

Homogeneizazio asintotikoa eta haren aplikazioak ekuazio diferentzialen analisian

(Asymptotic homogenization and its applications in the analysis of differential equations)

Iker Irigoien Garaño

Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

Laburpena: Artikulu honetan homogeneizazio asintotikoaren teoria matematikoa aurkeztea dugu helburu. Homogeneizazioa, koefiziente oszilakor bizkorreko ekuazio diferentzialak aztertzeke metodo bat denak, material konposatu baten egitura mikroskopikoa kontuan izanik haren propietate makroskopikoak deskribatzen datza. Hemen, jakintza arlo horren oinarritzko emaitzak aurkeztuko ditugu. Halaber, gorputz ez-homogeneo baten zeharreko beroaren fluxua modelizatzen duen ekuazio baten soluzio ahulen portaera aztertuko dugu, artikuluan zehar garatuko ditugun emaitza teorikoen bidez.

Hitz-gakoak: beroaren fluxuaren ekuazioa, fisika matematikoa, homogeneizazioa.

Abstract: *The purpose of this article is to introduce the mathematical theory of asymptotic homogenization. Homogenization, which is a method for studying differential equations with rapidly oscillating coefficients, describes the macroscopic properties of a composite material by taking into account properties of the microscopic structure. In particular, we are going to see the base results of this field. Likewise, we are going to analyze the behavior of the weak solutions of an equation which models the heat flow in a non-homogeneous body by means of theoretical results of homogenization theory that we will develop throughout the article.*

Key-words: *heat flow equation, mathematical physics, homogenization.*

***Harremanetan jartzeko/Corresponding author:** Iker Irigoien Garaño, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU.
ikeririgar@gmail.com

Nola aipatu/How to cite: Irigoien garaño, Iker «Homogeneizazio asintotikoa eta haren aplikazioak ekuazio diferentzialen analisian», Ekaia 48, XX-XX, DOI: <https://doi.org/10.1387/ekaia.25135>

Jasoa: irailak 24, 2023; Onartua: otsailak 18, 2025
ISSN 0214-9001-eISSN 2444-3225 / ©2025 UPV/EHU



Obra Creative Commons Atribución 4.0 Internacional-en lizentzian dago

1 SARRERA

Kontsidera dezagun gelaxka moduko $\Omega = [0, L]$ tartea okupatzen duen gorputza, eta demagun γ funtzioak gorputzaren zeharreko beroaren eroankortasuna deskribatzen duela. Gorputza homogeneoa edo heterogeneoa izan daiteke. Homogeneoa izateak esan nahi duena da gorputza osatzen duten osagaien izaera edo propietate beretsuak direla. Heterogeneoa izateak esan nahi duena da gorputza osatzen duten osagaien izaera ezberdina dutela. Adibide bana ematearren, brontzea ez-tainuarekin eta kobreakin eratutako substantzia homogeneo bat da (halako substantziei *aleazio* deitzen zaie), baina ura eta olio nahasterakoan eratzen den substantzia heterogeneoa da.

Gorputza homogeneoa bada, orduan, γ jarraitua izango da gorputz osoan zehar. Gorputza heterogeneoa bada, ordea, beroaren eroankortasunak jauziak izan ditzake gorputzaren osagai desberdinen artean. Beraz, γ ez da zertan jarraitua izan behar, jauzi bat egin dezakeelako osagai desberdinak banatzen dituzten eremuen artean. Bestalde, gorputzaren izaera heterogeneoa izan arren, gerta daiteke gorputzaren barruan egitura jakin baten kopia ugari topatzea, bata bestearen ostean uniformeki kokatuta daudelarik. Azken kasu horretan, gorputzaren baitan egitura homogeneo bat existitzen dela esango dugu.

