

Bi oszilagailu harmonikodun eredu minimalista baten bidezko bero-errekifikazioa

(Heat rectification with a minimal model of two harmonic oscillators)

Aitor Alaña*, J. Gonzalo Muga, Marisa Pons

Fisika departamentua, Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU-Leioa)

LABURPENA: Bero-errekifikazioa aztertzen dugu harrapatutako bi atomo ezberdinez osatutako modelo minimalista baten bidez. Atomoek indar linealak jasaten dituzte laserren bidez sorturiko Langevin bai- nu efektiboekin kontaktuan, Doppler efektuaren bidez sortuak. Egoera egonkorreko korronteen adierazpen analitikoak lortzen ditugu. Sistema lineal honetan bero-korrante asimetrikoa lortzen da bainuen temperatura eta bainuek sistemarekiko duten akoplamendua aldi berean trukatzan badira. Modelo honen parametro- espazioa ere aztertzen dugu bero-korrante asimetria maximizatzeke.

HITZ GAKOAK: bero-errekifikazioa, teknologia kuantikoak, ioi kateak.

ABSTRACT: *We study heat rectification using a minimalistic model of two different atoms trapped in harmonic potentials, where the atoms are subjected to effective Langevin baths created by the Doppler cooling, while they interact by linear forces. We obtain analytical expressions for the steady state. If the exchange of baths is done changing temperature and friction coefficients at the same time an asymmetry of heat current is found. We also search for the highest asymmetry in the parameter space of the system.*

KEYWORDS: *heat rectification, quantum technologies, ion chains.*

* **Harremanetan jartzeko / Corresponding author:** Aitor Alaña. UPV/EHU, FCT-ZTF (Leioa, Bizkaia). – aitor.alana@ehu.eus – <https://orcid.org/0000-0002-4477-6607>

Nola aipatu / How to cite: Alaña, Aitor; Muga, J. Gonzalo; Pons, Marisa (2023). «Bi oszilagailu harmonikodun eredu minimalista baten bidezko bero-errekifikazioa». *Ekaia*, 43, 2023, 67-84. (<https://doi.org/10.1387/ekaia.23250>).

Jasotze-data: 2021, abenduak 8; Onartze-data: 2022, martxoak 11.

ISSN 0214-9001 - eISSN 2444-3255 / © 2023 UPV/EHU



Lan hau Creative Commons Aitortu-EzKomertziala-LanEratorririkGabe 4.0 Nazioartekoa lizentzia baten mende dago

1. SARRERA

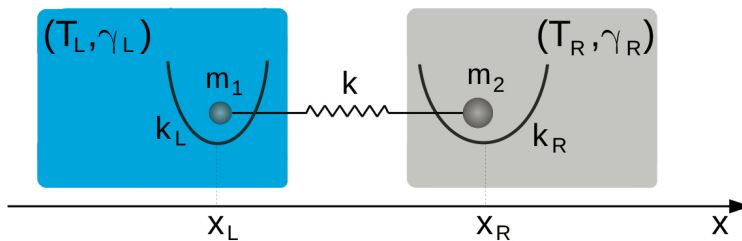
Diodoetan korronte elektrikoak jasaten duen fenomenoaren parekidea da bero-errektifikazioa, non bero errektifikazioa inguru batean (diodo termiko edo errektifikatzailea) zehar doan bero- korrontea bainu termikoen trukaketarekiko simetrikoa ez izatean datzan. 1936an Starr izan zen fenomeno hau lehen aldiz behatu zuena, kobre eta kobre-oxido arteko lotura puntuan [1]. Lan teorikoak askoz geroago hasi ziren, errektifikagailu legez segmentu ezberdinetako modelo ez harmoniko sinpleak erabiliz [2, 3]. Lan teoriko horiek gaur egun dirauen ikerketa arloa piztu zuten. Ikerketa eremu honek oso dinamikoa izaten jarraitzen du, oinarrizko zientzian eta teknologian izan ditzakeen aplikazioek bultzatuta. Beste proposamenen artean xede praktikoetarako behar bezain efizientea ez izatea da, hau da, alde baterantz eroale ona izatea eta besterantz isolatzailea. Ikerketak tratamendu ezberdinak behar dituzten azpieremu eta sistemetan banatu dira (adibidez kuantikoa edo klasikoa [4], eta gailu makroskopiko, mesoskopiko edo mikroskopikoa). Izan diren garapen eta emaitzen azalpen osoa lan honen esparrutik kanpo dago, eremuaren ikuspegi zabala berrikusketa batzuetan aurkitu daiteke [4-7]. Laburki baino ez ditugu aipatuko nano-estrukturatan [6, 7], gailu makroskopikoetan [5] edo denboraren menpekotasunez gidatutako sistemetan [6, 8] izan diren aurrerapauso garrantzitsuak. Izan ere, sarreran artikulua honetan kontaktzen den lanari estuago loturiko aspektuetan zentratuko gara, lana testuinguruan jarritz eta motibatuz. Izaera ez harmonikoa, hots, indar ez-linealak izatea maiz jo da errektifikazioa lortzeko beharrezko baldintzatzat [6, 9-15]. Pereirak, ordea, harmonikotasun eza errektifikazioa izateko beharrezkoa ez dela frogatu zuen [16]. Modelo harmoniko sinpleetan (minimalistetan) ere errektifikazioa izan daiteke, estrukturan asimetria eta parametroetan tenperaturarekiko dependentsia dagoen bitartean. Tenperaturarekiko menpekotasun hau oinarrizkoagoa den sistema ez-harmoniko baten dinamika estokastikoen lineari- zazioetik [4, 16] edo beste iturri batzuetatik [17] etor daiteke. Orokorrean modelo minimalistek, harmonikoak edo ez, sistemen jokaeraren ulermena errazten dute, etorkizuneko ikerketak gidatuz errektifikagailu erabilgarri bat lortzeko bidean.

