + 1) &= s(2^m + k) + s(2^m + k + 1) \end{aligned}$$

Ohartzekoa da $s(n)$ -ren hasierari erreparatuz gero, bloke bakoitzaren simetria ([11]):

2.1 proposizioa: $\forall m \geq 0, \forall k \ 0 \leq k < 2^m, s(2^{m+1} - k) = s(2^m + k)$.

Hain zuzen, 2^m -bloke bakoitzean ($m > 0$), 1-ekoa den lehenengo gaian izan ezik, 2 balioaren kokalekuarekiko simetria bat dago; areago, simetriak gai bat gehiago hartzen du bloke bateko eta hurrengo blokeko lehenengoak hartuta ($\forall m \geq 0 \ s(2^m) = 1$ baita). Beste propietate batzuk idazlan honetan aurki daitezke ([13]).

Sternen azterlanean ([10]) $s(n)/s(n+1)$ zatiki-segidaren zenbait propietate ere badago. Reznick-ek honela dio ([14]): «for every pair of positive relatively prime integers (a, b) , there is a unique n so that $s(n) = a$ and $s(n+1) = b$. Stern's discovery predates Cantor's proof of the countability of \mathbb{Q} by fifteen years».

Areago, Bantchev-ek dio ([15]) greziarren garaitik dela ezaguna $s(n)/s(n+1)$ sistema. Nonbait aipatu egiten dute I. mendearen bukaera inguruko Nikomako Gerasakoak eta Theon Smyrnakoak; azken honek dio Eratostenes Zirenekoak, k.a. III. mendekoak, ezaguna zuela, eta beraz, egilea k.a. IV. mendekoa izan zitekeela.

Atal honetan Stern-en segidan oinarritutako zortzi zenbakitze-sistema aurkeztuko ditut ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ motakoak denak), bi sailetan sailkatuta, *Sail-1* eta *Sail-2* izenekoak. Bi sailen arteko lotura ere azalduko dut. Bada idazlan bat zortzietatik sei sistema beste ikuspuntu batetik abiatuta modu berean sailkatzen dituen (16).

Sail-1 eta *Sail-2*-ko sistemak errekurtsiboki definitzen dira, 2^{m+1} -blokeko zatikiak 2^m -koetan oinarrituta.

2.1. *Sail-1*

Sail honetako sistemetan zatiki jakin bati dagokion kokapena hartzen da kontuan, bakoitia den ala bikoitia.

2.1.1 definizioa: *Calkin-Wilf-en zenbakitze-sistema*, f_{CW}

$$\begin{aligned} f_{CW}(1) &= 1/1 \\ \forall n > 0, \\ f_{CW}(2n) &= f_{CW}(n) / (f_{CW}(n) + 1) \\ f_{CW}(2n + 1) &= (f_{CW}(n) + 1) / 1 \end{aligned}$$

2.2 proposizioa: $\forall n > 0 \ f_{CW}(n) = s(n)/s(n+1)$.

Froga: Bedi $\forall n > 0 \ f(n) = s(n)/s(n+1)$.

$$f(2n) = s(2n)/s(2n+1) = s(n)/(s(n) + s(n+1)) = f(n) / (f(n) + 1)$$

$$f(2n+1) = s(2n+1)/s((2n+1)+1) = (s(n) + s(n+1))/s(n+1) = (f(n) + 1) / 1$$

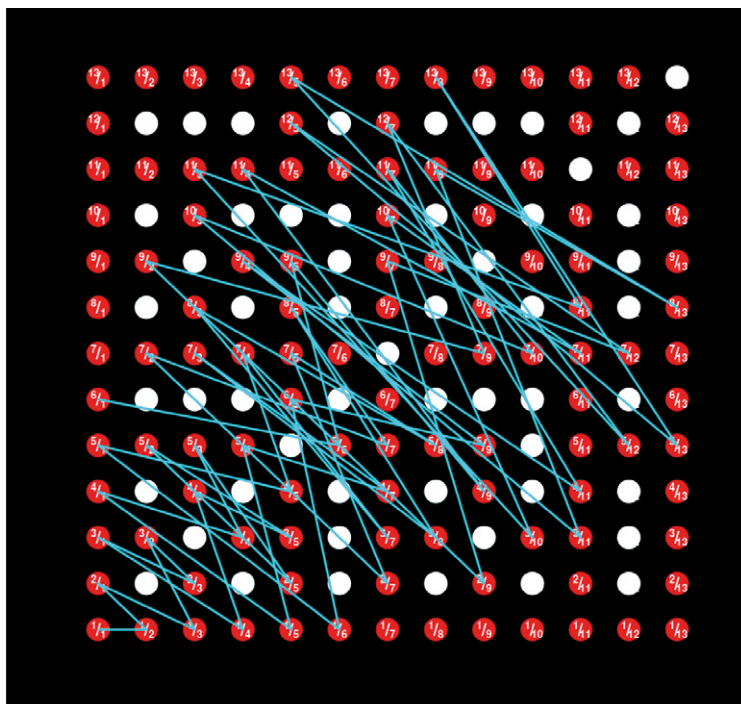
Hau da: $f = f_{CW}$. \square

Frogatu egiten da segida honek zenbaki arrazional positibo guztiak atzematen dituela, eta ez dela bat ere errepikatzen ([17], [18]).

Hau da segidaren hasiera (**zenbakitzailea**, **izendatzailea**):

1	12	1323	14352534	1547385727583745 ...
1	21	3231	43525341	5473857275837451 ...

3. irudian azaltzen da \mathbb{N}^2 planoan dagokion ibilbidea.



3. irudia. Calkin-Wilf zenbakitze-sistemaren irudikapen grafiko bat.

Esan beharra dago, gainera, badela beste errepikapen-formula berehala-koago bat sistema honen zatiki-segidaren gaiak ematen dituen (19):

$$f_{CW}(1) = 1, \forall n > 0, f_{CW}(n+1) = 1/(1 + 2 \cdot |f_{CW}(n)| - f_{CW}(n)),$$

|a| a zenbakiaren parte osoa izanik.

f_{CW} -k sortzen duen zatiki-segidari erreparatuz gero, 2^m -blokeka no-
labait simetrikoa dela antzematen da, bi kokaleku hauena hain zuzen:
 $n \equiv 2^m + k$, $n_* \equiv 2^{m+1} - 1 - k$ edo $n_* \equiv 2^m + (2^m - 1 - k)$, eta $0 \leq k < 2^m$ denez,
 $0 \leq (2^m - 1 - k) < 2^m$. Ohartzekoa da $n + n_* = 3 \cdot 2^m - 1$.

$$2.3 \text{ proposizioa: } \forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_{CW}(2^m + k) \cdot f_{CW}(2^{m+1} - 1 - k) = 1.$$

$$\text{Froga: } f_{CW}(2^m + k) \cdot f_{CW}(2^{m+1} - 1 - k) = (s(2^m + k)/s(2^m + k + 1)) \cdot (s(2^{m+1} - 1 - k)/s(2^{m+1} - k)) = (s(2^m + k)/s(2^m + (k + 1))) \cdot (s(2^{m+1} - (k + 1))/s(2^{m+1} - k)) = 1.$$

Propietate hau $s(n)$ -ren simetriaren ondorioa da (2.1. proposizioa). \square

2.1.2 definizioa: *Drib-en zenbakitze-sistema*, f_{DRIB}

$$\begin{aligned}
 f_{DRIB}(1) &= 1/1 \\
 \forall n > 0, \\
 f_{DRIB}(2n) &= 1 / (f_{DRIB}(n) + 1) \\
 f_{DRIB}(2n + 1) &= (f_{DRIB}(n) + 1) / f_{DRIB}(n)
 \end{aligned}$$

Sistema hau Hinze-k definitu zuen ([20]). Berez bi definitu zituen; bati *Bird-en zenbakitze-sistema* izena jarri zion bere irakasle Bird-en omenez, eta beste sistemari, haren nolabaiteko alderantzizkoa denari (aurrerago argituko dut zertan datzan alderantzizkotasun hori), *Drib-en zenbakitze-sistema*.

