EKAIA (2023), artikulua prentsan/article in press
https://doi.org/10.1387/ekaia.24978

ekaia
ZIENTZIA eta TEKNOLOGIA ALDIZKARIA

ISSN: 0214-9001
e-ISSN: 2444-3255
©UPV/EHU Press

Uhin-ekuazioa eta Musika

(Wave equation and Music)

*Iratxe de la Hoz**, *Osane Oruetxebarria, Judith Rivas*
Matematika Saila, Zientzia eta Teknologia Fakultatea, UPV/EHU

LABURPENA: Musika eta Matematika lengoaia unibertsalak eta abstraktuak dira, eta historian zehar betidanik egon dira erlazionatuta; izan ere, Musikan emandako aurrerapenetan Matematikak garrantzia handia izan du. Musika soinuaren bidez adierazten da, eta, Matematikaren ikuspuntutik, soinuak uhinak dira. Artikulu honetan erlazio horren adibide batzuk aurkeztuko ditugu. Horretarako, musika-tresnen sailkapenean oinarrituta, instrumentuen familia bakoitzaren berezitasunak aztertu eta lengoaia matematikoan adierazi ondoren, soinu bakoitzak eragindako uhinek betetzen dituzten problemak aztertuko ditugu, bai eta horien soluzioak esplizituki eman ere. Soluzio horiek lortzeko ezinbesteko tresnak izango dira uhin-ekuazioa, Fourierren serieak eta Besselen funtzioak, besteak beste.
HITZ GAKOAK: musika, matematika, musika-tresnak, bibrazioak, uhin-ekuazioa, Fourier, Bessel.

ABSTRACT: *Music and Mathematics are universal and abstract languages that have always been related throughout history; indeed, Mathematics have had a great importance in the advances in Music. Music is expressed through sound and, from the mathematical point of view, sounds are waves. In this article we shall introduce some examples of this relationship. To do so, we will take into account the classification of musical instruments, study the peculiarities of each family, and express them in mathematical language. We will also analyze the problems that are satisfied by the waves each sound produces, and we will give their solutions explicitly. The essential tools to achieve these solutions will be the wave equation, Fourier series and Bessel functions, among others.*
KEYWORDS: Music, Mathematics, musical instruments, vibrations, wave equation, Fourier, Bessel.

***Harremanetan jartzeko/Corresponding author:** Iratxe de la Hoz González, Bilbo, Bizkaia.
https://orcid.org/10.1387/ekaia.24978, iratxedelahoz@gmail.com

Nola aipatu/How to cite: De la Hoz, Iratxe; Oruetxebarria, Osune; Rivas, Judith (2023). «Uhin-ekuazioa eta musika», Ekaia, DOI: https://doi.org/10.1387/ekaia.24978

Jasoa: Ekainak 28, 2023; Onartua: urriak 23, 2023
ISSN 0214-9001-eISSN 2444-3225 / ©2023 UPV/EHU

Obra *Creative Commons Atribución 4.0 Internacional*-en lizentziapean dago

1. Sarrera

Musika eta Matematika lengoaia unibertsalak eta abstraktuak izateaz gain, historian zehar harreman estua izan duten bi diziplina ere badira. Antzinako Greziako garaian, Musika Matematikaren adierazpen artistikotzat jotzen zen. Gainera, musikaren azterketa eta analisia beti egon dira Zenbaki Teoriarekin eta Astrologiarekin erlazionatuta; izan ere, grekoentzat musikaren teoria matematikoa *Kosmosaren harmonia* deritzon teoriaren parte zen. Pitagoras eta haren ikasle ziren Platon, Aristogenes, Aristoteles eta Klaudio Ptolomeo filosofo eta astrologo garrantzitsuenetarikoak izan ziren, eta musikan sakondu zuten. Haiek lortu zituzten emaitzak ezinbestekoak izan ziren matematikan eta kosmologian aurrerapausoak emateko. Horrez gain, aipatzekoa da Aritmetika, Geometria, Astronomia eta Musika Erdi Aroko *Quadrivium* zientziaren parte zirela. Beraz, historian zehar musikan emandako aurrerapenetan Matematikak garrantzia handia izan duela esan dezakegu.

Musika atzemateko soinuaren beharra dugu, eta soinua objektu baten bibrazioek eragindako uhinek gure entzumen sisteman sortzen duten sentsazioa da. Honako hauek dira soinuak dituen ezaugarriak: intentsitatea, maiztasuna, altuera edo tonua eta tinbrea. Soinu baten intentsitatea azalera unitate bakoitzeko soinu-uhinek garraiatzen duten potentzia da, azalera horren norabide perpendikularrean garraiatuta. Dezibelioak, dB, erabiltzen dira soinu baten intentsitatea neurtzeko. Maiztasuna soinuak segundo bakoitzean emandako bibrazio kopurua da, eta hertziotan, Hz, neurtzen da. Altuera soinu baten maiztasunaren eraginez sortzen da, eta belarriekin nabari dezakegu; hau da, maiztasuna sortzen den fenomenoa da, eta altuera, ordea, fenomeno horri esker hautematen duguna. Beraz, maiztasuna bezala, altuera hertziotan neurtzen da. Azkenik, soinu baten tinbrea hura eragiten duen bibrazio-mugimenduaren konplexutasun mailaren araberakoa da. Tinbreari esker, bi soinu-foku ezberdinek sortzen dituzten maiztasun eta intentsitate bereko bi soinu bereiz daitezke. Soinuaren ezaugarri hori, altuera eta intentsitatea ez bezala, ezin da neurtu, eta, hortaz, ez dago soinu desberdinetako tinbreak alderatzea ahalbidetzen duen unitaterik.

Musika atzemateko prozesuan, garrantzia bera dute soinuak eta soinua eragiten duten objektuek; hots, instrumentuek. Instrumentuek soinua eragiten dute modu batean edo bestean, eta, horren arabera, haien sailkapena egin daiteke. Hori horrela, antzinako greziarren garaian oinarritutako musika-tresnen sailkapena ezagutzen dugu, hari-, haize- eta perkusio-instrumentuen familiak, hain zuzen ere. Hala ere, orkestra sinfonikoaren garapenarekin batera, sailkapen tradizional hori aldatzen hasi zen orkestrako musika-tresnetara egokituz. Testuinguru horretan, Curt Sachs instrumentologoak eta Erich Hornbostel instrumentista musikalak sailkapen metodo berri bat planteatu zuten 1914. urtean, zeinetan soinua sortzen duen elementu dardarkariaren arabera sailkatzen ziren instrumentuak. Lau talde hauetan oinarritzen zen Sachs-Hornbostelen instrumentuen sailkapena: kordofonoak edo hari-instrumentuak, aerofonoak edo haize-instrumentuak, menbranofonoak eta idiofonoak, [**?**].

Hari-instrumentuak, Sachs-Hornbostelen sailkapenaren arabera, soken bibrazioen bidez soinua sortzen dutenak dira. Bibrazio horiek sokak kolpekatuta, igurtzita, pintzatuta edota pultsatuta lortzen dira, eta pianoa, biolina eta gitarra dira horien adibide batzuk, hurrenez hurren.

Soinu-hodiak dira soinua sortzeko gai diren haize-instrumentuak. Musika-tresna horiek gas-zutabe bat dute, eta mihi batetik edota zuzenean ezpainetatik airea botatzean gas-zutabea kitzikatzen da, soinua sortuz. Akustikaren ikuspegitik, soinu-hodiak bi talde handitan sailkatzen dira: hodi irekiak eta hodi itxiak. Hodi irekiak bi zulo edo gehiago dituztenak dira, oro har bi muturrak irekita izanda, hala nola txirula eztia. Hodi itxiek, ordea, zulo bakarra dute; hau da, haizea sartzen den lekuaren kontrako muturra estalita dute, eta horren adibide bat da zeharkako txirula. Hala ere, tinbrea nola sortzen den kontuan hartuta, haize-instrumentuen beste azpibanaketa hau egin daite-

ke: haize-metala edo metalak (tronpeta, tronboia, bonbardinoa, tuba, tronpa, etab.) eta haize-zura edo zurak (klarinetea, txirula, saxofoia, oboea, fagota, harmonika, akordeoia, etab.).

Perkusio-instrumentuak bi talde handitan sailka daitezke: menbranofonoak eta idiofonoak. Menbranofonoetan, tinko dagoen mintz batek bibratzen duenean sortzen da soinua. Soinu hori eragiteko, mintza eskuekin edo baketekin jo behar da. Instrumentu horien adibide dira danborra, panderoa eta dunbala. Bestalde, idiofono hitzak grezieraz *berezko soinu* esan nahi du; hau da, idiofonoen kasuan, instrumentua bera da soinua sortzen duena; soka, mintz edota haize-zutaberen beharrik gabe. Esan beharra dago idiofonoak ez direla musika-tresnen sailkapen tradizionalaren parte, Sachs-Hornbostelen sailkapenean hasi baitziren kontuan hartzen. Instrumentu horiek zurezkoak, metalezkoak edota harrizkoak dira, gogorrak baina soinudunak, eta mugimendu dardarkari bat mantentzeko adina elastikotasuna dute. Idiofonoetan soinua sortzeko, beharrezkoa da kolpeak, astinduak, igurtziak edota abar ematea, eta horien adibide batzuk dira gonga, kanpaiak eta xilofonoak.

Musika-tresnen modernizazioaren ondorioz, Sachs-Hornbostelen instrumentuen sailkapena handitzeko beharra sortu zen. Hori horrela, Curt Sachsek bosgarren talde bat gehitu zuen, elektrofonoen taldea, hain zuzen ere. Elektrofonoek soinua sortzen dute gailu elektriko edota elektronikoen bidez, eta horien adibide dira sintetizadoreak eta thereminak. Gitarra eta baxu elektronikoak, ordea, ez dira familia honen parte, hari-instrumentuei dagozkien tresna elektroakustikoak baitira. Gainera, elektrofonoek ez dute jarraitzen beste instrumentuen eredu bera, izan ere, soinua korronte elektrikoen bidez sortzen dute. Hori dela eta, gure azterketatik kanpo utziko ditugu. Hala ere, aipatzekoa da gaur egun etnomusikologoek azken sailkapen horretan oinarritzen direla, eta honako bost talde hauek direla musika-tresnak sailkatzeko erabiltzen direnak: kordofonoak edo hari-instrumentuak, aerofonoak edo haize-instrumentuak, menbranofonoak, idiofonoak eta elektrofonoak.