Errektifikazio handiak lortzea helburu izanik, pixkanaka aldatzen diren materialak [18] eta irismen luzeko elkarrekintzak (LRI ingelesezko akronimoetan) aurkeztu izan dira [19, 20]. Orain dela gutxi ikusi zen LRI naturalki agertzen direla Paul tranpetako ioi hotzen kateetan, Coulomb elkarrekintza dela eta [17]; beraz sistema honek modelo sinpleen eta esperimentuen arteko zubitatz egiten lagundu lezake. [17] erreferentzian pixkanakako aldaketak sartu ziren sisteman banakako tranpen potentziak aldatuz. Gainera, limite linearra (potentziala harmonikotzat jotzen den limitea) ioi harrapatuentzat errealista da, errektifikazioa ioien eta Doppler hozketa bidez simulaturiko bainu efektiboen arteko akoplamentuaren tenperaturarekiko menpekotasunak dakarrelarik. Ioi harrapatuek baliabide ongi garatu

eta probatua osatzen dute oinarritzko ikerketarako, informazio kuantikoa prozesatzeko eta detektagailuak edo metrologia bezalako teknologia kuantikoetarako. Baliabide hau, teorian, eskalakorra da, ikusi adibidez [21]. Kasu honetan bero errektifikazioa abantaila erabilgarri bat litzake energia-kudeaketan.

Artikulu honetan, ioi harrapatuen eremu barruan, errektifikaziorako eredu simple eta minimalista bat proposatzen dugu, harrapatutako masa ezberdineko bi partikulaz osatua. Partikulek, bakoitza bainu termiko batekin kontaktuan, harmonikoki elkarri eragiten diote, eta baita euren tranpekin. LRI-ak ez du jokorik sistema honetan, baina kate luzeagoak diren kasuetan kontsideratu beharko litzake. Modelo hau esperimentalki burutu daiteke Doppler hozketaren menpean harrapatutako bi ioi jarritz, hozketak parametroen tenperatura menpekotasun nahikoa dakarrelarik. Burutze esperimentalez gain, problemari eginiko tratamendu analitikoa interes altukoa da, errektifikazio maximoaren bila parametro-espazioaren ikerketa nabarmen errazten baitu. Hau da, egoera egonkorraren soluzio esplizituak jokoan dagoen fisikaren ulermenerako tresnak dira, sistemarekiko kontrola hobetuz.

Proposatzen dugun modeloa beste batzuekin konpara daiteke. Espazio txiki batean «defektu», «ezpurutasun» edo molekula asimetriko baten bidez asimetria lokalizatzea eredu harmoniko ezberdinetarako proposatu da [13, 22, 23]. Gure proposamenarekin antzekotasun batzuk dituzten modelo batzuk Segal eta Nitzanek proposatu zituzten [12, 13], bainuekiko akoplamendu ezberdindun kate ez-harmonikoa. Modelo kuantikoetan ere lan egin zuten [12, 13], bainuekiko asimetrikoen akoplaturiko N -mailako sistemak baliatuz. Bi eratako modeloek limite harmonikoak dituzte, katean potentzialak harmoniko eginez eta modelo kuantikoan $N \rightarrow \infty$ eginez (mailen artean alde berdina dagoela emanez) lortzen dena. Eredu hauetan akoplamendu asimetrikoak, ordea, ez dira aldatzen tenperaturarekin batera, horrek errektifikazio nulua ekarriko bailuke, aldaketa ostean hasierako konfigurazio bera alderantziz izango genukeelako.



1. irudia. 2 sekzioan deskribaturiko ereduaren diagrama. Bi masa k konstantedun elkarrekintza harmoniko bidez lotuak daude. Masa bakoitza tranpa harmoniko bidez harrapatuta dago, T_i tenperatura eta γ_i marruskadura konstantearen bidez karakterizaturik.

Artikulu hau honela antolatzen da: 2. sekzioan eredu fisikoa eta ekuazio dinamikoa deskribatzen ditugu. 3. sekzioan kobariazio- (edo kobariantza-) matrizea aurkeztuko eta egoera egonkorrean betetzen dituen baldintzak azalduko ditugu. 4. sekzioan kobariazio- (edo kobariantza-) matrizearen ekuazioa askatzen dugu, masen tenperatura eta haien arteko korrontearen adierazpen analitikoak lortzeko. 5. sekzioan erabiltzen ari garen modeloko parametroak Doppler hozketa mekanismopean dauden ioiekin lotzen ditugu. 6. sekzioan errektifikazio altuko konfigurazio bat bilatzen dugu. Azkenik, 6. sekzioan emaitzak laburbildu eta ondorioak azaltzen ditugu.

2. EREDU FISIKOA

Modeloa m_1 eta m_2 masetako bi partikuletan datza, euren artean k konstantedun elkarrekintza harmonikoa izanik eta x_e euren arteko oreka distantzia delarik. m_1 eta m_2 masak x_L eta x_R posizioen inguruan daude konfinaturik k_L eta k_R konstantedun potentzial harmonikoen bidez hurrenez hurren (ikus 1 irudia). Eredua deskribatzen duen Hamiltondarra honako hau da:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(x_1, x_2), \quad (1)$$

$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(|x_1 - x_2| - x_e)^2 + \frac{k_L}{2}(|x_1 - x_L|)^2 + \frac{k_R}{2}(|x_2 - x_R|)^2$ izanik, non $\{x_i, p_i\} i = 1, 2$ masa bakoitzaren posizio eta momentuak diren. x_i kordenatuen ordeztan sistemaren orekarekiko desplazamenduak $q_i = x_i - x_i^{eq}$ erabiliz, non $x_i^{eq} \partial_{x_i} V(x_1, x_2) = 0$ ekuazioaren soluzioak diren, Hamiltondarra honela idatz daiteke:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k + k_L}{2} q_1^2 + \frac{k + k_R}{2} q_2^2 - k q_1 q_2 + V(x_1^{eq}, x_2^{eq}). \quad (2)$$

Balio konstantedun gaia kenduz, honek oreka puntu egonkor baten inguruko sistemaren Hamiltondar forma du,

$$H = \frac{1}{2} \bar{p}^\top \mathbb{M}^{-1} \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{q}^\top \mathbb{K} \bar{q}, \quad (3)$$

non $\bar{q} = (q_1, q_2)^\top$, $\bar{p} = (p_1, p_2)^\top$, $\mathbb{M} = \text{diag}(m_1, m_2)$ sistemaren masa-matrizea den eta \mathbb{K} orekan potentzialaren matrize Hessiarra den, hau da, $\mathbb{K}_{ij} = \partial_{x_i, x_j}^2 V(\bar{x}) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}^{eq}}$. Modelo honetan $\mathbb{K}_{11} = k + k_L$, $\mathbb{K}_{22} = k + k_R$ eta

$\mathbb{K}_{12} = \mathbb{K}_{21} = -k$. Geroago ikusiko dugu adierazpen orokorra (3) kasu fisiko ezberdinetara egokitu daitekeela, bereziki banakako tranpetan harrapatu-riko bi ioiri edo tranpa berean dauden bi ioiri.