Hau da segidaren hasiera:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 12 & 2313 & 35143425 & 5827453747155738 \dots \\
 1 & 21 & 3132 & 52434153 & 8375517473547285 \dots
 \end{array}$$

f_{DRIB} -ek sortzen duen zatiki-segidak f_{CW} -ren 2.3 proposizioaren parekoa du:

2.4 proposizioa:

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m \quad f_{DRIB}(2^m + k) \cdot f_{DRIB}(2^{m+1} - 1 - k) = 1.$$

Froga: m -ren arabera indukzioz. Bedi $\forall m \geq 0$ $P(m)$ proposizioa:

$$\begin{aligned}
 \forall k \mid 0 \leq k < 2^m \quad f_{DRIB}(2^m + k) \cdot f_{DRIB}(2^{m+1} - 1 - k) &= 1. \\
 m = 0. P(0): f_{DRIB}(2^0 + 0) \cdot f_{DRIB}(2^{0+1} - 1 - 0) &= (1/1) \cdot (1/1) = 1. \\
 m = 1. P(1): f_{DRIB}(2^1 + 0) \cdot f_{DRIB}(2^{1+1} - 1 - 0) &= f_{DRIB}(2) \cdot f_{DRIB}(3) = (1/2) \cdot (2/1) = 1. \\
 f_{DRIB}(2^1 + 1) \cdot f_{DRIB}(2^{1+1} - 1 - 1) &= f_{DRIB}(3) \cdot f_{DRIB}(2) = 1.
 \end{aligned}$$

$P(m)$ egiazkotzat jota, $P(m + 1)$ egiazkoa dela frogatuko dut.

Bedi $(2^{m+1} + k)$ 2^{m+1} -blokeko kokaleku bikoiti bat ($0 \leq k < 2^{m+1}$, k bikoitia), beraz

$$\begin{aligned}
 \exists k' \mid 0 \leq k' < 2^m, k &= 2k'. \\
 f_{DRIB}(2^{m+1} + k) &= f_{DRIB}(2^{m+1} + 2k') = f_{DRIB}(2(2^m + k')) = 1 / (f_{DRIB}(2^m + k') + 1).
 \end{aligned}$$

k bikoitia bada, $(2^{m+2} - 1 - k)$ bakoitia da.

$$\begin{aligned}
 f_{DRIB}(2^{m+2} - 1 - k) &= f_{DRIB}(2(2^{m+1} - 1 - k') + 1) = (f_{DRIB}(2^{m+1} - 1 - k') + 1) / \\
 f_{DRIB}(2^{m+1} - 1 - k') + 1 &= 1 + (1 / f_{DRIB}(2^{m+1} - 1 - k')) = 1 + f_{DRIB}(2^{m+1} + k').
 \end{aligned}$$

Hau da: $f_{DRIB}(2^{m+1} - k) \cdot f_{DRIB}(2^{m+2} - 1 - k) = 1$.

$(2^{m+1} + k)$ bakoitia bada, $(2^{m+2} - 1 - k)$ bikoitia da, eta modu berean lortzen da berdintza 2.1.2 definizioa eta $P(m)$ -a erabiliz. \square

2.1.3 definizioa: *Yu-Ting-en zenbakitze-sistema*, f_{YT}

$$\begin{aligned} f_{YT}(1) &= 1/1 \\ \forall n > 0, \\ f_{YT}(2n) &= f_{YT}(n) / (f_{YT}(n) + 1) \\ f_{YT}(2n + 1) &= (f_{YT}(n) + 1) / f_{YT}(n) \end{aligned}$$

Frogatu egiten da segida honek \mathbb{Q}^+ -ko zatiki guztiak atzematen dituela, eta ez dela zatiki bat ere errepikatzen ([21]). Sistema berera iritsi zen Andreev ([22]) aurrekoaren idazlana ezagutu gabe, eta hainbatek bere izena gehitzen diote sistemaren izenari. Segidaren hasiera hauxe da:

1 12 1323 14342535 1545374727573858 ...
1 21 3132 414352535154737472758385 ...

2.5 proposizioa: $\forall n > 0, f_{YT}(2n) \cdot f_{YT}(2n + 1) = 1$.

Froga: Berehalakoa da definiziotik beretik. \square

Segida horretan kokaleku bikoitia dutenek ($f_{YT}(2n)$) *Kepler-en zuhaitza* izena duena osatzen dute ([23]).

Hiru sistemek $f_*(n)$ eta $(f_*(n) + 1)$ gaiak erakusten dituzte beren definizioetan (f_* izan daiteke f_{CW}, f_{DRIB} , ala f_{YT} , kasuan kasukoa). Hirurak 1. taulan antolatuz gero hutsune bat gertatzen da, zenbakitze-sistema berri bat iradokitzen duena, *Berria-1* :

1. taula. *Sail-1*-eko lau zenbakitze-sistemak

$f_*(1) = 1/1, \forall n > 0$	$f_*(2n) =$	$f_*(n)/(f_*(n) + 1)$	$1/(f_*(n) + 1)$
$f_*(2n + 1) =$	$(f_*(n) + 1)/1$	$(f_*(n) + 1)/f_*(n)$	
		<i>Calkin-Wilf</i> ($f_* \equiv f_{CW}$)	<i>Berria-1</i> ($f_* \equiv f_{B1}$)
		<i>Yu-Ting</i> ($f_* \equiv f_{YT}$)	<i>Drib</i> ($f_* \equiv f_{DRIB}$)

2.1.4 definizioa: *Berria-1 zenbakitze-sistema*, f_{B1}

$$\begin{aligned} f_{B1}(1) &= 1/1 \\ \forall n > 0, \\ f_{B1}(2n) &= 1 / (f_{B1}(n) + 1) \\ f_{B1}(2n + 1) &= (f_{B1}(n) + 1) / 1 \end{aligned}$$

Berria-I-en errepikapen-formula berri honek ondorengo segida eragiten du:

1 12 2313 35253414 5838572747374515 ...
1 21 3231 53524341 8583757274735451 ...

2.6 proposizioa: f_{B1} zenbakitze-sistema bat da.

Froga: $\forall n > 0 \exists m \geq 0, \exists k \ 0 \leq k < 2^m, n \equiv 2^m + k$

Bedi $\forall m \geq 0, \forall k \ 0 \leq k < 2^m \ f(2^m + k) = 1 / f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k)$.

f -ren definizio hau *Yu-Ting* eta *Berria-I* sistemen 2^m -blokekako zatiki-segidak behatzetik dator: bata bestearen atzekoz aurrerakoaren alderantzizkoa da.

Definizioaren arabera, f_{YT} zenbakitze-sistema bat denez, f ere sistema bat da.

Gainera, $f \equiv f_{B1}$:

$$f(1) = f(2^m + k) = 1 / f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k) = 1/1$$

$$\forall n > 0, (n \equiv 2^m + k, m \geq 0, 0 \leq k < 2^m)$$

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(2^{m+1} + 2k) = 1 / f_{YT}(2^{m+2} - 1 - 2k) = 1 / f_{YT}(2(2^{m+1} - 1 - k) + 1) = \\ &= 1 / ((f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k) + 1) / f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k)) = 1 / (1 + 1 / f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k)) = \\ &= 1 / (1 + f(2^m + k)) = 1 / (1 + f(n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2n+1) &= f(2^{m+1} + 2k + 1) = 1 / f_{YT}(2^{m+2} - 1 - (2k + 1)) = 1 / f_{YT}(2(2^{m+1} - 1 - k)) = \\ &= (f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k) + 1) / f_{YT}(2^{m+1} - 1 - k) = 1 + f(n) \end{aligned}$$

Horixe bada: $f \equiv f_{B1}$. \square

2.7 proposizioa: $\forall n > 0, f_{B1}(2n) \cdot f_{B1}(2n + 1) = 1$.

Froga: Berehalakoa da definiziotik beretik \square

Oharrarazi denez *Sail-I*-eko lau sistemek propietate hau betetzen dute:

2.8 proposizioa: $\forall n > 0, f_*(2n) < 1, f_*(2n + 1) > 1$.