Artikulu honen helburu nagusia matematika eta musika harremanetan jartzea da, musika-tresnen sailkapenean oinarrituz. Horretarako, dimentsio bateko eta bi dimentsioko uhin-ekuazioak musikarekin eta instrumentuekin erlazionatuko ditugu. *Jean le Rond d'Alembert* XVIII. mendeko matematikari eta filosofoa izan zen, eta musikaren teorialaritzat hartzen zen. Harien bibrazioak aztertzen zegoela, hari dardarkari baten mugimendua deribatu partzialetako ekuazio baten soluzioa dela frogatu zuen 1746an, eta hori da gaur egun ezagutzen dugun dimentsio bateko uhin-ekuazioa. Bide hori jarraituz, mota bakoitzeko instrumentuek betetzen duten uhin-ekuazioa zein den aztertuko dugu, aipatutako Sachs-Hornbostelen instrumentuen sailkapena aintzat hartuz. Lana aurrera eramateko, oinarritzat hartu da *Uhin-ekuazioa eta musika* izeneko Matematikako graduko gradu amaierako lana, [**?**].

Artikulua lau atal nagusitan banatuta dago. Lehenengoan, matematika eta musika erlazionatzeko beharrezkoak diren oinarrizko kontzeptu matematikoak azalduko ditugu. Bigarren atalean, hari-instrumentuek edo kordofonoek sortzen dituzten bibrazioak aztertuko ditugu dimentsio bateko uhin-ekuazioaren problema ebatziz. Jarraian, perkusio-instrumentuak menbranofonoetan eta idiofonoetan sailkatzen direla eta menbranofonoetan sakonduko dugula kontuan hartuta, musika-tresna horiek sortzen dituzten bibrazioak bi dimentsioko uhin-ekuazioaren problemaren bidez adieraz daitezkeela aztertuko dugu, bai eta problema hori ebatzi ere. Bukatzeko, haize-instrumentuak aztertuko ditugu, dimentsio bateko uhin-ekuazioarekin eta Besselen funtzioekin erlaziona daitezkeen musika-tresnak, alegia. Azkenik, lan berrietarako bidea irekita utziko dugu hiru dimentsioko uhin-ekuazioan sakontzeko.

2. Oinarri matematikoak

Lehen atal honetan, musikaren eta matematikaren artean dagoen lotura azaltzeko erabiliko diren kontzeptu matematikoak, prozedurak eta propietateak bilduko ditugu. Sarreran aipatu den bezala, uhin-ekuazioa ezinbesteko tresna izango da artikuluan zehar musika eta matematika erlazionatzeko. Uhin-ekuazioa hasierako baldintzekin eta mugalde-baldintza egokiekin osatzen denean, problema aldagaien banantze-metodoa erabiliz ebatz daiteke, espazio konkretu batzuetan. Metodo horrek, problemaren geometriarekin elkartutako funtzio-familia baten serie infinitu baten batura bezala ematen du soluzioa. Funtzio-serieak gaiez gai deribatu ahal izateko, seriea uniformeki konbergentea izan behar denez, konbergentzia mota hori bermatzen duten beharrezko baldintzak zehaztuko ditugu, [**?**], [**?**].

2.1. Hilberten espazioak

Definizioa. Izan bitez $\mathcal{H}$ $\mathbb{R}$ gorputzaren gaineko bektore-espazioa eta $< \cdot, \cdot >: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ aplikazio bilineala, zeinetarako honako baldintza hauek betetzen diren:

i) $< u + v, w >=< u, w > + < y, w >, \forall u, v, w \in \mathcal{H}$;

ii) $< u, v >=< v, u >, \forall\, u, v \in \mathcal{H}$;

iii) $< \alpha u, v >= \alpha < u, v >, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

iv) $< u, u >\geq 0, \forall u \in \mathcal{H}$, eta $< u, u >= 0$ baldin eta soilik baldin $u = 0$ bada.

Orduan, $< \cdot, \cdot >$ *biderketa eskalarra* dela esaten da, eta $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$ *biderketa eskalarreko espazioa* dela diogu.

Biderketa eskalarreko espazioak espazio normadunak dira; izan ere, $\|\varphi\| = \big(< \varphi, \varphi >\big)^{1/2}$ norma bat da $\mathcal{H}$ espazioan. Norma horrekiko $\mathcal{H}$ espazioa osoa bada; hau da, Cauchyren segidak konbergenteak badira, $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$ *Hilberten espazioa* dela diogu.

Definizioa. Izan bitez $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$ Hilberten espazioa eta $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia $\mathcal{H}$ espazioaren *oinarri ortogonala* dela esaten da baldin eta

i) $< \varphi_n, \varphi_m >= 0$ bada $n \neq m$ guztietarako; eta

ii) edozein $\varphi \in \mathcal{H}$ emanda, existitzen bada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, zeinetarako $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi_n$ den, hots,

$$\lim_{N\to\infty} \|\varphi - \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n\| = 0.$$

Definizioa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$ eta $w\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jarraitua, $w(t) \geq 0$ izanda $t \in [a, b]$ guztietarako. Honako *Hilberten espazio* hau definitzen da:

$$L^2_w(a, b) = \{\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R};\ \int_a^b \big|\varphi(t)\big|^2 w(t)\, dt < +\infty\},$$

non w funtzioa *pisua* den. Bereziki, $w \equiv 1$ bada, $L^2_w(a, b) = L^2(a, b)$ idatzi ohi da. Bestalde, a, b, edo biak finituak ez direnean $L^2_w(a, b)$ espazioa ere modu berean defini daiteke.

2.2. Sturm-Liouvilleren problemak

Deribatu partzialetako ekuazioen mugalde- eta hasierako baldintzetako problemak ebazteko aldagaien banantze-metodoa erabiltzen denean, mugalde-baldintzekin osatutako ekuazio diferentzial arruntak sortzen dira, parametro baten menpekoak. Soilik parametro horren balio batzuetarako izango ditu problemak soluzio ez-nuluak.

Definizioa. Izan bitez $r, p, w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioak, $p, w \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(x) > 0$ eta $w(x) > 0$ izanda $x \in [a,b]$ guztietarako. Izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, non $|a_1| + |a_2| \neq 0$ eta $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren. Orduan, $\lambda \in \mathbb{R}$ parametroa emanda,

$$\begin{cases} \big(r(x)y'\big)' + p(x)y + \lambda w(x)y = 0, \quad x \in [a,b], \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularra dela diogu. λ parametroaren balio baterako (**??**) problemak soluzio ez-nulua badu, balio hori problemaren *balio propioa* dela diogu, eta soluzio ez-nuluak *funtzio propioak* dira.

1. teorema. *Izan bitez $r, p, w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioak, $p, w \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(x) > 0$ eta $w(x) > 0$ izanda $x \in [a,b]$ guztietarako. Izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren.*

*i) (**??**) Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularraren balio propioek zenbaki errealen segida gorakor dibergente bat osatzen dute, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, non $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ diren.*

*ii) (**??**) Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularraren funtzio propioak funtzio errealak dira, eta balio propio bakoitzari esleituriko funtzio propioen multzoa dimentsio bateko espazio bektoriala da.*

iii) Izan bedi, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, λ_n balio propioari esleituriko ϕ_n funtzio propioa. Orduan,

$$< \phi_i, \phi_j >_w = \int_a^b \phi_i(x)\, \phi_j(x)\, w(x)\, dx = 0, \quad \forall\, i \neq j$$

da; hau da, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia $L^2_w(a,b)$ espazioaren sistema ortogonala da.

Nahiz eta aurreko teoreman $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia sistema ortogonala dela aipatu, benetan oinarri ortogonala da daukaguna, eta horrela adieraziko da atal honetan enuntziatuko ditugun proposizioetan.

Bestalde, gogora dezagun funtzio bat zatika jarraitua dela $[a,b]$ tartean, jarraitua baldin bada $[a,b]$ tarteko puntu guztietan, agian puntu kopuru finitu batean izan ezik, puntu horietan f-ren albo-limiteak finituak izanik. Gogora dezagun $c \in [a,b]$ bada, f-ren c puntuko albo-limiteak honako hauek dira:

$$f(c+) = \lim_{\substack{x\to c \\ x>c}} f(x), \quad \text{eta} \quad f(c-) = \lim_{\substack{x\to c \\ x<c}} f(x).$$

Azter ditzagun uhin-ekuazioa ebaztean agertuko zaizkigun Sturm-Liouvilleren zenbait problema. Lehenik eta behin, Fourierren serieekin erlazionatutako Sturm-Liouvilleren problemak aurkeztuko ditugu, [**?**], [**?**], [**?**].

2. proposizioa. *Izan bitez $\ell > 0$ eta honako Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneo hau:*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \qquad 0 < x < \ell, \\ y(0) = y(\ell) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

*(**??**) problemaren balio propioak eta funtzio propioak* $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ *eta* $\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ *dira, hurrenez hurren,* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako.*

Izan bitez $f\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ *integragarria eta*

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$f \in L^2(0,\ell)$ *bada, orduan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

f*-ren Fourierren sinuetako serieak,* f*-rantz konbergitzen du* $L^2(0,\ell)$ *espazioko normarekiko. Bestalde,* f *eta* f' *zatika jarraituak badira* $[0,\ell]$ *tartean, orduan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad \forall x \in (0,\ell).$$

Are gehiago, f *jarraitua bada* $[0,\ell]$ *tartean,* $f(0) = f(\ell) = 0$ *izanda, eta* f' *zatika jarraitua bada* $[0,\ell]$*-n, orduan, Fourierren sinuetako seriearen konbergentzia uniformea da* $[0,\ell]$ *tartean.*

3. proposizioa. *Izan bitez* $\ell > 0$ *eta honako Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneo hau:*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell, \\ y'(0) = y'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

*(**??**) problemaren balio propioak eta funtzio propioak* $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ *eta* $\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ *dira, hurrenez hurren,* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *guztietarako.*

Izan bitez $f\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ *integragarria eta*

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$f \in L^2(0,\ell)$ *bada, orduan,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

f*-ren Fourierren kosinuetako serieak,* f*-rantz konbergitzen du* $L^2(0,\ell)$ *espazioko normarekiko. Bestalde,* f *eta* f' *zatika jarraituak badira* $[0,\ell]$ *tartean, orduan,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad \forall x \in (0,\ell).$$

Are gehiago, f *jarraitua eta* f' *zatika jarraitua badira* $[0,\ell]$ *tartean,* $f'(0) = f'(\ell) = 0$ *izanda, orduan, Fourierren kosinuetako seriearen konbergentzia uniformea da* $[0,\ell]$ *tartean.*

Ekuazio direrentzial bera mantenduz, mugalde-baldintza mistoak ere har daitezke, Sturm-Liouvilleren problema berri bat eraikiz, eta, ondorioz, $L^2(0,\ell)$ espazioaren oinarri ortogonal berri bat sortuz.