Ioiak Langevin bainuekin kontaktuan daude, L (ezkerra) eta R (eskuina) deituko ditugunak, T_L eta T_R temperaturekin m_1 eta m_2 masentzako, hurrenez hurren (ikus 1. irudia). Hamiltondarra eta bainuak kontuan hartuz sistemaren higadura-ekuazioak hauek dira:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1}{m_1}, & \dot{q}_2 &= \frac{p_2}{m_2}, \\ \dot{p}_1 &= -(k + k_L)q_1 + kq_2 - \frac{\gamma_L}{m_1}p_1 + \xi_L(t), \\ \dot{p}_2 &= -(k + k_R)q_2 + kq_1 - \frac{\gamma_R}{m_2}p_2 + \xi_R(t), \end{aligned} \tag{4}$$

non γ_L, γ_R bainuen marruskadura-koefizienteak diren eta $\xi_L(t), \xi_R(t)$ zarata-zuri moduko indar Gaussiarrak diren. Indar Gaussiarrak batez besteko balio nulua dute gertaera askoko kasurako ($\langle \xi_L(t) \rangle = \langle \xi_R(t) \rangle = 0$) eta $\langle \xi_L(t)\xi_R(t') \rangle = 0$, $\langle \xi_L(t)\xi_L(t') \rangle = 2D_L\delta(t - t')$, $\langle \xi_R(t)\xi_R(t') \rangle = 2D_R\delta(t - t')$ korrelazio-baldintzak betetzen dituzte. D_L eta D_R difusio-koefizienteak dira, fluktuazio- disipazioaren teorema betetzen dutenak, $D_L = \gamma_L k_B T_L$, $D_R = \gamma_R k_B T_R$, non k_B the Boltzman-nen konstantea den.

Komenigarria da fase espazio bektorea $\vec{r}(t) = (\vec{q}, \mathbb{M}^{-1}\vec{p})^\top$ (kontuan izan $\vec{v} = \mathbb{M}^{-1}\vec{p}$ abiadura bektorea baino ez dela) bezala definitzea. Higidura-ekuazioak ondorengoak dira:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \mathbb{A}\vec{r}(t) + \mathbb{L}\vec{\xi}(t), \tag{5}$$

non

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} & -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{L} \end{pmatrix}, \\ \mathbb{L} &= \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{2 \times 2} \\ \mathbb{M}^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

eta $\vec{\xi}(t) = (\xi_L(t), \xi_R(t))^\top$, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_L, \gamma_R)$. $\mathbb{0}_{n \times n}$ eta $\mathbb{1}_{n \times n}$ n -dimentsiodun matrize karratu nulua eta identitate matrizea diren hurrenez hurren. Bek-

tore notazioa baliatuz korrelazioa eta zarata-soinu indarrak honela idatz daitezke:

$$\langle \bar{\xi}(t)\bar{\xi}(t')^\top \rangle = 2\mathbb{D}\delta(t-t'), \quad (7)$$

non $\mathbb{D} = \text{diag}(D_L, D_R)$.

3. KOBARIANTZA-MATRIZEA ETA EGOERA GELDIKORRA

Sistemaren kobariantzia-matrizea honela definituko dugu:

$$\mathbb{C}(t) = \langle \bar{r}(t)\bar{r}(t)^\top \rangle. \quad (8)$$

Matrize honen garrantzia berari esker bero-garraioaren propietateen informazioa lortu ahal izatean datza. Bereziki masen tenperatura zinetikoa (masen mugimenduaren energia $k_B T$ -ri berdinduz lor daiteke), $T_1(t)$ eta $T_2(t)$, hauek dira:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{\langle p_1^2(t) \rangle}{m_1 k_B} = \frac{m_1 C_{3,3}(t)}{k_B}, \\ T_2(t) &= \frac{\langle p_2^2(t) \rangle}{m_2 k_B} = \frac{m_2 C_{4,4}(t)}{k_B}. \end{aligned} \quad (9)$$

Matrize hau aurkitzeko bide bat (5) ekuazioa askatzea da. Hala ere, honen beharrezko du ekuazioak esplizituki askatzea edo numerikoki ibilbide estokastikoak aldi ugartan simulatzea (batez bestekoak lortuz). Honen ordez kobariantzia-matrizearen eboluzioa kontrolatzen duen ekuazio diferentzial arrunt bat aztertuko dugu, [24-26] lanetan azaldu legez. $\mathbb{C}(t)$ denborarikiko deribatuz eta (5) ekuazioa erabiliz,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{C}(t) = \mathbb{A}\mathbb{C}(t) + \mathbb{C}(t)\mathbb{A}^\top + \mathbb{L}\langle \bar{\xi}(t)\bar{r}(t)^\top \rangle + \langle \bar{r}(t)\bar{\xi}(t)^\top \rangle\mathbb{L}^\top. \quad (10)$$

(10) ekuazioaren erantzunak ahalmentzen gaitu edozein denboran bi masen tenperatura lokalak lortzera, bainuen tenperaturen funtzioan ((9) ekuazioa). Zehazki kobariantzia-matrizearen egoera iraunkorrean interesatuta gaude, hau da, $t \rightarrow \infty$.

Egoera iraunkorrean kobariantzia-matrizea konstantea da $\left(\frac{d}{dt}\mathbb{C}(t) = 0\right)$,

hau dela eta ondorengo betetzen du:

$$\mathbb{A}\mathbb{C}^{s.s.} + \mathbb{C}^{s.s.}\mathbb{A}^\top = -\mathbb{L}\langle \vec{\xi}\vec{r}^\top \rangle^{s.s.} - \langle \vec{r}\vec{\xi}^\top \rangle^{s.s.}\mathbb{L}^\top, \quad (11)$$

non $\{\cdot\}^{s.s.} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \{\cdot\}(t)$ den. (11) ekuazio algebraikoa da, haren emaitza egoera geldikorreko kobariantza-matrizea izanik, $\mathbb{C}^{s.s.}$, $\mathbb{C}^{s.s.}\langle \vec{\xi}\vec{r}^\top \rangle^{s.s.}$ eta $\langle \vec{r}\vec{\xi}^\top \rangle^{s.s.}$ gaiak, ordea, kalkulatuak izan behar dira emaitza lortu aurretik. Novikov-en teorema eta zaraten δ -korrelazioa erabiliz,

$$\langle \xi_i(t)r_j(t) \rangle = \sum_{k=1}^2 \int_0^t d\tau \langle \xi_i(t)\xi_k(\tau) \rangle \left\langle \frac{\delta r_j(t)}{\delta \xi_k(\tau)} \right\rangle = \sum_{k=1}^2 \mathbb{D}_{ik} \lim_{\tau \rightarrow t^-} \left\langle \frac{\delta r_j(t)}{\delta \xi_k(\tau)} \right\rangle, \quad (12)$$

non $\lim_{\tau \rightarrow t^-} \tau$ t -rantz behetik ($\tau < t$) hurbiltzen den limitea den. $\delta r_j(t)/\delta \xi_k(\tau)$ deribatu funtzionalaren ebaluazioak honako hau ematen du $\tau \rightarrow t^-$ limitean:

$$\langle \vec{\xi}(t)\vec{r}(t)^\top \rangle = \mathbb{D}\mathbb{L}^\top. \quad (13)$$