Froga: Definizioetatik bertatik dira berehalakoak \square

Lau sistema hauek koordinatzeko beste modu bat $f_*(n)$ zatikia **zenbaki-tzaile** ($\equiv \mathbf{z}$) eta **izendatzaila** ($\equiv \mathbf{i}$) bitartez adierazten duena da:

$$\forall n > 0 \quad f_*(n) = \mathbf{z}_*(n) / \mathbf{i}_*(n) \quad f_*(n) + 1 = (\mathbf{z}_*(n) + \mathbf{i}_*(n)) / \mathbf{i}_*(n)$$

$f_*(2n)$ eta $f_*(2n + 1)$ gaien errepikapen-formulen definizioek forma hauek hartzen dituzte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Calkin-Wilf } (f_{CW}): & \begin{array}{l} f_{CW}(2n) = \mathbf{z}_{CW}(n) \quad / (\mathbf{z}_{CW}(n) + \mathbf{i}_{CW}(n)) \\ f_{CW}(2n+1) = (\mathbf{z}_{CW}(n) + \mathbf{i}_{CW}(n)) \quad / \mathbf{i}_{CW}(n) \end{array} \\
 \text{Drib } (f_{DRIB}): & \begin{array}{l} f_{DRIB}(2n) = \mathbf{i}_{DRIB}(n) \quad / (\mathbf{z}_{DRIB}(n) + \mathbf{i}_{DRIB}(n)) \\ f_{DRIB}(2n+1) = (\mathbf{z}_{DRIB}(n) + \mathbf{i}_{DRIB}(n)) \quad / \mathbf{z}_{DRIB}(n) \end{array} \\
 \text{Yu-Ting } (f_{YT}): & \begin{array}{l} f_{YT}(2n) = \mathbf{z}_{YT}(n) \quad / (\mathbf{z}_{YT}(n) + \mathbf{i}_{YT}(n)) \\ f_{YT}(2n+1) = (\mathbf{z}_{YT}(n) + \mathbf{i}_{YT}(n)) \quad / \mathbf{z}_{YT}(n) \end{array} \\
 \text{Berria-1 } (f_{B1}): & \begin{array}{l} f_{B1}(2n) = \mathbf{i}_{B1}(n) \quad / (\mathbf{z}_{B1}(n) + \mathbf{i}_{B1}(n)) \\ f_{B1}(2n+1) = (\mathbf{z}_{B1}(n) + \mathbf{i}_{B1}(n)) \quad / \mathbf{i}_{B1}(n) \end{array}
 \end{array}$$

$f_*(2n)$ -ren zenbakitzaileei eta $f_*(2n + 1)$ -ren izendatzaileei erreparatuz gero (beste bi gaiak $(\mathbf{z}_*(n) + \mathbf{i}_*(n))$ dira), lau konbinazioak agortzen dira: $(\mathbf{z}_{CW}, \mathbf{i}_{CW})$, $(\mathbf{i}_{DRIB}, \mathbf{z}_{DRIB})$, $(\mathbf{z}_{YT}, \mathbf{z}_{YT})$ eta $(\mathbf{i}_{B1}, \mathbf{i}_{B1})$.

Formulazio hauen bitartez bideo batean azaltzen dut ([24]) *Sail-1*-en zenbakitze-sistemen eraikitze-prozesua.

2.2. *Sail-2*

Sail honetako sistemetan zatiki jakin bati dagokion kokapena hartzen da kontuan, 2^{m+1} -blokearen lehenengo erdian $(2^{m+1} + k, 0 \leq k < 2^m)$ dagoen ala bigarreanean $(2^{m+1} + 2^m + k)$.

Concrete Mathematics liburuak ([25]), batez ere, \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistemak aztertzeko jakin-mina piztu zuen matematikarien komunitatean (adibidez, [18]); atal bat eskaintzen baitio *Stern-Brocot-en zenbakitze-sistema* esaten zaion beste zenbakitze-sistema bati. «Brocot» erlojugile baten deitura da, sistema berera iritsi zena Stern-enaren berririk jakin gabe ([26]).

2.2.1 definizioa: *Stern-Brocot-en zenbakitze-sistema*, f_{SB}

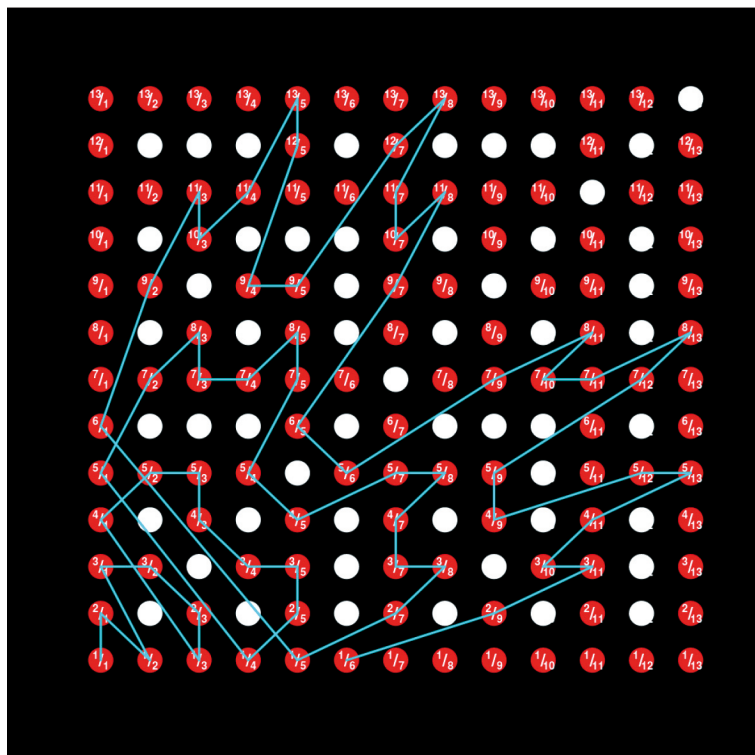
$$\begin{array}{l}
 f_{SB}(1) = 1/1 \\
 \forall m \geq 0, \forall k \ 0 \leq k < 2^m \ (n \equiv 2^m + k) \\
 f_{SB}(2^{m+1} + k) = f_{SB}(2^m + k) \quad / \ (f_{SB}(2^m + k) + 1) \\
 f_{SB}(2^{m+1} + 2^m + k) = (f_{SB}(2^m + k) + 1) \quad / \ 1
 \end{array}$$

Hauxe da segidaren hasiera:

1 12 1233 12334554 1233455457877875 ...
1 21 3321 45543321 5787787545543321 ...

Reznick-ek honela dio [14]: «Another enumeration of the positive rationals involves the Stern-Brocot array, which also predates Cantor».

4. irudian ikus daiteke sistema honi dagokion ibilbidea.



4. irudia. Stern-Brocot zenbakitze-sistemaren irudikapen grafiko bat.

Sistema hau Farey-ren segidarekin dago estuki lotuta ([27]). Fareyren segida erabiltzen da, adibidez, zenbaki arrazionalen bitartez zenbaki irrazionalen balioak hurbiltzeko.

Bada zenbakitze-sistema honen oso antzeko bat 2^m -bloke bikoitietako zatikiak (m bikoitia) alderantzikatzen dituen eta blokeen arteko Stern-Brocot-en ibilbidea grafikoki leuntzen duena ([28]).

2.9 proposizioa: $\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_{SB}(2^m+k) \cdot f_{SB}(2^{m+1}-1-k) = 1$.