4. proposizioa. *Izan bitez* $\ell > 0$ *eta honako Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneo hau:*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell, \\ y'(0) = y(\ell) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

*(**??**) problemaren balio eta funtzio propioak* $\lambda_n = \Big(\dfrac{(2n-1)\pi}{2\ell}\Big)^2$ *eta* $\phi_n(x) = \cos\Big(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\Big)$ *dira, hurrenez hurren,* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako.*

Izan bitez $f\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ *integragarria eta*

$$d_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\Big(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\Big)\,dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$f \in L^2(0,\ell)$ *bada, orduan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\Big(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\Big) \tag{5}$$

serieak f*-rantz konbergitzen du* $L^2(0,\ell)$ *espazioko normarekiko. Bestalde,* f *eta* f' *zatika jarraituak badira* $[0,\ell]$ *tartean, orduan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\Big(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\Big) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad \forall x \in (0,\ell).$$

Are gehiago, f *jarraitua eta* f' *zatika jarraitua badira* $[0,\ell]$ *tartean,* $f'(0) = f(\ell) = 0$ *izanda, orduan, (**??**) seriearen konbergentzia uniformea da* $[0,\ell]$ *tartean.*

(**??**) problema erregular homogeneoan, tartearen mutur bakoitza mugalde-baldintza bakar batean agertzen da. Sturm-Liouvilleren problema periodikoetan soluzioaren eta haren deribatuaren bi muturretako balioak berdinak izatea eskatzen da. Problema periodikoen funtzio propioek ez dituzte problema erregularren funtzio propioek betetzen dituzten propietate batzuk. Desberdintasun nabariena da balio propio bakoitzari esleituriko funtzio propioen multzoa ez dela dimentsio bateko espazio bektorial bat.

5. proposizioa. *Izan bedi honako Sturm-Liouvilleren problema periodiko hau:*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & -\pi < x < \pi, \\ y(-\pi) = y(\pi), \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \tag{6}$$

*(**??**) problemaren balio propioak* $\lambda_n = n^2$ *dira,* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *guztietarako.* $\lambda_0 = 0$ *balio propioari dagokion funtzio propioa* $\phi_0 \equiv 1$ *da; eta* $n \in \mathbb{N}$ *bada,* λ_n *balio propioei dagozkien funtzio propioen multzoa* $\phi_n(x) = \cos(n\pi x)$ *eta* $\psi_n(x) = \sin(n\pi x)$ *funtzioek sortzen duten bi dimentsioko espazio bektoriala da.*

Izan bitez $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *integragarria eta*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\pi x)\,dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\pi x)\,dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$f \in L^2(-\pi,\pi)$ *bada, orduan,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x)$$

f*-ren Fourierren serieak,* f*-rantz konbergitzen du* $L^2(-\pi,\pi)$ *espazioko normarekiko. Bestalde,* f *eta* f' *zatika jarraituak badira* $[-\pi,\pi]$ *tartean, orduan,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi x) + b_n\sin(n\pi x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad \forall x \in (-\pi,\pi).$$

Are gehiago, f *jarraitua bada* $[-\pi,\pi]$ *tartean,* $f(-\pi) = f(\pi)$ *izanda, eta* f' *zatika jarraitua bada* $[-\pi,\pi]$*-n, orduan, Fourierren seriearen konbergentzia uniformea da* $[-\pi,\pi]$ *tartean.*

Aurreko Sturm-Liouvilleren problemak agertuko dira aldagaien banantze-metodoa erabiltzen denean uhin-ekuazioa koordenatu kartesiarretan ebazteko. Aldiz, koordenatu polarretan idatzitako bi dimentsioko uhin-ekuazioa ebazteko aldagaien banantze-metodoa erabiltzen bada, Besselen ekuazioarekin erlazionatutako Sturm-Liouvilleren problema agertzen da, [**?**], [**?**].

Definizioa. Izan bedi $p \geq 0$. *Besselen ekuazioa* honako hau da:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad \forall x > 0.$$

Besselen ekuazioa bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineala denez, haren soluzio orokorra bi soluzio linealki independenteren konbinazio linealen multzoa da. Soluzio bat Frobeniusen metodoaren bidez lor daiteke, eta Besselen lehen klaseko funtzio izenaz ezagutzen da.

Definizioa. Izan bedi $p \geq 0$. p *ordenako Besselen lehen klaseko funtzioa* honako hau da:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}, \quad \forall x \geq 0,$$

non Γ *Eulerren Gamma funtzioa* den, $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ integralaren bidez definitzen dena, $s > 0$ denean.

6. teorema. *Izan bitez $p \geq 0$ eta J_p Besselen p ordenako lehen klaseko funtzioa. Orduan, J_p-ren zero positiboen kopurua infinitu zenbakigarria da.*

Besselen ekuaziotik abiatuz, Sturm-Liouvilleren problema bat defini daiteke. Horretarako, $s = \sqrt{\lambda}x$ aldagai-aldaketa egin behar da, λ parametroa agerarazteko. Ohiko notazioa mantentzeko, s-ren ordez berriro x idatziko dugu eta lortutako ekuazioa berridatziko dugu (**??**) problemako ekuazio diferentzialaren forma autoadjuntua izan dezan. Kasu honetan, $r(x) = x$ da, eta funtzio hori $x = 0$ puntuan anulatzen da. Horregatik, Sturm-Liouvilleren problema singularra dugu eta mugalde-baldintzak egokiro aukeratu behar dira. Hala ere, Sturm-Liouvilleren problema erregularren kasuan bezala, funtzio propioek elkartutako Hilberten espazioaren oinarri ortogonal bat osatzen dute.

7. proposizioa. *Izan bitez $p \geq 0$, $\ell > 0$ eta honako Sturm-Liouvilleren problema hau:*

$$\begin{cases} (xy')' - \dfrac{p^2}{x}y + \lambda x\, y = 0, \quad x \in (0,\ell); \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) \in \mathbb{R}, \\ y(\ell) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

*(**??**) problemaren balio eta funtzio propioak $\lambda_n = \alpha_{p,n}^2/\ell^2$ eta $\phi_n(x) = J_p(\alpha_{p,n}x/\ell)$ dira, hurrenez hurren, $\{\alpha_{p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida J_p Besselen funtzioaren zero positiboek osatzen dutena izanda.*

Izan bedi $f\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ funtzioa $w(x) = x$ pisuarekiko integragarria, eta izan bitez

$$a_n = \frac{2}{\ell^2\big(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\big)^2} \int_0^{\ell} f(x)J_p(\alpha_{p,n}x/\ell)x\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

$f \in L_w^2(0,\ell)$ bada, orduan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\alpha_{p,n}x/\ell)$$

f-ren Fourier-Besselen serieak, f-rantz konbergitzen du $L^2_w(0,\ell)$ espazioaren norman. Bestalde, f eta f' zatika jarraituak badira $[0,\ell]$ tartean, orduan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_p(\alpha_n x/\ell) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, \quad \forall x \in (0,\ell).$$

Are gehiago, f jarraitua bada $[0,\ell]$ tartean, $\lim_{x\to 0} x^{-p} f(x) = f(\ell) = 0$ badira eta f' zatika jarraitua bada $[0,\ell]$ tartean, orduan, f-ren Fourier-Besselen serieak f-rantz uniformeki konbergitzen du $[0,\ell]$ tartean.

Orain arte aipatutako emaitzak dimentsio bateko kasuari dagozkio, baina ikusiko dugu musika-tresna batzuetarako uhin-ekuazioa bi dimentsiotan ebaztea beharrezkoa izango dela, adibidez panderoaren kasurako. Hori aurrera eraman ahal izateko, aldagaien banantze-metodoa bi dimentsiotan erabiliko dugu, eta funtzioen ortogonaltasuna bermatzeko beharra izango dugu. Kasu horretan, bi dimentsioko uhin-ekuazioa koordenatu polarretan ebatziko dugu, eta lan egiteko espazioa $L^2_w(D)$ izango da, non

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \rho, -\pi \le \theta \le \pi\}$$

koordenatu polarretan idatzitako $\rho > 0$ erradioko diskoa eta $w(r,\theta) = r$ pisua diren. Hori horrela, $L^2_w(D)$ espazioko biderkadura eskalarra honela definituta dago:

$$< f, g >_w = \int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta) g(r,\theta) r d\theta dr,$$

eta honako emaitza hau betetzen da.

8. teorema. *Izan bedi $\{\alpha_{p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ J_p funtzioaren zero positiboek osatzen duten segida, $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ izanda. Orduan,*

$$\{J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)\cos(p\theta) \mid p \ge 0, n \ge 1\} \cup \{J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)\sin(p\theta) \mid p, n \ge 1\}$$

familia $L^2_w(D)$ espazioko oinarri ortogonala da, $w(r,\theta) = r$ pisua izanda. Beraz, $f \in L^2_w(D)$ bada, f oinarri horretako gaien serie modura idatz dezakegu, hau da,

$$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{0,n}}{2} J_0(\alpha_{0,n} r/\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(a_{p,n}\cos(p\theta) + b_{p,n}\sin(p\theta)\right) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)$$

da $L^2_w(D)$ espazioaren normarekiko, non $a_{p,n}$ eta $b_{p,n}$ koefizienteak honako hauek diren, $n \in \mathbb{N}$ eta $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ guztietarako:

$$a_{p,n} = \frac{2}{\pi\rho^2\left(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\right)^2} \int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)\cos(p\theta) r d\theta dr, \tag{9}$$

$$b_{p,n} = \frac{2}{\pi\rho^2\left(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\right)^2} \int_0^{\rho}\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)\sin(p\theta) r d\theta dr. \tag{10}$$

Behin musika eta matematika erlazionatzen dituzten kontzeptu teorikoak, prozedurak eta propietateak azalduta geratu direla, instrumentuen familiak uhin-ekuazioarekin harremanetan jartzen has gaitezke.