Higidura-ekuazioak bete beharra eta $d\langle q_i q_j \rangle / dt = 0$ baldintza direla eta hau ikus dezakegu egoera geldikorrean:

$$\begin{aligned} \langle p_1 q_1 \rangle^{s.s.} &= \langle p_2 q_2 \rangle^{s.s.} = 0, \\ \frac{\langle p_1 q_2 \rangle^{s.s.}}{m_1} &= -\frac{\langle q_1 p_2 \rangle^{s.s.}}{m_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) kontuan izanik, kobariantza-matrizeak honako forma hau du egoera geldikorrean,

$$\mathbb{C}^{s.s.} = \begin{pmatrix} \langle q_1^2 \rangle^{s.s.} & \langle q_1 q_2 \rangle^{s.s.} & 0 & \frac{\langle p_2 q_1 \rangle^{s.s.}}{m_2} \\ \langle q_1 q_2 \rangle^{s.s.} & \langle q_2^2 \rangle^{s.s.} & -\frac{\langle p_2 q_1 \rangle^{s.s.}}{m_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\langle p_2 q_1 \rangle^{s.s.}}{m_2} & \frac{\langle p_1^2 \rangle^{s.s.}}{m_1^2} & \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^{s.s.}}{m_1 m_2} \\ \frac{\langle p_2 q_1 \rangle^{s.s.}}{m_2} & 0 & \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^{s.s.}}{m_1 m_2} & \frac{\langle p_2^2 \rangle^{s.s.}}{m_2^2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$\mathbb{C}^{s.s.}$ -aren terminen ekuazio sortak ezagunak dira.

4. SOLUZIOAK

Atal honetan egoera geldikorrekako ekuazioaren erantzunak erabiltzen ditugu bere sistemaren tenperaturak eta korronteak lortzeko. Harrapaturiko partikulek ez dute soilik bainuaren temperatura sentituko; izan ere, beste partikularekin duten elarrekinzako eragingo die. Partikula bakoitzaren tenperatura elkarrekintza konstantearen eta bainuen tenperaturaren menpe idaztea lor daiteke, *Mathematica* erabili dugu tenperatura-adierazpen analitiko horiek lortzeko,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{T_L \mathcal{P}_{1,L}(k) + T_R \mathcal{P}_{1,R}(k)}{\mathcal{D}(k)}, \\ T_2 &= \frac{T_L \mathcal{P}_{2,L}(k) + T_R \mathcal{P}_{2,R}(k)}{\mathcal{D}(k)}, \end{aligned} \quad (16)$$

non $\mathcal{D}(k) = \sum_{n=0}^2 \mathcal{D}_n k^n$ eta $\mathcal{P}_{i,(L/R)}(k) = \sum_{n=0}^2 a_{i,n,(L/R)} k^n$ akoplamendu-konstanteen polinomioak diren, kofizienteak ezagunak direlarik.

Bero-errektifikazioa, azken finean, korronte bidezko bero-transmisioarekin loturik dagoen fenomeno bat da. Hauek dira bainuetatik masetara dihoazen korronteak [17]:

$$J_L = k_B \frac{\gamma_L}{m_1} (T_L - T_1), \quad J_R = k_B \frac{\gamma_R}{m_2} (T_R - T_2), \quad (17)$$

non T_i (16) ekuaziokoak diren. Egoera egonkorrean $J_L = -J_R$ denez gero, erabiliko dugun notazioa $J \equiv J_L$ izango da. Honako adierazpen hau lortzen dugu korronteentzat (16) ekuazioa (17) ekuazioan ordezkatzuz,

$$J = \varkappa (T_L - T_R), \quad (18)$$

non terminoak konduktantzia termiko eraginkor legez jokutzen duen.

5. MODELOAREN ETA IOI HARRAPATUEN KATE BATEN ARTEKO ERLAZIOA

Orain arte modeloaren bi ezaugarri nagusi aipatu ditugu. Alde batetik, oszilazio txikien hurbilpenaren aplikazioa dugu, potentzial harmonikoen inguruan higidura-ekuazioak planteatzeko erabilia. Beste aldetik, Langevin bainuen efektua dugu, indar estokastiko bidez modelatuak eta Novikov eta fluktuazio-disipazio teoremen bidez aztertua.

Atal honetan modeloaren gauzatzea aztertzen dugu, horretarako ioi harrapatuak erabiliz, aipaturiko modeloaren bi funtsezko ezaugarriak betetzeko gai direlako. Lan honetan bi konfigurazio aztertzen ditugu: bi ioi tranpa harmoniko berean (tranpa kolektiboa), eta bi ioi bakoitza bere tranpan dagoelarik (banakako tranpak). 6. atalean banakako tranpen kasura joko dugu errektifikazioaren analisia argitzeko.

Konfinamendu erradial sendoa suposatuko dugu bi konfigurazioetan, dinamikak efektiboki dimentsio bakarrekoak eginez. Dimentsio axialean zeharreko konfinamendua elektrostatikoa dela joko dugu, elkarrekintza konstantea ioien masekiko independente egiten duena [27]. Langevin bainuen tenperaturak eta marruskadura-koefizienteak erlazionatuko ditugu dagokien Doppler hozketarekin.