Froga: Indukzioz m-ren arabera. Bedi $\forall m \geq 0$ $P(m)$ proposizioa:

$$\begin{aligned} \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_{SB}(2^m+k) \cdot f_{SB}(2^{m+1}-1-k) &= 1. \\ m=0. P(0): f_{SB}(2^0+0) \cdot f_{SB}(2^{0+1}-1-0) &= (\mathbf{1/1}) \cdot (\mathbf{1/1}) = 1. \\ m=1. P(1): f_{SB}(2^1+0) \cdot f_{SB}(2^{1+1}-1-0) &= f_{SB}(2) \cdot f_{SB}(3) = (\mathbf{1/2}) \cdot (\mathbf{2/1}) = 1. \\ f_{SB}(2^{1+1}) \cdot f_{SB}(2^{1+1}-1-1) &= f_{SB}(3) \cdot f_{SB}(2) = 1. \\ P(m) \text{ egiazkotzat jota, } P(m+1) \text{ egiazkoa dela frogatuko dut.} \end{aligned}$$

Bedi $(2^{m+1}+k)$ 2^{m+1} -blokeko lehen erdiko kokaleku bat ($0 \leq k < 2^m$).

$$\begin{aligned} f_{SB}(2^{m+1}+k) &= f_{SB}(2^m+k) / (f_{SB}(2^m+k) + 1) = 1 / (1 + 1/f_{SB}(2^m+k)) = \\ &= 1 / (1 + f_{SB}(2^{m+1}-1-k)). \\ (2^{m+2}-1-k) \text{ } 2^{m+1}\text{-blokeko bigarren erdiko kokaleku bat da } (0 \leq k < 2^m). \\ f_{SB}(2^{m+2}-1-k) &= f_{SB}(2^{m+1} + (2^{m+1}-1-k)) = f_{SB}(2^{m+1} + 2^m + (2^m-1-k)) = \\ &= f_{SB}(2^m + (2^m-1-k)) + 1 = f_{SB}(2^{m+1}-1-k) + 1. \end{aligned}$$

Hau da: $f_{SB}(2^m+k) \cdot f_{SB}(2^{m+1}-1-k) = 1$. \square

2.2.2 definizioa: *Bird-en zenbakitze-sistema*, f_{BIRD}

$$\begin{aligned} f_{BIRD}(1) &= 1/1 \\ \forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m (n \equiv 2^m+k) \\ f_{BIRD}(2^{m+1}+k) &= 1 / (f_{BIRD}(2^m+k) + 1) \\ f_{BIRD}(2^{m+1}+2^m+k) &= (f_{BIRD}(2^m+k) + 1) / f_{BIRD}(2^m+k) \end{aligned}$$

\mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema bat da ([20]). Hona hemen zatiki-segidaren hasiera:

1 12 2133 33125445 5445213387577578 ...
1 21 3312 54452133 8757757833125445 ...

2.10 proposizioa:

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_{BIRD}(2^m+k) \cdot f_{BIRD}(2^{m+1}-1-k) = 1.$$

Froga: m-ren araberako indukzioz. \square

2.2.3 definizioa: *HCS zenbakitze-sistema*, f_{HCS}

$$\begin{aligned} f_{HCS}(1) &= 1/1 \\ \forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m (n \equiv 2^m+k) \\ f_{HCS}(2^{m+1}+k) &= f_{HCS}(2^m+k) / (f_{HCS}(2^m+k) + 1) \\ f_{HCS}(2^{m+1}+2^m+k) &= (f_{HCS}(2^m+k) + 1) / f_{HCS}(2^m+k) \end{aligned}$$

«H»a Hanna-ri zor zaio ([29]), eta «CS» Czyz eta Self egileei, geroxeago iritsi ziren sistema berera bi horiek, beste bide batetik. \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema bat da ([30]). Zatiki-segidaren hasiera hau da:

1 12 1233 12334545 1233454557785778 ...
1 21 3312 45451233 5778577812334545 ...

2.11 proposizioa:

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_{HCS}(2^m + k) \cdot f_{HCS}(2^{m+1} + 2^m + k) = 1.$$

Froga: Berehalakoa da definiziotik beretik. \square

Hiru sistema hauek, 2^m -blokeka adierazita antzeko modura partekatzen dituzte $f_*(2^m + k)$ eta $(f_*(2^m + k) + 1)$ (f_* izan daiteke f_{SB} , f_{BIRD} , ala f_{HCS} , kasuan kasukoa). Hirurak 2. taulan antolatuz gero hutsune bat gertatzen da, eta beste zenbakitze-sistema bat iradokitzen dute, *Berria-2*.

2. taula. *Sail-2*-ko lau zenbakitze-sistemak

$$f_*(1) = 1/1, \forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m$$

$$f_*(2^{m+1} + k) =$$

$f_*(2^m + k) / (f_*(2^m + k) + 1)$	$1 / (f_*(2^m + k) + 1)$
$(f_*(2^m + k) + 1) / 1$	$f_*(2^m + k) / (f_*(2^m + k) + 1)$
$(f_*(2^m + k) + 1) / f_*(2^m + k)$	$f_*(2^m + k) / (f_*(2^m + k) + 1)$

Stern-Brocot ($f_* \equiv f_{SB}$) *Berria-2* ($f_* \equiv f_{B2}$)
HCS ($f_* \equiv f_{HCS}$) *Bird* ($f_* \equiv f_{BIRD}$)

2.2.4 definizioa: *Berria-2* zenbakitze-sistema, f_{B2}

$$f_{B2}(1) = 1/1$$

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m (n \equiv 2^m + k)$$

$$f_{B2}(2^{m+1} + k) = 1 / (f_{B2}(2^m + k) + 1)$$

$$f_{B2}(2^{m+1} + 2^m + k) = (f_{B2}(2^m + k) + 1) / 1$$

Berria-2 sistemaren errepikapen-formulak zatiki-segida hau eragiten du:

1 12 2133 33215454 5454332187758775 ...
1 21 3321 54543321 8775877554543321 ...

2.12 proposizioa: f_{B_2} zenbakitze-sistema bat da.

Froga: 2.6 proposizioaren frogaren antzekoa da. Izan ere, *HCS* eta *Berria-2* sistemen 2^m -blokekako zatiki-segiden artean atzekoz aurrerakoaren alderantzizko erlazioa ikus daiteke. \square

2.13 proposizioa:

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_{B_2}(2^m + k) \cdot f_{B_2}(2^{m+1} + 2^m + k) = 1.$$

Froga: Berehalakoa da definiziotik beretik. \square

Sail-2-ko lau sistemek propietate hau betetzen dute:

2.14 proposizioa:

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m f_*(2^{m+1} + k) < 1, f_*(2^{m+1} + 2^m + k) > 1.$$

Froga: Definizioetatik bertatik dira berehalakoak. \square

Sail-1-en bezala *Sail-2*-n bada lau sistemen artean bestelako koordinazioa $f_*(2^m + k)$ zatikia **zenbakitzaile** ($\equiv \mathbf{z}$) eta **izendatzaile**aren ($\equiv \mathbf{i}$) bitartez adierazten denean:

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m, f_*(2^m + k) = \mathbf{z}_*(2^m + k) / \mathbf{i}_*(2^m + k), \\ f_*(2^m + k) + 1 = (\mathbf{z}_*(2^m + k) + \mathbf{i}_*(2^m + k)) / \mathbf{i}_*(2^m + k)$$

$f_*(2^{m+1} + k)$ eta $f_*(2^{m+1} + 2^m + k)$ gaiek forma hauek hartzen dituzte:

$$\begin{aligned} \text{Stern-Brocot } (f_{SB}): \quad & f_{SB}(2^{m+1} + k) = \mathbf{z}_{SB}(2^m + k) / (\mathbf{z}_{SB}(2^m + k) + \mathbf{i}_{SB}(2^m + k)) \\ & f_{SB}(2^{m+1} + 2^m + k) = (\mathbf{z}_{SB}(2^m + k) + \mathbf{i}_{SB}(2^m + k)) / \mathbf{i}_{SB}(2^m + k) \\ \text{Bird } (f_{BIRD}): \quad & f_{BIRD}(2^{m+1} + k) = \mathbf{i}_{BIRD}(2^m + k) / (\mathbf{z}_{BIRD}(2^m + k) + \mathbf{i}_{BIRD}(2^m + k)) \\ & f_{BIRD}(2^{m+1} + 2^m + k) = (\mathbf{z}_{BIRD}(2^m + k) + \mathbf{i}_{BIRD}(2^m + k)) / \mathbf{z}_{BIRD}(2^m + k) \\ \text{HCS } (f_{HCS}): \quad & f_{HCS}(2^{m+1} + k) = \mathbf{z}_{HCS}(2^m + k) / (\mathbf{z}_{HCS}(2^m + k) + \mathbf{i}_{HCS}(2^m + k)) \\ & f_{HCS}(2^{m+1} + 2^m + k) = (\mathbf{z}_{HCS}(2^m + k) + \mathbf{i}_{HCS}(2^m + k)) / \mathbf{z}_{HCS}(2^m + k) \\ \text{Berria-2 } (f_{B_2}): \quad & f_{B_2}(2^{m+1} + k) = \mathbf{i}_{B_2}(2^m + k) / (\mathbf{z}_{B_2}(2^m + k) + \mathbf{i}_{B_2}(2^m + k)) \\ & f_{B_2}(2^{m+1} + 2^m + k) = (\mathbf{z}_{B_2}(2^m + k) + \mathbf{i}_{B_2}(2^m + k)) / \mathbf{i}_{B_2}(2^m + k) \end{aligned}$$

$f_*(2^{m+1} + k)$ -ren zenbakitzaileei eta $f_*(2^{m+1} + 2^m + k)$ -ren izendatzaileei erreparatuz gero, lau konbinazioak agortzen dira: $(\mathbf{z}_{SB}, \mathbf{i}_{SB})$, $(\mathbf{i}_{BIRD}, \mathbf{z}_{BIRD})$, $(\mathbf{z}_{HCS}, \mathbf{z}_{HCS})$ eta $(\mathbf{i}_{B_2}, \mathbf{i}_{B_2})$.