1. oharra. Jarraian aurkeztuko ditugun emaitzetan, konbergentzia uniformerako baldintzak ezarriko ditugu. Baldintza horiek beharrezkoak dira serie bidezko adierazpena deribatu partzialetako ekuazioaren soluzioa dela egiaztatzeko. Hala ere, lanaren helburua ez denez zehaztasun horietan sakontzea, frogetan soilik azalduko dugu nola lortzen diren adierazpen horiek, ekuazioaren soluzioa direla onartuz.

3. Hari-instrumentuak

Hari-instrumentuek muturretan finkatutako hari bat baino gehiago dituzte, eta hari horiek bibratzean sortzen da soinua. Hari baten bibrazioaren bidez sortutako soinua uhin bat da. Oro har, hari dardarkari batek maiztasun konstantea izan ohi duen soinua sortzen du. Beraz, maiztasunak soinuaren altuera ezaugarritzen duenez, sortutako soinua nota bat da. Gauzak horrela, hari dardarkariak dira hari-instrumentu guztien oinarria. Aipatzekoa da hari-instrumentuak bi talde handitan sailka daitezkeela, arkuarekin jotzen diren edo ez kontuan hartuta. Atal honetan aztertuko ditugun hari-instrumentuak eskuekin jotzen direnak izango dira, hala nola gitarra.

Demagun muturretan finkatutako ℓ luzeradun hari bat dugula. Haria jotzen denean sortzen den desplazamendua denboran zehar deskribatu nahi dugu, desplazamendu hori planoan gertatzen dela onartuz. Haria geldi dagoenean $[0, \ell]$ tartearekin identifikatuko dugu. Gainera, suposatuko dugu haria material homogeneoz eginda dagoela, haren elastizitate-koefizientea $c > 0$ konstantea izanik, eta $u(x, t)$ funtzioak hariaren x puntuaren altuera t unean adieraziko du.

9 . teorema. *Izan bitez $c > 0$ material homogeneoz eginda dagoen eta muturretan finkatuta dagoen hari elastiko baten elastizitate-koefizientea eta $\ell > 0$ hariaren luzera. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ hariaren x puntuko hasierako desplazamendu bertikala eta abiadura, hurrenez hurren, $f, g\colon [0, \ell] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak, haien deribatuak zatika jarraituak izanik, eta $f(0) = f(\ell) = 0$, $g(0) = g(\ell) = 0$. Orduan, u funtzioak, $u\colon [0, \ell] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, hariaren desplazamendu bertikala denboran zehar adierazten badu,*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(c_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + \frac{\ell}{cn\pi} d_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right) \tag{11}$$

da, non

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$d_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Frogapena. u funtzioa dimentsio bateko uhin-ekuazioaren soluzioa da, hots, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Aldagaien banantze-metodoa jarraituz, $u(x,t) = X(x)T(t)$ motako soluzio ez-nuluak bilatuko ditugu. Adierazpen hori deribatu partzialetako ekuazioan ordezkatuz,

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

berdintza bete beharko da. $c^2 X(x)T(t)$-rekin zatituz, $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{T''}{c^2 T}$ dugu. Ezkerreko atala x-ren menpeko funtzioa eta eskuineko atala soilik t-ren menpeko funtzioa direnez, identitate hori egia izan dadin existitu behar da λ konstante erreal bat, zeinetarako $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{T''}{c^2 T} = -\lambda$ den.
Hariaren muturrak finkatuta daudenez denboran zehar, $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ eta $u(\ell, t) = X(\ell)T(t) = 0$ izango dira $t > 0$ guztietarako; hortaz, X funtzioa (**??**) Sturm-Liouvilleren problemaren soluzio ez-nulua izan behar da. **??**. proposizioaren arabera, problema horren balio propioak $\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ell}\right)^2$ dira, eta funtzio propioak, hots, soluzio ez-nuluak, $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ eta horren multiploak izango dira. Hortaz, $\lambda = \lambda_n$ hartuz, T honako ekuazio diferentzial honen soluzioa izan behar da:

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2 c^2}{\ell^2} T_n = 0. \tag{12}$$

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal horren soluzioak honako hauek dira:

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

Uhin-ekuazioa deribatu partzialetako ekuazio lineala denez, soluzioen konbinazio linealak soluzioak dira ere bai; beraz,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right)$$

mugalde-baldintzak betetzen dituen uhin-ekuazioaren soluzioa da. Gainera, u-k hasierako baldintzak bete behar ditu. Lehenik eta behin,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x) \tag{13}$$

dugu. f jarraitua da, haren deribatua zatika jarraitua, eta $f(0) = f(\ell) = 0$ dira; beraz, **??**. proposizioaren arabera,

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

bada, (**??**) berdintza betetzen da, konbergentzia uniformea izanik. Era berean,

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = g(x)$$

izatea nahi dugu; hortaz, arestian bezala arrazoituz, honako emaitza hau dugu b_n koefizientetarako:

$$b_n = \frac{\ell}{n\pi c}\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Problemaren soluzioa (**??**) adierazpenaren bidez ematen denean, *Fourierren legea* betetzen dela diogu, [**?**]. Bestalde, mugimendu dardarkari bakoitzak, hots, adierazpeneko batugai bakoitzak, sortutako soinuari *harmoniko* deritzo. Horietatik baxuena $n = 1$ kasuari dagokiona da, eta *oinarrizko harmonikoa* edo *oinarrizkoa* deitzen zaio. Kasu horretan, (**??**) adierazpenetik ondoriozta dezakegu harmoniko guztiak eraiki daitezkeela.

Jakina da soinu bakoitzak lau ezaugarri dituela: intentsitatea, maiztasuna, altuera eta tinbrea. Uhin bat sortzeko gai den maiztasunaren balio minimoari *funtsezko maiztasuna* deritzo, eta φ_0-ren bidez adierazten da. Hari batek φ_0 maiztasunarekin bibratzen duenean, hariaren *funtsezko bibrazio-era* ezarri dela esaten da. Funtzio periodiko baten maiztasuna periodoaren alderantzizkoa dela gogoratuz eta **??**. teorema erabilita, mugimendu dardarkari batek sortutako soinuaren maiztasunaren karakterizazioa emango dugu, bai eta funtsezko bibrazioekin batera doazen bibrazio harmonikoen existentzia bermatzen duen emaitza ere, azken hori hasierako posizioarekiko eta hasierako abiadurarekiko independentea izanda.

10. teorema. *Hari baten gaineko bibrazio-mugimendu baten maiztasunak, φ, honako berdintza hau betetzen du:*

$$\varphi = \frac{c}{2\ell},$$

non ℓ hariaren luzera eta c hariaren elastizitate koefizientea diren. Gainera, bibrazio-mugimendu hori φ, 2φ, 3φ, 4φ,... maiztasundun bibrazio-mugimenduen batuketa gisa adierazten da.

Frogapena. **??**. teorema erabiliz, (**??**) formularen bidez, $u(x,t)$ hari dardarkari baten desplazamendua adieraz daiteke, c_n eta d_n koefizienteak f hasierako posizioaren, eta g hasierako abiaduraren menpekoak izanda; hau da, hari dardarkariak Fourierren legea betetzen du. Bestalde, funtzio trigonometrikoen propietateengatik, existitzen dira α_n eta β_n, $n \in \mathbb{N}$ izanda, zeinetarako

$$c_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + \frac{\ell}{cn\pi} d_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) = \alpha_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{\ell} + \beta_n\right)$$

den, eta, ondorioz,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big) \sin\Big(\frac{cn\pi t}{\ell} + \beta_n\Big)$$

da, α_n eta β_n ere f-ren eta g-ren menpekoak izanda hurrenez hurren. Hala ere, aurreko adierazpeneko batugai bakoitza funtzio periodikoa da t aldagaian, haren periodoa $\Pi_n = \dfrac{2\ell}{cn}$ izanik. Hori horrela, u bera funtzio periodikoa da t aldagaian, haren periodoa $\Pi = \dfrac{2\ell}{c}$ izanik, eta, ondorioz, maiztasuna $\varphi = \dfrac{1}{\Pi} = \dfrac{c}{2\ell}$ izango da. □

Aurreko teoremaren emaitza eta Mersenneren legeak kontuan hartuta, c hariaren elastizitate koefizientearen balioa eta hariaren ezaugarrien arteko lotura deskriba daiteke. Marin Mersenne fraide frantsesa izan zen, filosofo eta zientzialari ospetsu askorekin harremana izateagatik ezaguna, bai eta Matematika arloan zenbakien teorian egindako lanagatik ere, [**?**]. 1627. urtean *Harmonie Universelle (La théorie de la practique de la musique)* liburua argitaratu zuen, eta bertan, bibratzen ari den hari batek sortutako soinuen maiztasuna arautzen duten legeak azaldu zituen lehenengo aldiz. Hona hemen lege horiek Mersennek enuntziatu zituen bezala.

11. teorema. *(Mersenneren legeak) Hari batek sortzen duen soinuaren maiztasunak honako propietate hauek betetzen ditu:*

i) Hariaren luzerarekiko alderantziz proportzionala da.

ii) Hariak jasaten duen tentsioaren erro karratuarekiko zuzenki proportzionala da.

iii) Hariaren dentsitatearen erro karratuarekiko alderantziz proportzionala da.

iv) Hariaren erradioaren alderantziz proportzionala da.

Gauzak horrela, hari-instrumentuen ezaugarriak, **??**. teoremaren emaitza eta Mersenneren legeen baieztapenak kontuan hartuta, c konstantea $\sqrt{\dfrac{\tau}{d\pi r^2}}$ balioaren multiploa da, non d hariaren dentsitatea, τ hariak jasaten duen tentsioa eta r hariaren erradioa diren.