Problema nahi adina osagairekin planteatu daiteke, baina gauzak erraztearren, gorputz heterogeneoa bi osagaien osatzen dutela besterik ez dugu suposatuko. Osagai bakoitzak okupatzen duen eskualdearen ezaugarriak edonolakoak izan daitezke, baina problema sinplifikatzeko, egitura zehatz bat finkatuko dugu. Horretarako, osagai bakoitzarentzat $I_1 = (0, \ell)$ eta $I_2 = (0, 1 - \ell)$ moduko tartea definituz, $0 < \ell < 1$ izanik, eta $N \gg 1$ behar bezain handia hartuz, I_1 eta I_2 tarteen N kopia bata bestearen ondoan kokatuz, Ω tartea Ω_1 eta Ω_2 honako azpierremitu hauetan banatuta geratuko da:

$$\Omega_1 := \bigcup_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}L, \frac{k + \ell_1}{N}L \right)$$

eta

$$\Omega_2 := \bigcup_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k + \ell_1}{N}L, \frac{k + 1}{N}L \right).$$

Ondorioz, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ beteko da eta nahasketa homogeneo bat lortuko dugu. Esaterako, $\Omega = [0, 1]$ bezalako ontzia betetzeko $N = 100$ hodi $\sim 80\%$ urez eta $\sim 20\%$ olio betetzen nahi izango bagenu, $I_1 = (0, 0.8)$ eta $I_2 = (0, 0.2)$ hautatuko genituzke. Ondoren, $I_1/N = (0, 0.008)$ eta $I_2/N = (0, 0.002)$ hodietako osagaiak bata bestearen ostean isuriko genituzke ontzian, modu horretan bi osagaien arteko nahasketa homogeneo bat lortuz.

Demagun, kasu orokorrera itzuliz, Ω_1 azpierremitua okupatzen duen osagaiaren eroankortasun termikoak γ_1 balio duela, eta Ω_2 azpierremitua okupatzen duenarenak γ_2 balio duela. Orduan, $x \in \Omega$ puntu bateko tenperaturak, $u(x)$, eta puntu horretako beroaren fluxuak, $q(x) := \gamma(x) \frac{du}{dx}$ adierazpenaren bidez definitutakoa, honako berdintza hauek betetzen dituzte:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1, \\ u_2(x), & x \in \Omega_2; \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} q_1(x) = \gamma_1 \frac{du_1}{dx}, & x \in \Omega_1, \\ q_2(x) = \gamma_2 \frac{du_2}{dx}, & x \in \Omega_2; \end{cases}$$

u_1 eta u_2 funtzioak u -ren murrizketak izanik Ω_1 eta Ω_2 azpierremituetara, hurrenez hurren. Problema esanahi fisikoa zentzuduna izateko egiten diren aieru fisikoak dira u tenperaturaren eta q beroaren fluxuaren jarraitutasuna bi osagaien arteko interfazeetan. Horrela, u -k honako problema honen soluzioa da:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\gamma(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Orokorrean, u -ren deribatua ez da jarraitua eta q ez da zertan deribagarria izan ohiko zentzuan. Horregatik, deribatu ahularen kontzeptua sartu beharko dugu jokoan. Definizio horrek beroaren fluxuaren problemarentzako H funtzioen espazio bat definitzen lagunduko digu, H^1 klaseko Sobolev-en espazioak, alegia.

Demagun gorputzaren heterogeneotasunak oso txikiak direla L -ren tamainarekin alderatuz eta uniformeki banatuta daudela. Matematikaren ikuspuntutik behatuta, distribuzio hori periodikoa dela suposatzen badugu, haren periodikotasun hori ε parametro txiki baten bidez adieraz daiteke egitura osagaien distribuzioen egituraren kopia ugari bata bestearen ostean ipiniz. Ondorioz, γ koefizienteak ε -en menpekota izango da, $\gamma_\varepsilon(x) := \gamma(x/\varepsilon)$ adierazpenak definitutako moduan, eta beroaren fluxuaren problema formulazio honekin ordezkatu ahal izango dugu:

$$\text{Aurkitu } u_\varepsilon \in H \text{ funtzioa, non } \int_0^L \gamma_\varepsilon(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L f(x) v(x) dx, \forall v \in H.$$

Heterogeneotasunak geroz eta txikiagoak egiten baditugu, gorputza homogeneousatzen ari garela esan daiteke, eta, ikuspuntu matematikotik behatuz, horrek esan nahi duena da $\varepsilon \rightarrow 0^+$ eramango dugula limitean. Soluzioen portaerari buruzko galdera hauek egin daitezke:

- (i) u_ε tenperatura konbergentea al da u_0 limite funtzio baterantz?
- (ii) Baiezkoan, u_0 -k mugaldeko problemaren bat ebazten al du?
- (iii) Orduan, limiteko problemaren koefizienteak konstanteak al dira?
- (iv) Azkenik, u_0 funtzioa u_ε -en hurbilpen ona al da?