Bideo honetan ([31]) azaltzen dut zein den *Sail-2*-ko lau sistemek partekatzen duten ezaugarria.

2.3. *Sail-1* eta *Sail-2*-ren arteko lotura

Sail-1 eta *Sail-2*-ren artean badago lotura bat. 1. eta 2. taulak elkarren gainean jarritz gero, lau gelaxketako bakoitzari dagozkion bi zenbakitze-sistemak π *bit-reversal permutation* (bit-iraulizko permutazioa) izeneko \mathbb{N} -ren permutazio edo bijekzioaren bidez daude lotuta, OEIS-en A059893 du izena ([32]). Adibidez, *Calkin-Wilf sistema* (f_{CW}) π permutazioarekin konposatuz gero *Stern-Brocot sistema* (f_{SB}) lortzen da: $f_{CW} \circ \pi = f_{SB}$. Esate baterako, **4/3** zatikia *Calkin-Wilf sisteman* 9. gaia da ($f_{CW}(9) = \mathbf{4/3}$), eta *Stern-Brocot*-enean 12.a ($f_{SB}(12) = \mathbf{4/3}$):

$$\pi(9) = \pi(\underline{1001}_2) = \underline{1100}_2 = 12, \quad \pi(12) = 9.$$

Hona *bit-reversal* permutazioaren jokabidea: zenbaki baten adierazpen bitarraren lehenengo bita bere horretan utzita atzekoz aurrera jartzen ditu gainontzekoak.

Ondoren erakutsiko ditut π permutazioaren definizio zehatza eta propietate pare bat, beharrezkoak direnak $f_{CW} \circ \pi = f_{SB}$ frogatzeko.

2.3.1 definizioa: \mathbb{N} -ren π permutazioa

$$\pi(1) = 1$$

$$\forall j \ 0 \leq j < m \ a_j \in \{0, 1\}$$

$$\forall n > 0, n = 2^m + a_{m-1}2^{m-1} + a_{m-2}2^{m-2} + \dots + a_12^1 + a_02^0 \equiv 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j$$

$$\pi(n) = 2^m + a_02^{m-1} + a_12^{m-2} + \dots + a_{m-2}2^1 + a_{m-1}2^0 \equiv 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-1-j} 2^j$$

Edozein n -ren adierazpen bitarra alderantzikatzen du π -k, lehenengo bita izan ezik. Hauxe da π segidaren hasiera 2^m -blokeka adierazita:

1 2 3 4 6 5 7 8 12 10 14 9 13 11 15 16 24 20 28 18 26 22 30 17 25 21 29 19 27 23 31 ...

2.15 proposizioa:

$$\pi \circ \pi = \text{Id} \ (\text{Id}, \text{zenbaki arrunten segida: } \forall n > 0 \ \text{Id}(n) = n)$$

Froga: emaitza hau bistakoa da, adierazpen bitarraren bitak (lehenengo bita izan ezik) bi aldiz jarri behar baitira atzekoz aurrera. Ondorioz, lehenengo adierazpen bitarra bere horretan gelditzen da. \square

2.16 proposizioa: Errepikapen-formula hau betetzen du π permutazioak:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= 1 \\ \forall m \geq 0, \forall k \ 0 \leq k < 2^m, \\ \pi(2^{m+1} + k) &= 2 \cdot \pi(2^m + k) \\ \pi(2^{m+1} + 2^m + k) &= 2 \cdot \pi(2^m + k) + 1\end{aligned}$$

Froga: $\pi(1) = 1$. Bedi $m \geq 0, 0 \leq k < 2^m$

$$\begin{aligned}\pi(2^{m+1} + k) &= \pi\left(2^{m+1} + 0 \cdot 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j\right) = 2^{m+1} + \sum_{j=0}^{(m+1)-1} a_{(m+1)-1-j} 2^j = \\ &= 2^{m+1} + \sum_{j=1}^m a_{m-j} 2^j + 0 \cdot 2^0 = 2 \cdot \left(2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-1-j} 2^j\right) = \\ &= 2 \cdot \pi\left(2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j\right) = 2 \cdot \pi(2^m + k). \\ \pi(2^{m+1} + k) &= \pi\left(2^{m+1} + 1 \cdot 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j\right) = 2^{m+1} + \sum_{j=0}^{(m+1)-1} a_{(m+1)-1-j} 2^j = \\ &= 2^{m+1} + \sum_{j=1}^m a_{m-j} 2^j + 1 \cdot 2^0 = 2 \cdot \left(2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-1-j} 2^j\right) + 1 = \\ &= 2 \cdot \pi\left(2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j\right) + 1 = 2 \cdot \pi(2^m + k) + 1. \quad \square\end{aligned}$$

2.17 proposizioa:

$$\begin{array}{llll} f_{CW} \circ \pi & = & f_{SB} & \text{eta} \quad f_{SB} \circ \pi = f_{CW} \\ f_{DRIB} \circ \pi & = & f_{BIRD} & \text{eta} \quad f_{BIRD} \circ \pi = f_{DRIB} \\ f_{YT} \circ \pi & = & f_{HCS} & \text{eta} \quad f_{HCS} \circ \pi = f_{YT} \\ f_{B1} \circ \pi & = & f_{B2} & \text{eta} \quad f_{B2} \circ \pi = f_{B1} \end{array}$$

Froga: Adibidez, $f_{CW} \circ \pi = f_{SB}$. Bedi $m \geq 0, 0 \leq k < 2^m$

$$\begin{aligned}(f_{CW} \circ \pi)(2^{m+1} + k) &= f_{CW}(\pi(2^{m+1} + k)) = f_{CW}(2 \cdot \pi(2^m + k)) = \\ &= f(\pi(2^m + k)) / (f(\pi(2^m + k)) + 1) = (f_{CW} \circ \pi)(2^m + k) / ((f_{CW} \circ \pi)(2^m + k) + 1) \\ (f_{CW} \circ \pi)(2^{m+1} + 2^m + k) &= f_{CW}(\pi(2^{m+1} + 2^m + k)) = \\ &= f_{CW}(2 \cdot \pi(2^m + k) + 1) = f_{CW}(\pi(2^m + k)) + 1 = (f_{CW} \circ \pi)(2^m + k) + 1\end{aligned}$$

Beraz, $(f_{CW} \circ \pi)$ -ren bi zatiek bat egiten dute (f_{SB}) -ren 2.2.1 definizioarekin: $f_{CW} \circ \pi = f_{SB}$. \square

Alderantziz ere: $f_{SB} \circ \pi = f_{CW}$.