5.1. Tranpa kolektiboa

Konsideratu karga unitate bakarreko bi ioi m_1 eta m_2 masekin tranpa harmoniko berean. Konfinamendu erradial sendoa eta konfinamendu axial elektrostatikoa suposatuz bi ioiek oszilagailu harmoniko potentzial bera sentituko dute, k_{trap} konstante elastikoarekin [27]. Sistema deskribatzen duen potentziala hau da:

$$V_{collective} = \frac{1}{2}k_{trap}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\mathcal{C}}{x_2 - x_1}, \quad (19)$$

non $\mathcal{C} = Q^2/(4\pi\epsilon_0)$ den. Potentzial honen oreka-puntuak hauek dira,

$$x_2^{eq} = -x_1^{eq} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 k_{trap}}\right)^{1/3} \quad (20)$$

Oreka-puntuen inguruan oszilazioak txikiak direla onartuz, honelakoa da sistemaren matrize Hessiarra,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{1,2} &= -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3} = -k_{trap}, \\ \mathbb{K}_{1,1} &= k_{trap} + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3} = 2k_{trap}, \\ \mathbb{K}_{2,2} &= k_{trap} + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3} = 2k_{trap}. \end{aligned} \quad (21)$$

(21) erabiliz konfigurazio honen parametroak 2 atalean deskribatutako modeloarekin lotu ditzakegu,

$$k_L = k_R = k = k_{trap}. \quad (22)$$

5.2. Banakako tranpak

Aurreko azpiatalean egindako suposaketak errepika ditzakegu kasu honetan, orain partikula bakoitzak potentzial ezbedin bat sentitzen duelarik, ezkerreko eta eskuineko partikulek $k_{trap,L}$ eta $k_{trap,R}$ tranpa-konstanteak ditzutelarik, hurrenez hurren. Sistemaren potentziala honelakoa da:

$$V_{individual} = \frac{1}{2}k_{trap,L}(x_1 - x_L)^2 + \frac{1}{2}k_{trap,R}(x_2 - x_R)^2 + \frac{\mathcal{C}}{x_2 - x_1}, \quad (23)$$

non x_L eta x_R tranpen posizio zentralak diren. Oreka egoeran Hessiar matrizearen elementuak hauek dira:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{1,2} &= -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3}, \\ \mathbb{K}_{1,1} &= k_{trap,L} + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3}, \\ \mathbb{K}_{2,2} &= k_{trap,R} + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3}. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) ekuazioko parametroak 2 atalean deskribatutakoekin konparatuz, honelako identitateak identifikatzen ditugu:

$$\begin{aligned} k_L &= k_{trap,L}, \\ k_R &= k_{trap,R}, \\ k &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2^{eq} - x_1^{eq})^3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Kasu honetan oreka-puntuen adierazpen analitikoak konplikatuagoak dira. Ioiien arteko tartea, beraz, analitikoki kalkula daiteke; lortutako emaitzak ez dira hemen erakusteko bezain laburrak. Konfigurazio honetan ioien arteko akoplamendua alda daiteke tranpen zentroen arteko tartea handituz edo txikituz.

5.3. Molasa optikoak eta Langevin bainuak

Modeloan Langevin bainuak erabili ditugu; horiek molasa optiko bidez simula daitezke. Lehen azaldutako potentzial eta partikulen sistemaren gainean aplika daitezke simulaturiko bainu horiek.

Ioi harrapatuak hozteko aurkako noranzkoetan hedatzen diren laserrak baliatu dira esperimentu askotan, horiek gorriranzko desintonia dutelarik ioien barne-trantsizio batekiko. Teknika hau Doppler hozketa edo molasa optiko legez ezagutzen da [28-31]. Erresonantzia kanpoko laser xurgaketak marruskadura antzeko moteltze-ingar bat gauzatzen du, eta ioiak gelditzen ditu. Ioien berezko emisioak beroa sortzen du jaurtitako fotoiek eragindako atzerakada-ingar aleatorioak direla eta. Marruskadura eta atzerakada orekatu egingo dira, ioiaren tenperatura finitu batera iritsiz. Hori dela eta, laserrak ioiaren gain duen efektua T_{molass} tenperatura eta γ_{molass} marruskadura-koefizientedun Langevin bainu baten baliokidea da. Tenperatura eta marruskadura-koefizientea menperatu daitezke I laser intentsitatea eta δ aukeraturiko trantsizioarekiko desintonia aldatuz, adierazpen hauei jarraituz [29, 31, 32]:

$$\gamma_{molass}(I, \delta) = -4\hbar \left(\frac{\delta + \omega_0}{c} \right)^2 \left(\frac{I}{I_0} \right) \frac{2\delta/\Gamma}{\left[1 + (2\delta/\Gamma)^2 \right]^2},$$

$$T_{molass}(\delta) = -\frac{\hbar\Gamma}{4k_B} \frac{1 + (2\delta/\Gamma)^2}{(2\delta/\Gamma)^2}, \quad (26)$$

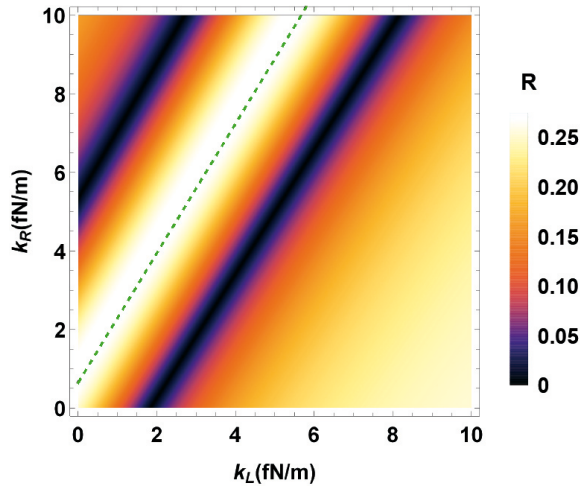
non ω_0 egoera atomikoaren barne-trantsizio maiztasuna den, Γ egoera kitzikatuaren zabalera naturala (erorketa tasa) den, eta I_0 saturazio intentsitatea den. Γ eta I jakinekin γ_{molass} δ -ren menpekoa da, eta beraz, zeharka, T_{molass} -ren menpekoa.

6. ERREKTIFIKAZIOAREN BILA

Errekifikazioa izango da baldin eta J aurreranzko tenperatura-aldearekin den fluxua eta \tilde{J} alderantzizko tenperatura-aldearekin den fluxua ezberdinak badira bainuak trukatzera. Errekifikazioa neurtzeko $0 \leq R \leq 1$ errekifikazio koefizientea erabiliko dugu, non

$$R = \frac{\left| |J| - |\tilde{J}| \right|}{\max(|J|, |\tilde{J}|)}, \quad (27)$$

Hemengo koska garrantzitsua *bainu-trukaketa* definitzea da. Bainuak T tenperaturaz gain sistemarekiko akoplamenduaz ere karakterizatuta daudela hartzen dugu, azken hau γ marruskadura-koefizientearen bidez. Bainuak trukatzea aldi berean tenperaturak eta marruskadura-koefizienteak trukatzean datza, 1 taulan laburtu bezala. Modelo orokorretarako hau definizio-aukera hutsa da; ioi harrapatuen kasuan, ordea, berezko jokatibidea da.