Homogeneizazioaren teoriari esker, galdera horiek guztiak erantzungo ditugu. Hemendik aurrera aurkeztuko ditugun emaitza gehien frogapenak [2] liburuan agertzen direnetan oinarritzen dira, baina dimentsio bakarrerako eta Hilbert-en espazioen kasurako egokitu dira, ahalik eta ulergarriak izan daitezen. Artikulu hau irakurtzeko, ezinbestekoa da Neurriaren teoriaren oinarritzko kontzeptuak barneratuta izatea, [3] liburuan kontsulta daitezkeenak.

2 KONBERGENTZIA AHULA ETA DERIBATU AHULA

Atal honetan, konbergentzia ahularen eta deribatu ahularen definizioak eman eta haien propietate esanguratsu batzuk aztertuko ditugu. Lehenik eta behin, Hilberten espazioen definizioa ekarriko dugu gogora.

Definizioa 1. Izan bedi H espazio bektoriala eta demagun bertan $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ biderkadura eskalarra definituta dagoela. H Hilberten espazioa dela esango dugu, baldin eta osoa bada $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ biderkadura eskalarra induzitutako normarekiko.

Izan bedi $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ multzo irekia. Riesz–Fischerren teoremagatik, $L^2(\mathcal{O})$ Hilberten espazioa da. Konbergentzia ahula biderkadura eskalarrik gabeko espazio normadun batean definitu nahi izango bagenu, aldeztu aurretik espazio horren espazio dual topologikoa zer den definitu beharko genuke. Nolanahi ere, Hilberten espazioen testuinguruan lan egingo dugunez gero, Riesz–Frecheten teoremari esker, H -ren biderkadura eskalarra baliatzen duen definizio baliokide bat emango dugu. Hona hemen definizio horrek dioena:

Definizioa 2. Izan bitez $x \in H$ eta $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segida H -n. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segida x -rantz ahulki konbergentea dela esango dugu, eta $x_n \rightharpoonup x$ idatziko dugu, baldin eta $y \in H$ elementu guztietarako, honako hau betetzen bada:

$$\langle x_n, y \rangle_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, y \rangle_H.$$

Froga daiteke konbergentzia ahularen topologiarekin $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, y \rangle_H$ moduko funtzio linealak jarraituak direla, $y \in H$ finkoa izanik. Are gehiago, propietate hori betetzen duen topologiari txikiena da.

Proposizioa 3. [2, 1.12. proposizioa] *Izan bedi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segida H -ren norman konbergentea, haren limitea $x \in H$ izanik. Orduan, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segida ahulki konbergentea da, eta, gainera, $x_n \rightharpoonup x$ dugu.*

Froga erraz egiten daiteke biderkadura eskalarraren jarraitutasuna eta Cauchy–Schwarz-en desberdintza erabiliz gero. Halere, ez da zaila egiaztatzea bi nozio horiek ez direla baliokideak. Horretarako, kontsideratu $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segida $L^2(0, 2\pi)$ -n. Riemann–Lebesgue-ren lemagatik, $\sin(nx) \rightarrow 0$ betetzen da. Bestalde, $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segida ezin daiteke konbergentea izan $L^2(0, 2\pi)$ -ren norman, izan ere,

$$\|\sin(nx)\|_{L^2(0, 2\pi)} = \sqrt{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Eman ditzagun konbergentzia ahularekin lotutako bi emaitza. Lehenengoak, Hilberten espazioetako bolen trinkotasun ahulari buruz hitz egiten du; bigarrenak, segida ahulki konbergente baten eta norman konbergentea den beste baten arteko biderkadura eskalarrari buruz.