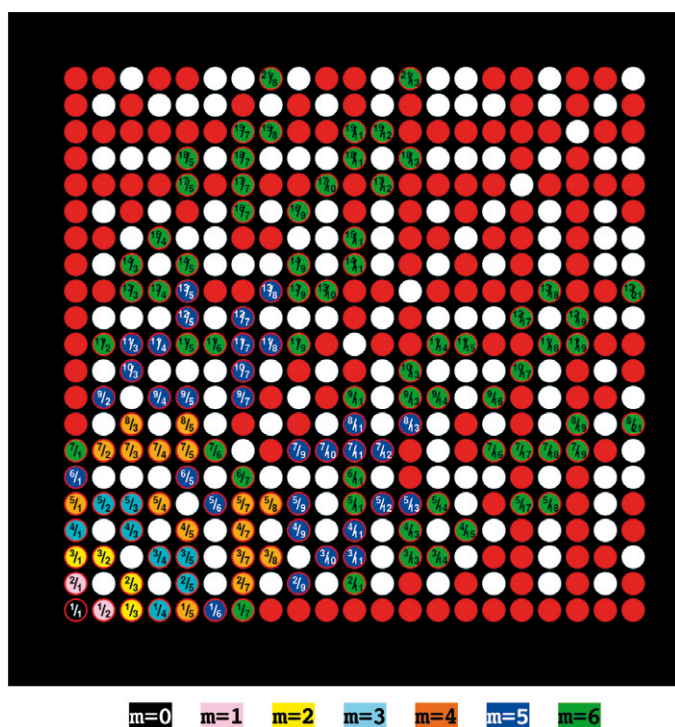
Froga: $f_{SB} \circ \pi = (f_{CW} \circ \pi) \circ \pi = f_{CW} \circ (\pi \circ \pi) = f_{CW}$. \square

Antzeko moduan froga daitezke gainontzeko berdintzak.

3. STERN-EN SEGIDA ETA ZENBAKITZE-SISTEMA EZAGUNAK

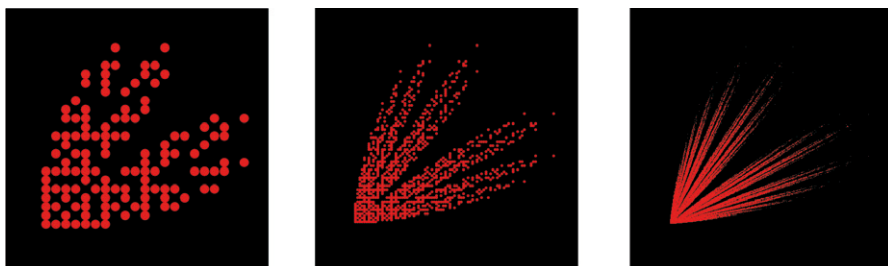
Aurkeztutako zortzi zenbakitze-sistemak 2^m -blokeka antolatuz gero, nabari da maila bereko zatiki berberak agertzen direla, nahiz ordena ezberdinean azaldu. Are gehiago, **zenbakitzaileak** (eta **izendatzaileak**) bloke bereko Stern-en segidak dira.

5. irudian erakusten ditut kolore ezberdinez lehendabiziko sei 2^m -blokeen zatikiak ($0 \leq m \leq 6$). \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema ezberdinen ibilbideak, blokeen arteko ordenari eutsiz, 2^m -blokeetan definitutako zatikien ordenen arabera erakitzen dira.



5. irudia. Stern-en segidan oinarritutako zenbakitze-sistemen blokeen kolorekako irudikapen grafiko bat.

m -ren handitzearekin batera, 2^m -blokeko zatikiak gehituz *Stern-Brocot-en kometa* izeneko irudikapena lortzen da (ikusi 6. irudia). Puntu **gorriak** zenbaki arrazional positiboei dagozkie.



6. irudia. *Stern-Brocot-en kometa m -ren handitasunaren arabera.*

Zortzi sistemen zatikiak 2^m -blokeka berberak direnez gero, sistema guztiak f bakar bat eta permutazio banaren bitartez adieraztea da helburua. Erreferentziazko f bat behar da, eta horren arabera σ egokiak bilatu.

3.1 proposizioa: \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema bat definitzen duen f funtzio bat \mathbb{N} -ren σ permutazio batekin konposatzen bada, $f \circ \sigma$, orduan \mathbb{Q}^+ -en beste zenbakitze-sistema bat lortzen da.

Froga: Berehalakoa da. \square

Erreferentziazko f_{CW} hartu dut, bere muinean Stern-en segida baitago; horrela, zortzi zenbakitze-sistemak f_{CW} eta σ permutazio jakin batzuen bitartez adieraz daitezke. f_{CW} zenbakitze-sistemaren gaiak 2^m -blokeka antolatuz gero, σ permutazioak bloke bakoitzeko gaiak permutatzen ditu, eta ondorioz beste zenbakitze-sistema bat definitzen da.

3.1 definizioa: Bedi σ \mathbb{N} -ren permutazio bat. σ 2^m -blokekako permutazio bat da, baldin

$$\forall m \geq 0, 2^m \leq n < 2^{m+1} \text{ bada, orduan } 2^m \leq \sigma(n) < 2^{m+1}.$$

Hau da, σ permutazioa 2^m luzera duten permutazio finituen pilaketa infinitu bat da.

3.2 proposizioa: σ 2^m -blokekako permutazio bat bada, $f_{CW} \circ \sigma$ sistema 2^m -blokeka dago antolatuta.

Froga: Berehalakoa da. \square

Hortaz, helburua da zortzi zenbakitze-sistemetako bakoitzari dagokion σ 2^m -blokekako permutazio bana zehaztea.

Bilaketa burututa hauek dira emaitzak (OEISeko izenaz adierazten dut permutazio bereizgarri bakoitza):

3.3 proposizioa:

$$\begin{aligned} f_{CW} &= f_{CW} \circ \in (\in \equiv A000027, \text{zenbaki arrunten segida}) \\ f_{DRIB} &= f_{CW} \circ A258996 \\ f_{YT} &= f_{CW} \circ A231551 \\ f_{B1} &= f_{CW} \circ A284459 \end{aligned}$$

3.4 proposizioa:

$$\begin{aligned} f_{SB} &= f_{CW} \circ \in \circ \pi \quad (\pi \equiv A059893, \text{bit-iraulizko permutazioa}) \\ f_{BIRD} &= f_{CW} \circ A258996 \circ \pi \\ f_{HCS} &= f_{CW} \circ A231551 \circ \pi \\ f_{B2} &= f_{CW} \circ A284459 \circ \pi \end{aligned}$$

3.5 proposizioa:

$$\begin{aligned} A258996 \circ A258996 &= \in \\ A258996 \circ A231551 &= A284459 \\ A258996 \circ A284459 &= A231551 \end{aligned}$$

Ondorioz, zortzi sistemak adierazteko nahikoak dira f_{CW} (azken finean, s), bi permutazio orokor, \in eta π , eta bi permutazio bereizgarri, adibidez, $A258996$ eta $A231551$.

Frogatuta dagoenez f_{CW} -k arrazional positibo guztiak behin bakarrik atzematen dituela ([13]), bide honetatik ere frogatuta geratzen da propietate hori dutela beste sistema horiek.

Nolanahi ere frogatu beharko da $A258996$ eta $A231551$ segidak \mathbb{N} -ren permutazioak direla, eta 3.3, 3.4 eta 3.5 proposizioak egiazkoak direla.

Ondoren frogatuko dut $A258996$ permutazio bat dela eta $f_{DRIB} = f_{CW} \circ A258996$ berdintza betetzen dela.

3.2 definizioa: A258996

$$A258996(1) = 1$$

$$\forall m > 0 \ \forall j \mid 0 \leq j < m \ a_j \in \{0, 1\}$$

$$b_j = a_j, j \text{ bikoitia baldin bada, eta}$$

$$b_j = 1 - a_j, j \text{ bakoitia baldin bada.}$$

$$\forall n > 0, n = 2^m + a_{m-1}2^{m-1} + a_{m-2}2^{m-2} + \dots + a_12^1 + a_02^0 \equiv 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j$$

$$A258996(n) = 2^m + b_{m-1}2^{m-1} + b_{m-2}2^{m-2} + \dots + b_12^1 + b_02^0 \equiv 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_j 2^j$$

A258996-k adierazpen bitarraren kokaleku bakoitietako bitak aldatzen ditu. Adibidez:

$$A258996(27) = A258996(1\underline{1}0\underline{1}1_2) = 1\underline{0}0\underline{0}1_2 = 17, A258996(17) = 27.$$

Segida infinitu hau honela hasten da (2^m -blokeka antolatuta, eta adibidea azpimarratuta):

1 2 3 6 7 4 5 10 11 8 9 14 15 12 13 26 27 24 25 30 31 28 29 18 19 16 17 22 23 20 21 ...