2. oharra. Hari-instrumentuak eskuarekin jotzen direnean, (**??**) formulari esker argi gelditu da harmoniko guztiak eraiki daitezkela. Aldiz, egoera desberdina da hari-instrumentuak arkuarekin jotzen direnean. Kasu horretan bi fase bereizten dira: lehenengoan, arkua hariari itsasten zaio hariari tira eginez; eta, bigarren fasean, arkua hariaren kontra irristatzen edo igurzten da. Hariak arkuarekin igurztean sortzen den uhinen inguratzailea bi parabola dira; hau da, uhinak **??**. irudian ageri diren antzeko bi parabolen artean mantenduko dira.

1. irudia: Uhinen inguratzailea.

Haria non igurzten den kontuan hartuta, **??**. irudiko goiko parabolan beti agertuko da puntu bat parabola bitan banatzen duena. Horrek uhin-ekuazioaren hasierako eta mugalde-baldintzetako probleman baldintza gehigarri bat egotea eragiten du, betiere periodikotasun propietateak mantentzen direla kontuan izanda. Baldintza gehigarri horrekin ebatzi beharreko problema artikulu honetan egiten den azterketatik kanpo gelditzen da, baina hainbat adibide ikus daitezke [**?**] liburuan. Hori horrela, frogatzen da, baldintza guztiak egiazta daitezen, problemaren soluzioaren serie bidezko garapenean soilik harmoniko bakoitiak agertzen direla. Ondorioz, arkuarekin jotzen diren hari-instrumentuetan soilik harmoniko bakoitiak eraiki daitezke.

4. Haize-instrumentuak

Haize-instrumentuak soinua sortzeko gai diren *soinu-hodiak* dira. Musika-tresna horiek gaszutabe bat dute, eta hura kitzikatzean soinua sortzen da. Akustikaren ikuspegitik, soinu-hodiak bi talde handitan sailkatzen dira: hodi irekiak eta hodi itxiak. Hodi irekiak bi zulo edo gehiago dituztenak dira, normalean bi muturrak irekita izanda, hala nola txirula. Hodi itxiek, ordea, zulo bakarra dute; hau da, haizea sartzen den lekuaren kontrako muturra estalita dute, eta horien adibide batzuk dira oboea eta organoetako hodiak.

Hodi batean zehar garraiatzen den airearen bibrazioa ulertzeko, bi aldagai erabiltzen dira: desplazamendua eta presio akustikoa. Bi aldagai horiek dimentsio bateko uhin-ekuazioa betetzen dute, baina fase desberdinekin; hau da, berdinak diren baina maximoak eta minimoak momentu ezberdinetan hartzen dituzten bi uhin izango ditugu. Aintzat hartuko dugu hodiko aireak atseden-posizioa duela eta uhinaren mugimendua posizio horretatik dagoen desplazamenduaren arabera adierazten dela. Beraz, izan bitez x hodian zehar dagoen posizioa, eta $u(x,t)$ airearen desplazamendua x posizioan t unean. Presioak ere badu atseden-balio bat, p_0, giroko airearen presioa hain zuzen ere. Gainera, presio akustikoa, $p(x,t)$, neurtzeko, presio absolutuari, $P(x,t)$-ri, airearen presioa kendu behar diogu, hau da,

$$p(x,t) = P(x,t) - p_0.$$

Hori horrela, Hooken legearen arabera, honako ekuazio hau dugu:

$$p = -B\frac{\partial u}{\partial x},$$

non B airearen *konprimagarritasun modulua* den. Konprimagarritasun modulu hori konprimagarritasun-koefizientearen alderantzizko balioa da, eta material batek konpresio uniformearekiko duen erresistentzia neurtzen du; hau da, materialaren bolumena gutxitu ahal izateko behar den presioaren handiagotzea adierazten du. Airean, konprimagarritasun moduluak $1,42 \cdot 10^5$ Pascaleko balioa hartzen du. Bestalde, Newtonen mugimenduaren bigarren legeak honako berdintza honetara eramaten gaitu:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Beraz, aurreko bi adierazpenak konbinatuz,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

eta

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{14}$$

ekuazioak lortzen ditugu, non $c = \sqrt{B/p_0}$ den. Ekuazio horiek desplazamendurako eta presio akustikorako uhin-ekuazioak dira, hurrenez hurren. Hodiaren azken muturra irekia edo itxia den arabera, problema horren mugalde-baldintzak aztertuko ditugu, kasu bakoitzari dagokion ebazpena lortzeko.

Soinu-hodien mutur irekietan p presio akustikoa nulua izatera behartzen da t-ren balio guztietarako. Mutur itxian, ordea, u desplazamendua nulua da t-ren balio guztietarako, hau da, hodiaren muturrean dagoen uhinaren puntua finko mantentzen da denboran zehar.

Soinu-hodi irekiak estuak izan behar dira haien barnealdetik hedatzen den uhinaren luzerarekiko. Kasu horretan daukagun uhin-ekuazioak beteko dituen mugalde-baldintzak presio akustikorako ℓ luzeradun eta muturretan finkatutako eskuarekin jotzen den hari batek betetzen dituen baldintzak berdinak dira. Hori horrela, honako emaitza hau dugu.

12. teorema. *Soinu-hodi irekiek Fourierren legea egiaztatzen dute. Gainera, oinarrizko harmonikoek*

$$\varphi = \frac{c}{2\ell}$$

maiztasuna dute, non $c = \sqrt{B/p_0}$ *eta* ℓ *hodiaren luzera diren, eta harmoniko guztiak eraiki daitezke.*

Frogapena. Soinu-hodi irekietan, desplazamendua uhin-ekuazioaren soluzioa da. Gainera, hodiaren muturretan presioa nulua da, eta presioa desplazamenduaren x-rekiko deribatu partzialaren multiploa da; beraz, desplazamendua u-ren bidez adierazten bada, $u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$ mugalde-baldintzak bete behar dira, $t > 0$ guztietarako.

??. teoreman jarraitutako prozedura bera errepikatuz, aldagaien banantze-metodoa erabilita $u(x,t) = X(x)T(t)$ bada, X funtzioak (**??**) problemaren soluzio ez-nulua izan behar du. Problema horren balio propioak eta funtzio propioak **??**. proposizioan ematen dira. Bestalde, T funtzioak (**??**) ekuazioaren soluzioa izan behar du, eta, ondorioz, **??**. teoremaren eta **??**. teoremaren emaitzen arabera,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big) \sin\Big(\frac{cn\pi t}{\ell} + \beta_n\Big)$$

da, non α_n eta β_n konstanteak $u(x,0)$ eta $u_t(x,0)$ hasierako baldintzen menpekoak diren. Azkenik, **??**. teoreman gertatzen den bezala, oinarrizko soinuek $\varphi = \dfrac{c}{2\ell}$ maiztasuna dute, eta maiztasun horren multiplo guztiak agertzen dira u-ren harmonikoen bidezko deskonposaketan. □

Soinu-hodi itxien kasuan, mugalde-baldintzak mistoak dira: desplazamendua nulua da itxita dagoen muturrean, eta kontrako muturrean, aldiz, presioa da anulatzen dena. Beraz, **??**. proposizioan aztertutako problema dugu. Hori dela eta, soinu-hodi itxietarako honako emaitza hau betetzen da.

13. teorema. *Soinu-hodi itxiek Fourierren legea egiaztatzen dute. Gainera, oinarrizko harmonikoek*

$$\varphi = \frac{c}{4\ell}$$

maiztasuna dute, non $c = \sqrt{B/p_0}$ *eta* ℓ *hodiaren luzera diren, eta soilik harmoniko bakoitiak eraiki daitezke.*

Frogapena. Soinu-hodi itxietan mutur ireki bat eta mutur itxi bat daude. Mutur irekian presioa nulua da; aldiz, mutur itxian haizearen desplazamendua da nulua dena. Beraz, desplazamendua honako mugalde-baldintza hauek betetzen dituen uhin-ekuazioaren soluzioa da:

$$u_x(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Berriz, aldagaien banantze-metodoa erabilita, $u(x,t) = X(x)T(t)$ hartuz, eta uhin-ekuazioan ordezkatuz, X funtzioa (**??**) problemaren soluzio ez-nulua izango da. **??**. proposizioan ematen diren balio propioak eta funtzio propioak erabiliz, eta **??**. teoremaren frogan bezala arrazoituz,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\Big(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\Big) \sin\Big(\frac{2n-1}{2\ell} c\pi t + \beta_n\Big)$$

dela lortzen da, non α_n eta β_n koefizienteak hasierako desplazamenduaren eta abiaduraren menpekoak diren. Ondorioz, maiztasuna $\varphi = \dfrac{c}{4\ell}$ da. Kasu honetan, soilik maiztasun horren multiplo bakoitiak agertzen dira u-ren adierazpenean, beraz, soilik harmoniko bakoitiak eraiki daitezke. □

Haize-instrumentuetan badaude zenbait salbuespen; izan ere, haizezko musika-tresna guztiek sortzen dituzten bibrazioek ez dute dimentsio bateko uhin-ekuazioa betetzen. Alde batetik, badaude mutur bat irekita duten, baina soinu-hodi itxi gisa jokatzen duten musika-tresnak, hala nola klarinetea. Bestalde, haize-instrumentuen salbuespen horien artean, batzuk hari-instrumentuetarako aztertutakoarekin bat datoz; izan ere, sortzen dituzten bibrazioak Besselen funtzioen bidez adieraz daitezke. Horien adibide dira **??**. irudian ageri diren tronpeta, tronboia, tronpa eta tuba, metalezko haize-instrumentuak, alegia.

2. irudia: Metalezko haize-instrumentu batzuk.
(https://laclasederapha.files.wordpress.com/2016/02/viento-metal.png?w=529)

Musika-tresna horiek zeharkako sekzio aldakorreko horma gogorra duten hoditzat har daitezke, zeharkako sekzio horren garrantzia hodiaren forma zehatza eta kurbadura baino handiagoa izanda. $A(x)$ funtzioa zeharkako sekzioaren azalera da, non x-k tutuan zehar dagoen posizioa adierazten duen. Egoera horretan, uhin-fronteak ia lauak direla, eta hodiaren norabide berdinean hedatzen direla onar daiteke, eta (**??**) ekuazioa berridatz dezakegu *Webster tronparen ekuazioa* lortzeko:

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

edo, baliokidea dena,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{15}$$

non $c = \sqrt{B/p_0}$ den. Berriro ere aldagaien banantze-metodoa erabil daiteke (**??**) ekuazioaren soluzioak lortzeko.