2. irudia. R errektifikazioa, $k_L k_R$ planoan $k = 1.17$ fN/m, $\gamma_L = 6.75 \times 10^{-22}$ kg/s, eta $\gamma_R = 4.64\gamma_L$, $m_1 = 24.305$ u.a., $m_2 = 40.078$ u.a. balioentzat. Lerro ez-jarraiak (28) erakusten du.

1. taula. Aurrerantza eta atzerantzako (trukaturiko) bainu konfigurazioak.

	Aurrerantz	trukatua
Bainu-marruskadura	γ_L, γ_R	$\tilde{\gamma}_L = \gamma_R, \tilde{\gamma}_R = \gamma_L$
Bainu-tenperatura	T_L, T_R	$\tilde{T}_L = T_R, \tilde{T}_R = T_L$

(26) ekuazioaren arabera tenperatura eta marruskadura-koefizienteak ezartzean trukaketa-prozesua erraza da bi ioiak espezie berekoak edo espezie bereko isotopoak badira, tenperaturak aldatzeko beharrezkoa den bakarra desintonia aldatzea baita, intentsitateak aldatu gabe. Kasu horretan desintonia-trukaketak automatikoki trukatzen ditu marruskadura-koefizienteak. Bi espezie ezberdinetarako, ordea, bi trantsizio atomiko ezberdin erabiltzen direnez, laserraren uhin-luzera eta Γ erorketa-tasa era ezberdinetan

daude lotuak, espeziearen arabera. Intentsitatea konstante mantentzen den bitartean desintonia trukaturak tenperaturak trukatzeko ez da, beraz, nahikoa marruskadura koefizienteak trukatzeko. Hala ere, marruskadura-koefizienteak ere truka daitezke laserraren intentsitatea era egokian aldatuz gero. Hemendik aurrera aldaketa hau gertatzen dela suposatuko dugu, hots, tenperatura eta marruskadura-koefizienteak aldi berean truka daitezkeela [16] erreferentzian egindako errekifikazioaren inguruan eginiko analisisian bezala, tenperaturaren menpeko ezaugarriak sartuko ditugu sisteman, hau da, marruskadura-koefizienteak tenperaturaren menpekoak dira eta eurekin batera trukutzen dira bainu-trukaketetan.

6.1. Parametroen ikerketa

Errekifikazio maximoaren bila sakonki aztertu dugu $m_1, m_2, k, k_L, k_R, \gamma_L, \gamma_R$ parametroek sortutako espazioa. Parametro batzuen balioa finkatu bitartean beste balioak aldatu ditugu. Aurkakorik esan ezean, hemendik aurrera masak $m_1 = 24.305$ u.a. eta $m_2 = 40.078$ u.a. dira, Mg eta Ca atomoen dagozkien balioak izanik; atomo horiek joi-harrapatu fisikan oso erabiliak baitira. (18) ekuazioaren eta dagokion \tilde{J} -ren adierazpenaren arabera, 1 taulako ordezkapenaren bidez ikus daiteke errekifikazioa ez dela tenperatura-aldearen menpekoa marruskadura-konstante jakin batzuk hartuz. Marruskadura-koefizienteak tenperaturaz gain laser-intentsitatearen menpekoak ere direnez, ikusi (26) ekuazioa, ez dago beharrik $m_1, m_2, k, k_L, k_R, \gamma_L, \gamma_R$ parametro espazioan tenperaturak finkatzeko errekifikazioaren azterketa egin aurretik. Bainu-tenperaturak beharrezkoak izango dira energia-espektoak aztertzerakoan, eta joko implizitua dute bainu-trukaketak marruskadura-aldaketak ekartzearen suposizioan.

2 irudiak errekifikazioaren balioa erakusten du $k_L - k_R$ planoan, k, γ_L eta γ_R finkoentzat.

Marra batek errekifikazio maximoa erakusten du. $\partial_{k_L} R = 0$ esplizituki aska daitekeen arren, emaitza luzeegia du hemen azaltzeko. Disipazio baxuko erregimenean ($\gamma_L/m_1 \ll \sqrt{k/m_1}, \gamma_R/m_2 \ll \sqrt{k/m_2}$), $(\gamma_L, \gamma_R) = (0, 0)$ inguruko Taylorren serieak lerro zuzen bat ematen du zerogarren ordenean,

$$\frac{k + k_R}{m_2} = \frac{k + k_L}{m_1}. \quad (28)$$

(28) ekuazioak $\omega_L = \omega_R$ finkatzen du erresonantzia-baldintza bezala, $\omega_L = \sqrt{(k + k_L)/m_1}$ eta $\omega_R = \sqrt{(k + k_R)/m_2}$ frekuentzia eraginkorrenentzat,

ikusi (2) ekuazioa. (28) ekuazioari ordena baxueneko zuzenketak lerroaren desplazamentu txiki bat dakar, malda mantenduz,

$$\frac{k+k_R}{m_2} = \frac{k+k_L}{m_1} + \frac{(m_2\gamma_L+m_1\gamma_R)(m_1\gamma_L+m_2\gamma_R)}{2m_1m_2(m_2^2-m_1^2)}. \quad (29)$$

Ioi harrapatuen testuinguruan (28) baldintza inposa daiteke k_L eta k_R finkoentzako tranpen arteko distantzia aldatuz. 2 irudiak errektifikazio maximodun lerroaz gain errektifikazio nuluko bi lerro ere erakusten ditu. Lerro horietan aurrerantzako eta atzerantzako fluxuak elkar mozten dute. Ezberdinak dira errektifikazio maximo eta minimoak adierazten dituzten lerroen maldak; hiru lerroetako bakoitzak malda bakarra du. Disipazio baxuko erregimenean, ordea, alde hori oso txikia da, 2 irudian bezala.