3.6 proposizioa: A258996 \mathbb{N} -ren permutazio bat da.

Froga: A258996-k binaka lotzen ditu zenbaki arruntak, lehenengoa izan ezik, adierazpen bitarraren kokaleku bakoitietan bit-aldaketa eginaz.

$\forall m > 0$, 2 luzerako 2^{m-1} orbita edo ziklo dago 2^m -bloke bakoitzean (adibidez, 2^3 -blokean, 2^2 orbita: (8,10), (9,11), (12,14), (13,15)).

3.7 proposizioa: $A258996 \circ A258996 = \text{Id}$ (A258996 inboluzio bat da).

Froga: Azpindize bakoitien a_j koefizienteak bere hasierakora itzultzen dira A258996 bi aldiz konposatuta: $(1 - (1 - a_j)) = a_j$, bikoitiak beren horretan gelditzen diren bitartean. \square

3.8 proposizioa: errepikapen-formula hau betetzen du A258996 permutazioak:

$$A258996(1) = 1$$

$$\forall m \geq 0, \forall k \mid 0 \leq k < 2^m,$$

$$A258996(2^{m+1} + 2k) = 2 \cdot A258996(2^{m+1} - 1 - k)$$

$$A258996(2^{m+1} + 2k + 1) = 2 \cdot A258996(2^{m+1} - 1 - k) + 1$$

Froga: $A258996(1) = 1$. Bedi $m \geq 0, 0 \leq k < 2^m$

$$\begin{aligned}
A258996(2) &= 2 \cdot A258996(1) = 2 \\
A258996(2^{m+1} + 2k) &= A258996\left(2^{m+1} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j\right) = \\
&= A258996\left(2^{m+1} + \sum_{j=1}^m a_{j-1} 2^j\right) = \\
&= A258996(2^{m+1} + a_{m-1} 2^m + a_{m-2} 2^{m-1} + \dots + a_0 2^1) = \\
&= 2^{m+1} + a'_{m-1} 2^m + a'_{m-2} 2^{m-1} + \dots + (1 - a_0) 2^1 = \\
&= (b_j = a_j \text{ j bakoitia bada; } b_j = 1 - a_j \text{ j bikoitia bada}) 2 \cdot \left(2^m + \sum_{j=1}^{m-1} b_j 2^j\right) = \\
&= 2 \cdot A258996(2^m + \sum_{j=1}^{m-1} c_j 2^j) = (c_j = b_j \text{ j bikoitia bada, } c_j = 1 - b_j \text{ j bakoitia} \\
&\text{ bada}) = 2 \cdot A258996\left(2^m + \sum_{j=0}^{m-1} (1 - a_j) 2^j\right) = 2 \cdot A258996(2^{m+1} - 1 - k).
\end{aligned}$$

Indizeek berdintza hau betetzen baitute:

$$2^{m+1} - 1 - k = (2^{m+1} - 1) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j = \sum_{j=0}^m 2^j - \sum_{j=0}^{m-1} a_j 2^j = 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} (1 - a_j) 2^j$$

Antzeko moduan froga daiteke $A258996(2^{m+1} + 2k + 1)$ -rena. \square

3.9 proposizioa: $f_{DRIB} = f_{CW} \circ A258996$ (eta $f_{CW} = f_{DRIB} \circ A258996$)

Froga: $A258996(1) = 1$. Bedi $m \geq 0, 0 \leq k < 2^m$

$$\begin{aligned}
(f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} + 2k) &= f_{CW}(A258996(2^{m+1} + 2k)) = \\
&= f_{CW}(2 \cdot A258996(2^{m+1} - 1 - k)) = f_{CW}(A258996(2^{m+1} - 1 - k)) / \\
&\quad (f_{CW}(A258996(2^{m+1} - 1 - k)) + 1) = \\
&= 1 / (1 + 1/(f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} - 1 - k))) \\
(f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} + 2k + 1) &= f_{CW}(A258996(2^{m+1} + 2k + 1)) = \\
&= f_{CW}(2 \cdot A258996(2^{m+1} - 1 - k) + 1) = (f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} - 1 - k) + 1 = \\
&= (f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} - 1 - k) + 1 = 1 + 1/((f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} - 1 - k))
\end{aligned}$$

Zatiki bat da $1/(f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} - 1 - k)$, beste baten alderantzizkoa.

Kontuan hartuz 2.1.2 definizioa, ikusten da $(f_{CW} \circ A258996)$ sistema f_{DRIB} bera dela, $1/(f_{CW} \circ A258996)(2^{m+1} - 1 - k)$ eta $f_{DRIB}(2^m + k)$ zatikiak berdintzat hartuta.

Beraz, $f_{CW} \circ A258996 = f_{DRIB}$.

Bestalde, $f_{DRIB} \circ A258996 = f_{CW}$, inoluzio bat baita A258996 (3.7 proposizioa). \square

3.10 proposizioa: $f_{BIRD} = f_{CW} \circ A258996 \circ \pi$

Froga: 2.17 proposizioaren arabera $f_{BIRD} = f_{DRIB} \circ \pi$. \square

4. ONDORIOAK ETA IKERTZEKO BIDEAK

\mathbb{Q}^+ -en sei zenbakitze-sistema ezagun aurkeztu eta gero, errepikapen-formula antzekoetara ekarri dira. Formulazioaren testuinguruan bi sistema berri definitu izan dira. Horrela bi sail osatu dira, sail bakoitza lau sistemaz osatuta: hiru sistema ezagun eta sistema berri bat.

Bi sailak lotuta daude permutazio baten bitartez: π , bit-iraulizko permutazioa.

Bi saileko zenbakitze-sistema guztiak Stern-en segida muinean duen f_{CW} sistemaren eta \mathbb{N} -ren 2^m -blokeko permutazio bereizgarri baten bitartez adieraz daitezke.

Stern-en segidan oinarritutako \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistemen multzoa ez da agortzen zortzi sistema horiekin. Alde batera utzita alderantzizko zatikiekin (**izendatzaile** / **zenbakitzaile**) osatzen diren zortzi sistema baliokideak, badira hainbat sistema.

Zortzi sistemen hasierak (2^0 - eta 2^1 -blokeak) berberak dira (modu be-rean ordenatuta: **1/1** – **1/2** – **2/1**). Beren arteko aldeak 2^2 -blokean hasten dira, eta lau zatikien (**1/3**, **2/3**, **3/2**, **3/1**}, ikus 5. irudia) ordenan dautza. Guztira 24 permutazio dira, baina zatiki bakoitzaren alderantzizkoa bertakoa denez, 12 dira. Aurkeztutakoak horietako 8 dira; 4 falta dira beraz. (ikusi 3. taula).

($m = 2$)-ri dagozkion lau gelaxka horiek (?, izenik ez dute) sistema berriak iradokitzen dituzte.

Lau gelaxka horietatik goi-ezkerrekoari erreparatuta, hauxe izan daiteke \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema baten hasiera bat:

1	12	1332	13454532	1345587758774532...
1	21	3213	45321345	5877453213455877...

Are gehiago, *Sail-1* eta *Sail-2*-en barruan erabili diren eraldaketak lau sistema definitzeko (**z_*-i_*** , **i_*-z_*** , **z_*-z_*** eta **i_*-i_*** konbinazioak), zenbakitze-sistema honi aplikatuz gero, sail berri bat osatzen da, *Sail-3*. Bideo hone-tan ([32]) agertzen ditut ustez sail horri dagozkion lau zenbakitze-sistemak. *Sail-3*-ren eraikitze-ezaugarria (grafikoki) *Sail-1* eta *Sail-2*-en ezaugarrien

erdibideko bat da, nolabait esateko. Interesgarria iruditzen zait halako sistema-sail baten propietateak ikertzea.

\mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistemak direla frogatzeko nahikoa izango litzateke f_{CW} -rekiko 2^m -blokekako permutazio bana aurkitzea. Sistemak balira, beren bit-irauliak (π) ere sistemak izango lirateke, eta beren hasierak (2^m -blokeak, $m \leq 2$) *Sail-3*-ko sistema baten hasierakoak; azken finean beste sistema-sail bat.

3. taula. \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistemak, $m = 2$ blokearen konbinazio posibleen arabera.