Bada $A(x)$ funtzioaren kasu berezi bat, Fisikaren ikuspuntutik garrantzia duena, metalezko instrumentuen formaren hurbilketa onak ematen dituelako eta soluzio ezagunak dituen ekuazioa lortzen delako. Hori da, hain zuzen ere, *Besselen tronpa*ren kasua, zeharkako sekzioaren erradiorako eta azalerarako honako adierazpen hauek dituena, hurrenez hurren:

$$R(x) = bx^{-r}, \quad A(x) = \pi(R(x))^2 = Cx^{-2r}.$$

Kasu horretan, $C = \pi b^2$ da, eta x koordenatuaren jatorria eta b konstantea aukeratuta daude hodiaren bi muturren erradioen balio egokiak lortzeko. Gainera, $A(x)$-ren adierazpena (**??**) ekuazioan ordezkatzen dugunean, C konstantea desagertu egiten da. Bestalde, r parametroa *zabaltze parametroa* da, eta tronparen zabaltzea determinatzen du. $r \geq 0$ dela onartuko dugu. Hori horrela, honako emaitza hau dugu Besselen tronparen presio akustikorako.

14 . teorema. *Izan bitez $C > 0$, $r \geq 0$, $A(x) = Cx^{-2r}$ haize-instrumentu baten zeharkako azalera, eta $\ell > 0$ instrumentuaren tutuaren luzera. Izan bedi $p(x,t)$ haizearen presioa hodiaren x puntuan eta t unean, eta demagun $p(x,0) = f(x)$ eta $p_t(x,0) = g(x)$ direla, non $f, g\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ jarraituak, f', g' zatika jarraituak, eta $f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$ diren. Orduan,*

$$p(x,t) = x^{r+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} J_{r+\frac{1}{2}}(\alpha_n x/\ell)(a_n \cos(c\alpha_n t/\ell) + b_n \sin(c\alpha_n t/\ell))$$

da, non

$$a_n = \frac{2}{\ell^2\big(J_{r+\frac{3}{2}}(\alpha_n)\big)^2}\int_0^\ell f(x)J_{r+\frac{1}{2}}(\alpha_n x/\ell)x^{-r+\frac{1}{2}}dx, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

eta

$$b_n = \frac{2}{c\alpha_n\ell\big(J_{r+\frac{3}{2}}(\alpha_n)\big)^2}\int_0^\ell g(x)J_{r+\frac{1}{2}}(\alpha_n x/\ell)x^{-r+\frac{1}{2}}dx, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{17}$$

diren, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida $J_{r+\frac{1}{2}}$ Besselen funtzioaren zero positiboena izanik.

Frogapena. $A(x) = Cx^{-2r}$ adierazpena (**??**) ekuazioan ordezkatuz, honako deribatu partzialetako ekuazio hau lortzen da:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2c^2 r}{x}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Aldagaien banantze-metodoa erabilita, $p(x,t) = X(x)T(t)$ motako soluzioa bilatzen dugu. Adierazpen hori aurreko ekuazioan ordezkatuz,

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t) - \frac{2c^2r}{x}X(x)T(t)$$

da. Orain, $c^2X(x)T(t)$-rekin zatitzen badugu,

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{2r}{x}\frac{X'(x)}{X(x)}$$

berdintza dugu. Ezkerreko atala t-ren menpeko funtzioa denez, eta eskuineko atala, ordea, x-ren menpekoa, existitu behar da $\lambda\in\mathbb{R}$, non

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{2r}{x}\frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

den. Has gaitezen X-k bete behar duen ekuazioa aztertzen, hots,

$$X'' - \frac{2r}{x}X' + \lambda X = 0. \tag{18}$$

Egin dezagun $X(x) = x^{r+1/2}\Phi(x)$ aldagai-aldaketa. Orduan,

$$\begin{aligned} X'' - \frac{2r}{x}X' + \lambda X &= \Big(r^2 - \frac{1}{4}\Big)x^{r-3/2}\Phi(x) + 2\Big(r+\frac{1}{2}\Big)x^{r-1/2}\Phi'(x) + x^{r+1/2}\Phi''(x) \\ &\quad - 2r\Big(r+\frac{1}{2}\Big)x^{r-3/2}\Phi(x) - 2rx^{r-1/2}\Phi'(x) + \lambda x^{r+1/2}\Phi(x) \\ &= x^{r-1/2}\left(x\Phi''(x) + \Phi'(x) - \Big(r+\frac{1}{2}\Big)^2\frac{1}{x}\Phi(x) + \lambda x\Phi(x)\right). \end{aligned}$$

Beraz, X (**??**) ekuazioaren soluzioa da baldin eta soilik baldin

$$\big(x\Phi'(x)\big)' - \Big(r+\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\Phi(x)}{x} + \lambda x\Phi(x) = 0$$

bada. Gainera, presioa ondo definituta egoteko tronparen ahoan, $X(0)$ eta, ondorioz, $\Phi(0)$, ondo definituta egon behar da. Azkenik, presioa tronparen irteeran nulua izateko, $\Phi(\ell) = 0$ izatea behar dugu.

Laburbilduz, Φ funtzioa (**??**) Sturm-Liouvilleren problemaren soluzio ez-nulua izan behar da, $p = r + \frac{1}{2}$ izanik. **??**. proposizioaren arabera, $\lambda = \lambda_n = \alpha_n^2/\ell^2$ eta $\Phi(x) = J_{r+\frac{1}{2}}\Big(\frac{\alpha_n x}{\ell}\Big)$ hartu behar dira.

$\lambda = \alpha_n^2/\ell^2$ balioa T-ren ekuazioan ordezkatuz,

$$T_n(t) = a_n \cos(c\alpha_n t/\ell) + b_n \sin(c\alpha_n t/\ell)$$

dugu, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ izanik. (**??**) ekuazioa lineala denez, uhin-ekuazioarekin gertatzen den bezala, soluzioen konbinazio linealak ere soluzioak dira. Ondorioz,

$$p(x,t) = x^{r+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} J_{r+\frac{1}{2}}(\alpha_n x/\ell)(a_n \cos(c\alpha_n t/\ell) + b_n \sin(c\alpha_n t/\ell)).$$

a_n eta b_n koefizienteak lortzeko, presioak bete behar dituen hasierako baldintzak erabiliko ditugu. Lehenengo eta behin,

$$p(x,0) = x^{r+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{r+\frac{1}{2}}(\alpha_n x/\ell) = f(x)$$

nahi dugunez, a_n koefizientea $\tilde{f}(x) = x^{-r-\frac{1}{2}} f(x)$ funtzioaren Fourier-Besselen seriearen n-garren koefizientea da. (**??**) kontuan hartuz, (**??**) adierazpenak ematen du a_n. Antzera,

$$p_t(x,0) = x^{r+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\alpha_n b_n}{\ell} J_{r+\frac{1}{2}}(\alpha_n x/\ell) = g(x),$$

eta, ondorioz, b_n koefizientea $\tilde{g}(x) = x^{-r-\frac{1}{2}} \dfrac{\ell}{c\alpha_n} g(x)$ funtzioaren Fourier-Besselen seriearen n-garren koefizientea da, (**??**) adierazpenean agertzen dena, hain zuzen. □

5. Perkusio-instrumentuak

Sarreran aipatu den bezala, perkusio-instrumentuak bi talde handitan sailkatzen dira: menbranofonoak eta idiofonoak. Nahiz eta perkusio-instrumentuek Fourierren legea ez egiaztatu, menbranofonoek sortutako bibrazioek uhin-ekuazioa bi dimentsiotan egiaztatzen dute. Hori dela eta, menbranofonoek sortzen dituzten bibrazioak aztertzeko, hari-instrumentuetarako erabili dugun problema bera erabiliko dugu, kasu honetan gure eremua mugetatik lotutako mintz zirkularra dela kontuan hartuz, [**?**]. Eremua zirkularra izateak koordenatu polarrak erabili beharra dakar. Instrumentuaren mintza OXY planoko jatorrian zentratutako zirkulu batekin identifikatuko dugu, baina puntuen (x,y) koordenatu kartesiarrak erabili beharrean, (r,θ) koordenatu polarretan idatziko ditugu uhin-ekuazioa eta hasierako eta mugalde-baldintzak, gogoratuz $r = \sqrt{x^2+y^2}$ eta $\tan\theta = y/x$ direla. Hori horrela, honako teorema hau enuntzia dezakegu.

15. teorema. *Izan bitez $c > 0$ menbranofono baten mintz zirkularraren elastizitate-koefizientea eta $\rho > 0$ mintzaren erradioa. Izan bedi $v(r,\theta,t)$ mintzaren (r,θ) koordenatu polarretako puntuaren desplazamendua t unean eta demagun $v(r,\theta,0) = f(r,\theta)$ eta $v_t(r,\theta,0) = g(r,\theta)$ direla, $f,g\colon [0,\rho]\times[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ jarraituak eta haien lehen ordenako deribatu partzialak zatika jarraituak izanik. Demagun $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)$ eta $\lim_{r\to 0} g(r,\theta)$ finituak direla, eta $f(\rho,\theta) = 0$, $f(r,-\pi) = f(r,\pi)$, $g(\rho,\theta) = 0$ eta $g(r,-\pi) = g(r,\pi)$ direla, $r \in [0,\rho]$ eta $\theta \in [-\pi,\pi]$ guztietarako. Orduan,*

$$\begin{aligned} v(r,\theta,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0,n}}{2} \cos(c\alpha_{0,n}t/\rho) + \frac{B_{0,n}}{2} \sin(c\alpha_{0,n}t/\rho) \right) J_0(\alpha_{0,n} r/\rho) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(A_{p,n}\cos(c\alpha_{p,n}t/\rho) + B_{p,n}\sin(c\alpha_{p,n}t/\rho)\right) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)\cos(p\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(C_{p,n}\cos(c\alpha_{p,n}t/\rho) + D_{p,n}\sin(c\alpha_{p,n}t/\rho)\right) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)\sin(p\theta) \end{aligned} \tag{19}$$

da, non $\alpha_{p,n}$ Besselen p ordenako funtzioaren n-garren zero positiboa den, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, eta

$$\begin{aligned}
A_{p,n} =& \frac{2}{\pi\rho^2\big(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\big)^2}\int_0^\rho\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\cos(p\theta)rd\theta dr,\\
B_{p,n} =& \frac{2}{c\alpha_{p,n}\pi\rho\big(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\big)^2}\int_0^\rho\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta)J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\cos(p\theta)rd\theta dr,\\
C_{p,n} =& \frac{2}{\pi\rho^2\big(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\big)^2}\int_0^\rho\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\sin(p\theta)rd\theta dr,\\
D_{p,n} =& \frac{2}{c\alpha_{p,n}\pi\rho\big(J_{p+1}(\alpha_{p,n})\big)^2}\int_0^\rho\int_{-\pi}^{\pi} g(r,\theta)J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\sin(p\theta)rd\theta dr
\end{aligned}$$

diren.