Teorema 4 (Eberlein–Smuljan). [5, 5.2.1. teorema] *Izan bedi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segida bornatua H -n. Orduan, $x \in H$ eta $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ azpisegida existitzen dira, non $x_{n_k} \rightarrow x$ den. Bestalde, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -ren azpisegida guztiak ahulki konbergenteak badira x elementu bererantz, orduan, $x_n \rightarrow x$ dugu.*

Proposizioa 5. [2, 1.19. proposizioa] *Izan bitez $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ahulki konbergentea H -n eta $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konbergentea H -ren norman, hau da, $x_n \rightarrow x$ eta $y_n \rightarrow y$. Orduan, $\{\langle x_n, y_n \rangle_H\}_{n \in \mathbb{N}}$ zenbaki errealeen segida konbergentea da, haren limitea honako hau izanik:*

$$\langle x_n, y_n \rangle_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, y \rangle_H.$$

Bi segidak ahulki konbergenteak izatea besterik ez badugu eskatzen, orduan, proposizioaren ondorioz ez da zertan bete behar. Horretarako, kontsidera dezagun berriz ere $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segida $L^2(0, 2\pi)$ -n. $\sin(nx) \rightarrow 0$ betetzen denez, limitean honakoa izan beharko genuke:

$$\|\sin(nx)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle_{L^2(0, 2\pi)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

baina horrek kontraesan batera garamatza (1) ekuazioarekin. Orduan, Hilberten espazio batean definitutako segida biren arteko biderkadura eskalarraren konbergentzia ziurtatzeko bi segidetako bat behintzat norman konbergentea izan behar da.

Orain, deribatu klasikoaren nozioa orokortuko dugu integragarriak diren funtzioentzat. Deribatu ahula definitzeko hainbat modu baliokide daude, baina guk distribuzioen teoriaraino oinarritutakoa emango dugu. Halere, ordezkotako definizio bat ezagutu nahi izatekotan, [1] erreferentzia kontsulta daiteke.

Definizioa 6. Izan bedi $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ multzo irekia eta

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) : \text{supp } \varphi \text{ trinkoa da } \mathcal{O}\text{-n} \right\},$$

non φ -ren euskarria honela definitzen den:

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathcal{O} : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ -ren funtzioei *test funtzio* deritze.

Definizioa 7. Izan bitez $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segida $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ -n eta $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segida φ -rantz *konbergentea* dela esango dugu, eta $\varphi_n \rightarrow \varphi$ $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ -n idatziko dugu, baldin eta honako bi baldintzak betetzen badira:

- (i) Existitzen da $K \subset \mathcal{O}$ multzo trinkoa, non $\text{supp } \varphi_n \subset K$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.
- (ii) $\partial^m \varphi_n \rightarrow \partial^m \varphi$ uniformeki $\mathcal{O}$ -n, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, hau da,

$$\max_{x \in \mathcal{O}} \left| \frac{d^m \varphi_n}{dx^m} - \frac{d^m \varphi}{dx^m} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Definizioa 8. Izan bedi $T : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$. T *distribuzioa* dela esango dugu, baldin eta

- (i) T lineala bada, hau da, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ eta $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ guztietarako,

$$T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2).$$

- (ii) T -k segiden bidezko jarraitutasuna errespetatzen badu, hau da,

$$\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \implies T(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(\varphi).$$

$\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ -ren bidez adieraziko dugu aurrerantzean distribuzioen espazioa.

Oharra 9. Izan bedi f integragarria $\mathcal{O}$ -ren azpimultzo ireki eta bornatueta. Definitu

$$T_f : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_f(\varphi) := \int_{\mathcal{O}} f(x) \varphi(x) dx.$$

Orduan, 8. definiziotik eta Hölder-ren desberdintzatik erraz ikusten da T_f distribuzioa dela.

Definizioa 10. Izan bitez $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ test funtzioa eta $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ distribuzioa. T -ren *deribatua* ahula, $\frac{dT}{dx}$ idatziko duguna, ohiko deribatua adierazten den moduan, honako adierazpen honen bidez dago emana:

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) := -T\left(\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Distribuzioen kontzeptua definitzeko arrazoia da deribazioa orokortzea ahalbidetzen duela. 9. oharra eta 10. definizioa, eta zatikazko integrazioa erabiliz, $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}})$ eta $f|_{\partial \mathcal{O}} \equiv 0$ badira, orduan, $\frac{dT_f}{dx} = T_{\frac{df}{dx}}$ dugu. Kalkula dezagun $x_0 = 0$ -n etengunea duen funtzio baten deribatu ahula.