	1323	2313	1233	2133	1332	2331
3231	1323 3231 <i>Calkin-Wilf</i>	2313 3231 <i>Berria-1</i>				
	1323 3132 <i>Yu-Ting</i>	2313 3132 <i>Drib</i>				
3321			1233 3321 <i>Stern-Brocot</i>	2133 3321 <i>Berria-2</i>		
3312			1233 3312 <i>HCS</i>	2133 3312 <i>Bird</i>		
3213					1332 3213 ?	2331 3213 ?
3123					1332 3123 ?	2331 3123 ?

Beste bide bat izan liteke sistema berriak eraikitzeke definitutako 2^m -bloke berberak dituen ($m \leq 2$), baina 2^3 -blokeko zatikiak ordena ezberdinak dituen sistemak aztertzea. Esaterako, $f_{CW} \circ A122155$ sistemak *Sail-1*-eko f_{YT} -ren hasiera bera du ($m \leq 2$), $f_{CW} \circ A122155 \circ \pi$ *Sail-2*-ko f_{HCS} -ren hasiera, eta $f_{CW} \circ A006068$ *Sail-3*-ko goi-ezkerrekoaren (3. taula) hasiera ($m \leq 2$). Pluraltasun hauek aztertzea ere interesgarria iruditzen zait.

Ikertzeko beste bide bat hurrengo izango litzateke. \mathbb{Q}^+ -en zenbakitze-sistema bakoitzean, \mathbb{Q}^+ eta \mathbb{N} -ren arteko bijekzio bat izatea baino urrunago doa bijekzioaren beraren izaera zehazten duen prozedura edo algoritmoa. Hau da:

- Zatiki laburtezin bat emanez gero, argitu zein den bere kokalekua.
- Kokaleku bat emanez gero, argitu zein den dagokion zatiki laburtezina.

Sistema bakoitzerako algoritmo bat baino gehiago izan daitekeenez, erronka bat izan daiteke ahalik eta azkarrena bilatzea. Algoritmo azkarrak aurki daitezke zortzi zenbakitze-sistemak adierazteko nahikoak diren s , \in , π , A258996, eta A231551 segiden OEIS-eko webguneetan, eta idazlan honen egilearenean ([8]). Beste idazlan baterako utzi dut gai interesgarri hau.

BIBLIOGRAFIA

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Coprime_integers, 2022.
- [2] https://eu.wikipedia.org/wiki/Euklidesen_algoritmo, 2022.
- [3] MESCHKOWSKI H. 1967. «Probleme des Unendlichen,» Springer Fachmedien Wiesbaden, p. 26. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-663-02977-9_3.
- [4] BRADLEY D. M. 2005. *Counting the Positive Rationals: A Brief Survey*. <https://arxiv.org/abs/math/0509025>.
- [5] SAGHER Y. 1989. «Counting rationals,» *The American Mathematical Monthly*, **96**:9, 823. <http://www.jstor.org/stable/2324846>.
- [6] KIMBERLING C. 2013. <http://oeis.org/A226080> <http://oeis.org/A226081>.
- [7] SLOANE N. J. A. (editor) 2022. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)* (founded in 1964). <http://oeis.org>.
- [8] YURRAMENDI Y. 2022. https://oeis.org/wiki/User:Yosu_Yurramendi/Q%2B.
- [9] R Core Team 2022. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.
- [10] STERN M. A. 1858. «Über eine zahlentheoretische Funktion,» *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **55**, 193-220. <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/crll.1858.55.193/html>. <https://oeis.org/A002487>, 2021.
- [11] NORTHSHIELD S. 2010. «Stern's Diatomic Sequence 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4,...» *The American Mathematical Monthly* **117** (7), 581-598. <https://www.jstor.org/stable/10.4169/000298910x496714>.
- [12] DIJKSTRA E.W. 1982. *Selected Writings on Computing*, Springer, p. 232.
- [13] YURRAMENDI, Y. 2019. «Stern-en segidaren propietate berri bat eta segidaren n. gaia azkar kalkulatzeko algoritmo bat,» *Ekaia*, 35, 325-339, <https://doi.org/10.1387/ekaia>.
- [14] REZNICK B. 2008. «Regularity Properties of the Stern Enumeration of the Rational,» *Journal of Integer Sequences*, **Vol. 11**, 08.4.1. <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL11/Reznick/reznick4.html>.
- [15] BANTCHEV B. B. 2012. «Fraction Space Revisited,» *Mathematics and Education in Mathematics*, Proc. 41th Spring Conf. of the Union of Bulgarian Mathematicians, April 2012, 209-218. <http://arxiv.org/abs/1507.03952v1>.
- [16] RYDE K. 2020. *Trees of Rationals, Draft 7*. <https://download.tuxfamily.org/user42/rationals/rationals.pdf>.

- [17] CALKIN N. eta WILF H. 2000. «Recounting the Rationals,» *American Mathematical Monthly*, **volume 107**, number 4, April 2000, 360-363. <https://www.math.upenn.edu/~wilf/website/recounting.pdf>.
- [18] AIGNER M., ZIEGLER G.M. 2010, corrected printing 2013. «Proofs from The Book», Fourth Edition, Chapter 17, pp. 103-107, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [19] NEWMAN M. 2003. Reported by KNUTH D, E. *et al.* «Recounting the Rationals,» 42, Continued: 10906» *The American Mathematical Monthly*, **vol. 110**, no. 7, pp. 642-643. <https://www.jstor.org/stable/3647762>.
- [20] HINZE R. 2009. «Functional Pearls: The Bird tree,» *Journal of Functional Programming*, **volume 19**, issue 5, pp. 491-508. <http://www.cs.ox.ac.uk/ralf.hinze/publications/Bird.pdf>.
- [21] YU-TING S. 1980. «A Natural Enumeration of Non-Negative Rational Numbers – An Informal Discussion,» *American Mathematical Monthly*, **volume 87**, number 1, pp. 25-29. <http://www.jstor.org/stable/2320374>.
- [22] ANDREEV D. N. 1997. «On a Wonderful Numbering of Positive Rational Numbers,» *Matematicheskoe Prosveshchenie*, **Ser. 3**, 1, MCCME, Moscow, 126-134. <http://mi.mathnet.ru/mp12>.
- [23] KEPLER J. 1619. An excerpt from chapter II of the Book III of *The Harmony of the World* (an English translation of *Harmonices Mundi*, latin original published at Linz, 1619) translated with an Introduction and Notes by E.J. Aiton, A.M. Duncan, and J.V. Field, published by *American Philosophical Society*; April 1997 (Memoirs of the American Philosophical Society, **Vol 209**), p. 163. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_Tree-original.jpg.
- [24] *Sail-1*. 2021. Bideoa: <https://www.youtube.com/watch?v=hqmqYIMpNWY>.
- [25] GRAHAM R. L., KNUTH D. E., PATASHNIK O. 1994. *Concrete Mathematics, Second Edition*, Addison-Wesley, Boston, pp. 116-123, 305-30. <http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/gkp.html>. https://en.wikipedia.org/wiki/Concrete_Mathematics.
- [26] BROCAT A. 1861. «Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode,» *Revue chronométrique* **3**. *Journal des horlogers, scientifique et pratique* **3**:186-194. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1661912>.
- [27] https://en.wikipedia.org/wiki/Farey_sequence, 2022.
- [28] SEROV I.V. 2017. http://oeis.org/A287732/a287732_1.png.
- [29] HANNA P. 2002. <http://oeis.org/A071766>, <http://oeis.org/A071585>, <http://oeis.org/A229742>.
- [30] CZYZ J., SELF W. 2003. «The Rationals Are Countable—Euclid’s Proof,» *The College Mathematics Journal*, **34:5**, 367-369, DOI: 10.1080/07468342.2003.11922032).
- [31] *Sail-2*. 2021. Bideoa: <https://www.youtube.com/watch?v=Qa8FKhJKsH0>.
- [32] *Bit-reversal permutation*. 2022: <https://oeis.org/A059893>. https://en.wikipedia.org/wiki/Bit-reversal_permutation.
- [33] *Sail-3*. Bideoa: <https://www.youtube.com/watch?v=8DpwL95GFck>.