Frogapena. Esan den bezala, menbranofonoen mintzaren desplazamenduak bi dimentsioko uhin-ekuazioa betetzen du, hots, $v_{tt} = c^2\Delta v$, non Δv v-ren laplacearra den, koordenatu polarretan idatzita. Beraz, honako deribatu partzialetako ekuazio hau dugu:

$$u_{tt} = c^2\Delta v = c^2\Big(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}\Big). \tag{20}$$

Aldagaien banantze-metodoa jarraituz, idatz dezagun

$$v(r,\theta,t) = H(r,\theta)T(t).$$

Adierazpen hori (**??**) ekuazioan ordezkatuz,

$$H(r,\theta)T''(t) = c^2\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(r,\theta)T(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta)T(t) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}(r,\theta)T(t)\Big)$$

berdintza lortzen da, eta gaiak berrordenatuz, ekuazio hori betetzeko aukera bakarra

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{H(r,\theta)}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}(r,\theta)\right) = -\lambda$$

izatea da, non $\lambda \in \mathbb{R}$ den. Hortaz, aurreko adierazpenetik, honako bi ekuazio hauek lortzen ditugu T-rako eta H-rako, hurrenez hurren:

$$T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0, \tag{21}$$

$$H_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}H_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}H_{\theta\theta}(r,\theta) + \lambda H(r,\theta) = 0.$$

H-rako betetzen den ekuazioan berriz aldagaien banantze-metodoa aplikatuz $H(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ bada,

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) + \lambda R(r)\Theta(\theta) = 0$$

adierazpena lortzen da. Lehen bezala, ekuazio hori beteko da existitzen bada $\mu \in \mathbb{R}$ non

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r)\right) = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \mu$$

den. Hori horrela, honako bi ekuazio hauek lortzen ditugu:

$$\Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0, \tag{22}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0. \tag{23}$$

Ondorioz, problemaren soluzioa lortzeko, hots, T, Θ eta R lortzeko, (**??**), (**??**) eta (**??**) ekuazioak ebatzi behar ditugu, hurrenez hurren, kontuan izanda hasierako eta mugalde-baldintzak.

Has gaitezen (**??**) ekuazioarekin. Desplazamendua leuna izateko, v periodikoa izan behar da θ aldagaian, eta horrek $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$ eta $\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$ izatea inplikatzen du; hau da, honako Sturm-Liouvilleren problema periodiko hau dugu:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi). \end{cases}$$

??. proposizioaren arabera, problema horren balio propioak eta horiei elkartutako funtzio propioak p^2, eta $\sin(p\theta)$ eta $\cos(p\theta)$ dira, hurrenez hurren, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ izanda.

Jarraian, bila dezagun R, (**??**) ekuazioaren soluzioa, hain zuzen ere. $\mu = p^2$ dela jakinda, eta $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ izanda,

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - p^2)R(r) = 0$$

ekuazioa betetzen da. Gainera, v ondo definituta egon dadin $r = 0$-n, R ere ondo definituta egon behar da jatorrian. Azkenik, mintza mugetatik lotuta dagoenez, R-rentzako honako Sturm-Liouvilleren problema singular hau lortzen da:

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - p^2)R(r) = 0, \\ \lim_{r\to 0^+} R(r) \in \mathbb{R}, \\ R(\rho) = 0. \end{cases}$$

??. proposizioaren arabera, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bakoitzerako, problema horren balio propioak eta funtzio propioak $\lambda_{p,n} = \alpha_{p,n}^2/\rho^2$ eta $R_{p,n}(r) = J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)$ dira, hurrenez hurren, $n \in \mathbb{N}$ izanda.

Azkenik, ebatz dezagun (**??**) ekuazioa T funtzioaren adierazpena lortzeko. Izan bedi $\lambda = \alpha_{p,n}^2/\rho^2$, $n \in \mathbb{N}$ izanda. Orduan, T-rentzako ekuazioaren soluzio orokorra honako hau dela dakigu:

$$T_{p,n}(t) = C_1 \cos(c\alpha_{p,n}t/\rho) + C_2 \sin(c\alpha_{p,n}t/\rho), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hortaz, v lortutako R, Θ eta T funtzioen biderkadura izango da. Gainera, deribatu partzialetako ekuazioa lineala denez, soluzioen konbinazio linealak eta konbinazio lineal infinituak ere soluzioak izango dira, konbergentziarako baldintza egokiak betetzen badira. Hortaz,

$$\begin{aligned} v(r,\theta,t) = &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \left(\tilde{A}_{p,n}\cos(c\alpha_{p,n}t/\rho) + \tilde{B}_{p,n}\sin(c\alpha_{p,n}t/\rho)\right) J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\cos(p\theta) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\tilde{C}_{p,n}\cos(c\alpha_{p,n}t/\rho) + \tilde{D}_{p,n}\sin(c\alpha_{p,n}t/\rho)\right) J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\sin(p\theta) \end{aligned}$$

da, non $\tilde{A}_{p,n}, \tilde{B}_{p,n}, \tilde{C}_{p,n}$ eta $\tilde{D}_{p,n}$ konstante errealak diren.

Bukatzeko, konstante horien balioak zehaztu behar dira hasierako baldintzak erabilita. Lehenengo hasierako baldintzatik, honako hau dugu:

$$\begin{aligned} v(r,\theta,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\tilde{A}_{p,n}J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\cos(p\theta) + \sum_{p=1}^{\infty}\tilde{C}_{p,n}J_p(\alpha_{p,n}r/\rho)\sin(p\theta)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\tilde{A}_{p,n}\cos(p\theta) + \tilde{C}_{p,n}\sin(p\theta)\right) J_p(\alpha_{p,n}r/\rho) = f(r,\theta). \end{aligned}$$

??. teorema kontuan hartuta,

$$f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{0,n}}{2} J_0(\alpha_{0,n} r/\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(a_{p,n}\cos(p\theta) + c_{p,n}\sin(p\theta)\right) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho)$$

identitatea dugu, non $a_{p,n}$ eta $c_{p,n}$ (**??**) eta (**??**) adierazpenetan definitutako koefizienteak diren, hurrenez hurren. Beraz, $v(r,\theta,0)$-ren eta $f(r,\theta)$-ren adierazpenak berdinduz, $\tilde{A}_{p,n}$ eta $\tilde{C}_{p,n}$ koefizienteak lortzen dira. Era berean, bigarren hasierako baldintza erabilita, $\tilde{B}_{p,n}$ eta $\tilde{D}_{p,n}$ koefizienteen balioak zehaztu daitezke. Alde batetik, deribatuaren gaineko hasierako baldintzatik,

$$v_t(r,\theta,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\frac{c\alpha_{p,n}}{\rho}\tilde{B}_{p,n}\cos(p\theta) + \frac{c\alpha_{p,n}}{\rho}\tilde{D}_{p,n}\sin(p\theta)\Big) J_p(\alpha_{p,n} r/\rho) = g(r,\theta)$$

dela ondorioztatzen da; eta, bestetik,

$$g(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{0,n}}{2} J_0(\alpha_{0,n} r/\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(b_{p,n}\cos(p\theta) + d_{p,n}\sin(p\theta)\right) J_p(\alpha_{p,n} r)$$

da, non $b_{p,n}$ eta $d_{p,n}$ (**??**) eta (**??**) adierazpenetan definitutako koefizienteak diren, hurrenez hurren. Ondorioz, $v_t(r,\theta,0)$-ren eta $g(r,\theta)$-ren adierazpenak berdinduz, $\tilde{B}_{p,n}$ eta $\tilde{D}_{p,n}$ koefizienteetarako formulak ditugu.

Guztia konbinatuz, v funtzioa, (**??**) adierazpenaren bidez emanda dator, non $A_{p,n}, B_{p,n}, C_{p,n}$ eta $D_{p,n}$ koefizienteak enuntziatuan agertzen diren formulen bidez kalkulatzen diren. □

Lortu dugun soluzioak mugetatik lotutako mintz zirkular bateko bibrazioak aztertzeko balio du. Hala ere, ez da hori menbranofono guztien kasua. Badago *adufe* izeneko bi aldeetatik jotzen den danbor karratua (**??**. irudia). Instrumentu hori Portugalgo eta Galiziako emakumeek jotzen dute gehien bat, eta inoiz ez gizonek. Kasu honetan, instrumentu horren bibrazioak aztertu ahal izateko, aurreko problema koordenatu kartesiarretan planteatu beharko genuke; hau da, mugetatik lotuta dagoen mintz karratu baten bibrazioek betetzen duten problema da ebatzi behar duguna. Adufearen mintzaren aldearen luzera ℓ bada, $[0,\ell] \times [0,\ell]$ tarteen biderkadura kartesiarrarekin identifikatuko dugu, eta deskribatu nahi dugu mintzaren norabide normalarekiko desplazamendua pausagune posiziotik, adufea jotzen denean.

3. irudia: Adufea, karratu itxuradun danborra.
(https://www.soinuenea.eus/files/multimediak/irudiak/txikiak/4169_1.jpg)

16. teorema. *Izan bitez $c > 0$ adufearen mintzaren elastizitate-koefizientea, eta $\ell > 0$ adufearen aldearen luzera. Izan bedi $u(x, y, t)$ mintzaren (x, y) puntuko desplazamendua t unean eta demagun $u(x, y, 0) = f(x, y)$ eta $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ direla, $f, g\colon [0, \ell] \times [0, \ell] \to \mathbb{R}$ jarraituak, haien lehen ordenako deribatu partzialak zatika jarraituak izanik, non $f(0, y) = f(\ell, y) = f(x, 0) = f(x, \ell) = 0$ eta $g(0, y) = g(\ell, y) = g(x, 0) = g(x, \ell) = 0$ diren $x \in [0, \ell]$ eta $y \in [0, \ell]$ guztietarako. Orduan,*

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}y\right)\cos\left(\frac{c\sqrt{n^2+m^2}\pi}{\ell}t\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ell b_{n,m}}{\pi c\sqrt{n^2+m^2}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}y\right)\sin\left(\frac{c\sqrt{n^2+m^2}\pi}{\ell}t\right) \quad (24)$$

da, non $n, m \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$a_{n,m} = \frac{4}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}y\right)\,dxdy, \quad (25)$$

$$b_{n,m} = \frac{4}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell g(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ell}y\right)\,dxdy \quad (26)$$

diren.