(28) ekuazioak deskribaturiko errektifikazio maximoko lerroan zehar errektifikazioaren balioak ez du menpekotasunik modeloaren konstante harmonikoengan, ikusi (18) eta (27) ekuazioak,

$$R = \begin{cases} 1 - \frac{a+g}{1+ag} & a > 1, g > 1 \text{ edo } a < 1, g < 1 \text{ bada} \\ 1 - \frac{1+ag}{a+g} & a > 1, g < 1 \text{ edo } a < 1, g > 1 \text{ bada} \end{cases}, \quad (30)$$

a eta g masen eta marruskadura-koefiziente arteko proportzioen menpekoea baino ez da,

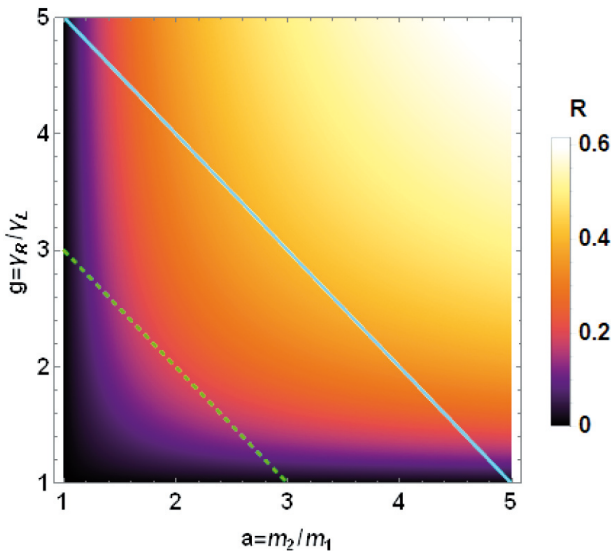
$$a = m_2/m_1, \quad g = \gamma_R/\gamma_L. \quad (31)$$

R balio altu batez gain J_{\max} korrante ez-arbuiagarriak izatea desiragarria da [17]. (28) berriz erabiliz (18) korrante adierazpenean, $J_{\max} = \max(|J|, |\tilde{J}|)$ korrante maximoa honelakoa da:

$$J_{\max} = \begin{cases} \frac{k_B g \gamma_L k^2 |T_L - T_R|}{(a+g)(g\gamma_L^2(k_L+k) + k^2 m_1)} & \begin{cases} a > 1, g > 1 \\ \text{edo } a < 1, g < 1 \end{cases} \\ \frac{k_B g \gamma_L k^2 |T_L - T_R|}{(1+ag)(g\gamma_L^2(k_L+k) + k^2 m_1)} & \begin{cases} a > 1, g < 1 \\ \text{edo } a < 1, g > 1 \end{cases} \end{cases} \quad (32)$$

Orain a eta g parametroek J_{\max} korrontean duten efektua ikertuko dugu (32) ekuazioa baliatuz. Horretarako, ag planoan lau kuadrantetan banatu dezakegu $a = 1$ eta $g = 1$ ardatzen bidez (ardatzetan zehar $R = 0$). (32) ekuazioan a parametroa izendatzailean baino ez dago; beraz a altuagoekin korronte txikiagoak lortuko dira. $a < 1$ kuadranteak hobek izango dira errekifikazio-balio altuak lortzeko. Aldi berean g izendatzaileaz gain zenbakitzailean ere agertzen denez, ezin dezakegu kuadrante pribilegiaturik zuzenean ikusi.

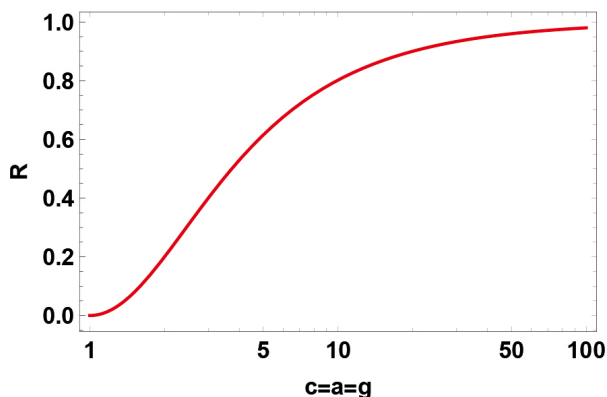
(30) simetrikoa da $a \leftrightarrow 1/a$ eta $g \leftrightarrow 1/g$ trukaketekiko. a eta grentzat eskala logaritmiko bat erabiliz lortzen den R mapa simetrikoa da $a = 1$ eta $g = 1$ ardatzekiko. $a > 1$, $g > 1$ koadrantea aztertzeraz muga dezakegu geure burua.



3. irudia. (30) ekuazioak emandako errekifikazio balioa, R .

3 irudiak (30) ekuazioak emandako errekifikazioa erakusten du a eta g -ren menpe. Edozein lerro diagonaletan zehar (lerro berde eta urdin argiaren paralelo) R maximoa zentroan dago, $a = g$. a konstante izanik g handitzeak errekifikazio altuagoak ekarriko ditu beti, baina g arbitrarioki handia egitea ez da posible ioi harrapatuen konfigurazioetan. $\gamma_L = 0$ egiteak ioi bat bainutik desakoplatzen du, bero-korrontea desagertaraziz. γ_R nahi bezain handia egitea ez da posible, laser desintoniaren menpekoea baita, hau beste trantsizio atomikoei mugatua delarik. (26) ekuazioak laser-intentsitatearen bidez marruskadura hazi ahal daitekeela adierazten duen arren, hau ez da horrela (26) ekuazioa-intentsitate baxuko hurbilketa baino ez delako. Inten-

tsitate altuetara goazenean, ioiaren foto xurgapena/jaurtiketa saturatzen da, marruskadurari balio finitu bat emanez, kitzikatutako egoeraren Γ zabalerarekiko proportzionala [31]. Eginkortasunaren eta R balio altuaren arteko akordio legez suposatuko dugu g eta a berdinak izatea. $c = a = g$ faktorea aldatzeak errektifikazioan duen efektua ikus daiteke 4 irudian, (30) ekuazioaren arabera. c altuagoek R balio altuagoak dakartzate.



4. irudia. R errektifikazioa $c = m_2/m_1 = \gamma_R/\gamma_L$ balioaren menpe, non k_L eta k_R parametroek errektifikazio maximorako baldintza ((28) ekuazioa) betetzen duten.

7. ONDORIOAK

2 oszilagailu harmoniko akoplatutan oinarritzen den modelo bat aztertu dugu, oszilagailuak Langevin bainuekin kontaktuan daudelarik. Molasa optikoetan harrapaturiko ioien bidez eginaraz daitezke horrelako bainuak. Modelo sinple honek ikerketa analitiko bat ahalbidetzen du, aldi berean errektifikazioa ikertu ahal izateko bezain konplexua izanik. Gure emaitzek frogatzen dute modelo harmoniko sinple baina errealistetan bero-errektifikazioa izan daitekeela tenperaturaren menpeko ezaugarriak badaude [16].