Frogapena. Mintzaren desplazamenduak bi dimentsioko uhin-ekuazioa betetzen du, hots,

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad \forall 0 < x < \ell,\ 0 < y < \ell.$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliz, $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ motako soluzioak bilatuko ditugu. Uhin-ekuazioan ordezkatuz,

$$XYT'' = c^2\big(X''YT + XY''T\big)$$

lortzen da, edo baliokidea dena,

$$T'' = c^2T\Big(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\Big).$$

Beraz, existitu behar da $\lambda \in \mathbb{R}$, zeinetarako $T'' + \lambda c^2T = 0$ eta $\dfrac{X''}{X} + \dfrac{Y''}{Y} = -\lambda$ diren. Azken berdintza horretan, X x-ren menpeko funtzioa eta Y y-ren menpeko funtzioa direla kontuan izanda, existitu behar da $\mu \in \mathbb{R}$, zeinetarako $X'' + \mu X = 0$ eta $Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0$ diren.
Orain, mintza mugetatik lotuta dagoenez, $x = 0$ eta $x = \ell$ zuzenkietan desplazamendua nulua da denboran zehar; beraz, X honako Sturm-Liouvilleren problema honen soluzio ez-nulua izan behar da:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

??. proposizioaren arabera, problema horren balio propioak $\mu_n = \left(\dfrac{n\pi}{\ell}\right)^2$ dira, haiei elkartutako funtzio propioak $X_n(x) = \sin\Big(\dfrac{n\pi x}{\ell}\Big)$ izanik, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Beraz, μ_n parametroen balio horiekin, eta $y = 0$, $y = \ell$ zuzenkien gainean ere desplazamendua nulua dela kontuan hartuz, Y-rentzako honako Sturm-Liouvilleren honako problema hau lortzen dugu:

$$\begin{cases} Y'' + \Big(\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}\Big)Y = 0. \\ Y(0) = Y(\ell) = 0, \end{cases}$$

Y-rentzako lortu dugun problema X-rentzat lortu dugun problema bera da. Hortaz, problema horrek soluzio ez-nuluak izan ditzan, existitu behar da $m \in \mathbb{N}$ zeinetarako $\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2} = \dfrac{m^2\pi^2}{\ell^2}$ den, eta horrela,

$$Y_m(y) = \sin\Big(\frac{m\pi y}{\ell}\Big)$$

soluzio ez-nuluak lortuko genituzke.

Azkenik T-k bete behar duen ekuazio diferentzialean $\lambda_{n,m} = \dfrac{\pi^2}{\ell^2}(n^2+m^2)$ balioa ordezkatuz, $T'' + \lambda_{n,m}T = 0$ ekuazioa lortzen da, $n, m \in \mathbb{N}$ izanda, eta haren soluzio orokorra honako hau da:

$$T_{n,m}(t) = a_{n,m}\cos\left(\frac{c\sqrt{n^2+m^2}\pi}{\ell}t\right) + b_{n,m}\sin\left(\frac{c\sqrt{n^2+m^2}\pi}{\ell}t\right).$$

X-ren, Y-ren eta T-ren soluzioen formulak bilduz, eta bi dimentsioko uhin-ekuazioa lineala dela kontuan hartuz, u-ren (**??**) adierazpena lortzen da. Problemaren hasierako baldintzak kontuan izanda, $a_{n,m}$ eta $b_{n,m}$ koefizienteak lortuko ditugu. Hori horrela,

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\sin\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\sin\Big(\frac{m\pi}{\ell}y\Big) = f(x,y)$$

bete behar denez, eta $\{X_nY_m\}_{n,m=1}^{\infty}$ $L^2((0,\ell)\times(0,\ell))$ espazioaren oinarri ortogonala denez, $a_{n,m}$ koefizienteetarako (**??**) adierazpena dugu. Era berean,

$$u_t(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c\sqrt{n^2+m^2}\pi}{\ell} b_{n,m}\sin\Big(\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\sin\Big(\frac{m\pi}{\ell}y\Big) = g(x,y)$$

berdintzatik (**??**) formula ondorioztatzen da $b_{n,m}$ koefizienteetarako. □

Jakina da perkusio-instrumentuak menbranofonoetan eta idiofonoetan sailkatzen direla. Idiofonoei dagokienez, haiek sortzen dituzten bibrazioak, oro har, ezin dira adierazi uhin-ekuazioa bi dimentsiotan erabilita. Hala ere, gongaren kasuan adibidez, Besselen funtzioen teoria sakonago lantzea beharrezkoa da haren bibrazioak aztertzeko, [**?**]. Kasu horretan erabiltzen diren funtzioak Besselen funtzio hiperbolikoak dira, aldagai konplexuko Besselen lehen klaseko funtzioekin erlazionatuta daudenak, alegia, [**?**]. Erlazio hori $\sinh$ eta $\cosh$ funtzio hiperbolikoek $\sin$ eta $\cos$ funtzio trigonometrikoekin duten erlazio bera da. Gonga jotzean sortzen diren bibrazioak funtzio trigonometrikoen, Besselen lehen klaseko funtzioen eta Besselen funtzio hiperbolikoen konbinazio linealen bidez adieraz daitezke, betiere mugalde eta hasierako baldintza egokiak erabilita.

Lanari amaiera emateko, aipatzekoa da akustikaren oinarrizko ekuazioa uhin-ekuazioa hiru dimentsiotan dela, soinua sortzeko airearen mugimendua deskribatzen duen ekuazioa, hain zuzen ere, [**?**]. Akustika soinuen ekoizpena, transmisioa, harrera, kontrola eta entzumena aztertzen dituen Fisikaren atala da. Akustikaren kasuan, haize-instrumentuekin aztertutako antzeko egoera dugu. Gogora dezagun presio akustikoa, p, presio absolutuari, P-ri, airearen presioa, p_0, kenduta lortzen dela. Hiru dimentsiotan, p lau aldagaiko funtzioa da, eta $u(x,y,z,t)$ desplazamendu-eremu bektorialarekin erlazionatuta dago jarraian aipatuko ditugun bi ekuazioen bidez. Lehenengo ekuazioa, haize-instrumentuetarako gertatu den bezala, Hooken legea da; honela idatz daitekeena:

$$p = -B\nabla\cdot u,$$

non B airearen *konprimagarritasun modulua* den. Bestalde, Newtonen mugimenduaren bigarren legeak, honako ekuazio honetara eramaten gaitu:

$$\nabla p = -p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Bi ekuazioak konbinatzen baditugu, honako adierazpen honetara heltzen gara:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{27}$$

non $c = \sqrt{B/p_0}$ den. Beraz, p-k uhin-ekuazioa hiru dimentsiotan egiaztatzen du. Eremu itxietan, mugalde-baldintzak $\nabla p = 0$ dira t-ren balio guztietarako eremuaren hormetan. Gainera, badago egoera erabilgarri bat, non uhin-ekuazioa hiru dimentsiotan erraz ebatz daitekeen. Demagun kontzertu-areto ideala dugula; hau da, simetria esferikoa bere osotasunean duen aretoa. Kontuan hartuta laplacearra koordenatu esferikoetan

$$\Delta v = v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}v_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}v_\varphi$$

dela, presio akustikorako hiru dimentsioko uhin-ekuazioa koordenatu esferikoetan idatziz, angeluekiko menpekotasunik ez duen honako adierazpen erradial hau lortzen dugu:

$$\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rp)}{\partial t^2},$$

non r jatorrirainoko distantzia den. Aintzat hartuz rp aldagai dependentea dela, lortutako adierazpena dimentsio bateko uhin-ekuazioa da. Dena den, praktikan ez dira lantzen osotasunean simetria esferikoak dituzten eremuak; izan ere, eremu horiek ez dira errealitatera hurbiltzen. Ohikoa da antzokiak eta aretoak esferikoak ez izatea. Hala ere, presio akustikorako hiru dimentsioko uhin-ekuazioa betetzen jarraitzen da areto horietan. Egoera horretan, (**??**) ekuazioa koordenatu esferikoetan idaztean, angeluekiko menpekotasuna agertuko da, eta ezinezkoa da dimentsio bateko uhin-ekuaziora heltzea. Horrek hiru dimentsioko uhin-ekuazioa ebatzi beharra dakar, eta bide horretan sakondu nahi izango bagenu, Legendreren polinomioen inguruko teoria aztertu beharko genuke.

Bibliografia

[1] BENSON, D. 2008. *Music: a Mathematical Offering.* University of Aberdeen, Scotland.

[2] DE LA HOZ, I. 2022. *Uhin-ekuazioa eta Musika.* Matematikako gradu amaierako lana, UPV/EHU, Leioa.

[3] SEELEY, R. T. 1970. *Introducción a las series e integrales de Fourier.* Ed. Reverté, Bartzelona.

[4] FOLLAND, G. B. 1992. *Fourier Analysis and Its Applications.* American Mathematical Soc., Rhode Island.

[5] ARRIZABALGA, N. eta RIVAS, J. 2020. *Ekuazio Diferentzialak.* Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, Leioa.

[6] JOHN, F, 1981. *Partial Differential Equations.* Ed. Springer-Verlag, New York.

[7] SIMMONS, F, 1977. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.* Ed. McGraw Hill, New York.

[8] WATSON, G. N. 1995. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions,* Cambridge Mathematical Library, London.

[9] BASSO, G. 2001. *Análisis espectral. La transformada de Fourier en la música.,* Ediciones Al Margen, La Plata.

[10] MacTutor Index. 2023. University of St Andrews, Scotland. *M. Mersenne,* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mersenne/.

[11] TRANTER, C. J. 1968. *Bessel Functions with some Physical Applications.* Hodder Arnold, London.