ERREFERENTZIAK

- [1] Chauncey STARR. The copper oxide rectifier. *Physics*, 7(1):15-19, 1936.
- [2] M. TERRANEO, M. PEYRARD, and G. CASATI. Controlling the energy flow in nonlinear lattices: A model for a thermal rectifier. *Phys. Rev. Lett.*, 88:094302, Feb 2002.
- [3] Baowen LI, Lei WANG, and Giulio CASATI. Thermal diode: Rectification of heat flux. *Phys. Rev. Lett.*, 93:184301, Oct 2004.

- [4] Emmanuel PEREIRA. Thermal rectification in classical and quantum systems: Searching for efficient thermal diodes. *EPL (Europhysics Letters)*, 126(1):14001, may 2019.
- [5] N.A. ROBERTS and D.G. WALKER. A review of thermal rectification observations and models in solid materials. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(5):648-662, 2011.
- [6] Nianbei LI, Jie REN, Lei WANG, Gang ZHANG, Peter HÄNGGI, and Baowen LI. Colloquium: Phononics: Manipulating heat flow with electronic analogs and beyond. *Rev. Mod. Phys.*, 84:1045-1066, Jul 2012.
- [7] Tengfei MA and Yan WANG. Chapter 5 - carbon nanomaterials for thermal rectification. In Rajib Paul, Vinodkumar Etacheri, Yan Wang, and Cheng-Te Lin, editors, *Carbon Based Nanomaterials for Advanced Thermal and Electrochemical Energy Storage and Conversion*, Micro and Nano Technologies, pages 103-119. Elsevier, 2019.
- [8] Andreu RIERA-CAMPENY, Mohammad Mehboudi, Marisa Pons, and Anna Sanpera. Dynamically induced heat rectification in quantum systems. *Phys. Rev. E*, 99:032126, Mar 2019.
- [9] N. LI, P. HÄNGGI, and B. LI. Ratcheting heat flux against a thermal bias. *EPL (Europhysics Letters)*, 84(4):40009, 2008.
- [10] Bambi HU, Lei YANG, and Yong ZHANG. Asymmetric heat conduction in nonlinear lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 97:124302, Sep 2006.
- [11] Nan ZENG and Jian-Sheng WANG. Mechanisms causing thermal rectification: The influence of phonon frequency, asymmetry, and nonlinear interactions. *Phys. Rev. B*, 78:024305, Jul 2008.
- [12] Dvira SEGAL and Abraham NITZAN. Spin-boson thermal rectifier. *Phys. Rev. Lett.*, 94:034301, Jan 2005.
- [13] Dvira SEGAL and Abraham NITZAN. Heat rectification in molecular junctions. *The Journal of Chemical Physics*, 122(19):194704, 2005.
- [14] Gil KATZ and Ronnie KOSLOFF. Quantum thermodynamics in strong coupling: Heat transport and refrigeration. *Entropy*, 18(5), 2016.
- [15] Giuliano BENENTI, Giulio CASATI, Carlos MEJÍA-MONASTERIO, and Michel PEYRARD. *From Thermal Rectifiers to Thermoelectric Devices*, pages 365-407. Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [16] Emmanuel PEREIRA. Requisite ingredients for thermal rectification. *Phys. Rev. E*, 96:012114, Jul 2017.
- [17] M. A. SIMÓN, S. MARTÍNEZ-GARAOT, M. PONS, and J. G. MUGA. Asymmetric heat transport in ion crystals. *Phys. Rev. E*, 100:032109, Sep 2019.
- [18] Nuo YANG, Nianbei LI, Lei WANG, and Baowen LI. Thermal rectification and negative differential thermal resistance in lattices with mass gradient. *Phys. Rev. B*, 76:020301, Jul 2007.
- [19] Emmanuel PEREIRA and Ricardo R. ÁVILA. Increasing thermal rectification: Effects of longrange interactions. *Phys. Rev. E*, 88:032139, Sep 2013.
- [20] Shunda CHEN, Emmanuel PEREIRA, and Giulio CASATI. Ingredients for an efficient thermal diode. *EPL (Europhysics Letters)*, 111(3):30004, 2015.

- [21] Colin D. BRUZEWICZ, John CHIAVERINI, Robert MCCONNELL, and Jeremy M. SAGE. Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges. *Applied Physics Reviews*, 6(2):021314, 2019.
- [22] M. PONS, Y.Y. CUI, A. RUSCHHAUPT, M.A. SIMÓN, and J.G. MUGA. Local rectification of heat flux. *EPL (Europhysics Letters)*, 119(6):64001, sep 2017.
- [23] Tristram J. ALEXANDER. High-heat-flux rectification due to a localized thermal diode. *Phys. Rev. E*, 101:062122, Jun 2020.
- [24] Simo SÄRKKÄ and Arno SOLIN. *Applied Stochastic Differential Equations*, pages 92-93. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2019.
- [25] Z. RIEDER, J.L. LEBOWITZ, and E. LIEB. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. *Journal of Mathematical Physics*, 8(5):1073-1078, 1967.
- [26] A. CASHER and J.L. LEBOWITZ. Heat flow in regular and disordered harmonic chains. *Journal of Mathematical Physics*, 12(8):1701-1711, 1971.
- [27] D. LEIBFRIED, R. BLATT, C. MONROE, and D. WINELAND. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 75:281-324, Mar 2003.
- [28] Steven CHU, L. HOLLBERG, J.E. BJORKHOLM, Alex CABLE, and A. ASHKIN. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 55:48-51, Jul 1985.
- [29] C. COHEN-TANNOUJJI. Atomic motion in laser light. In J. DALIBARD, J.M. RAIMOND, and J. ZINN-JUSTIN, editors, *Fundamental systems in quantum optics*, Amsterdam, 1993. North-Holland.
- [30] H.J. METCALF and P. VAN DER STRATEN. *Laser Cooling and Trapping*. Graduate texts in contemporary physics. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [31] H.J. METCALF and P. VAN DER STRATEN. Laser cooling and trapping of atoms. *J. Opt. Soc. Am. B*, 20(5):887-908, May 2003.
- [32] A. RUIZ, D. ALONSO, M.B. PLENIO, and A. DEL CAMPO. Tuning heat transport in trapped-ion chains across a structural phase transition. *Phys. Rev. B*, 89:214305, Jun 2014.