Adibidea 11. $\mathcal{H}$ *Heaviside* funtzioa modu honetan definitzen da:

$$\mathcal{H}(x) := \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\mathcal{H}$ -ren ohiko deribatua ondo definituta dago, eta nulua da baldin eta soilik $x \neq 0$ denean. Hortaz, bere deribatua nulua da ia nonahi $\mathbb{R}$ -n, eta, gainera, $\mathcal{H}$ integragarria denez $[0, +\infty)$ -ren azpimultzo ireki eta bornatueta, $T_{\mathcal{H}}$ distribuzioarekin identifika daiteke. Orduan,

$$\frac{dT_{\mathcal{H}}}{dx} = - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = - \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

$\frac{dT_{\mathcal{H}}}{dx}$ -ri $x_0 = 0$ puntuan zentratutako *Diracen delta* deritzo.

Definizioa 12. Izan bedi $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ multzo irekia.

$$H^1(\mathcal{O}) := \left\{ u \in L^2(\mathcal{O}) \mid \frac{du}{dx} \in L^2(\mathcal{O}) \right\}.$$

Froga daiteke $H^1(\mathcal{O})$ Hilberten espazioa dela honako biderkadura eskalar honekin:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\mathcal{O})} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathcal{O})} + \left\langle \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \right\rangle_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Orokorrean, fenomeno fisikoak deskribatzen dituzten deribatu partzialetako ekuazioetan, aldagai espazialak multzo bornatu batean hartzen ditu haren balioak. Gure kasuan, beroaren fluxuarena problema dimentsio batean planteatu dugunez gero, hemendik aurrera $[0, L]$ tarte itxi eta bornatu batean definitutako $H^1(0, L)$ moduko Soboleven espazioak besterik ez ditugu kontsideratuko. Espazio horretan, atalean erabiliko dugun murgilketa trinko hau dugu:

Teorema 13. [2, 3.23. teorema (iii)] Izan bedi $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segida bornatua $H^1(0, L)$ -n. Orduan, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segidak azpiseгада konbergenteren bat du $C^0(0, L)$ -n. Bereziki, azpiseгада konbergenteren bat du $L^2(0, L)$ -n.

Atal honekin amaitzeko, definizio pare bat eta emaitza bat emango ditugu. Lehenik, aldagai bakarreko funtzioen periodikotasuna gogoratuko dugu; bigarrenik, funtzio baten batezbesteko balioa definituko dugu tarte bornatu batean, eta, hirugarrenik, Poincaré-Wirtinger-ren desberdintza aurkeztuko dugu.

Definizioa 14. Izan bedi $Q = (0, \ell) \subset \mathbb{R}$, non $\ell > 0$ finkatutako konstantea den. Demagun f funtzio neurgarria ia nonahi definituta dagoela $\mathbb{R}$ -n. f funtzioa ℓ -periodikoa edo ℓ -periododuna dela esango dugu, baldin eta

$$f(x + k\ell) = f(x) \text{ ia nonahi, } k \in \mathbb{Z} \text{ guztietarako.}$$

Bestaldetik, ℓ -ri periodoa deritzo.

Definizioa 15. Izan bitez I tarte bornatua eta $f \in L^1(I)$.

$$\mathcal{M}_I(f) := \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx.$$

Proposizioa 16 (Poincaré–Wirtinger). [2, 3.38 Proposizioa] Izan bedi $u \in H^1(0, \ell)$. Orduan,

$$\|u - \mathcal{M}_{(0, \ell)}(u)\|_{L^2(0, \ell)} \leq \ell \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2(0, \ell)}.$$

3 FUNTZIO PERIODIKO OSZILAKORREN LIMITE AHULA

Atal honetan, $f_\varepsilon(x) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ bezalako funtzio periodiko oszilakorren propietateak aztertuko ditugu, funtzio horiek baitira etengabe azaltzen direnak homogeneousazioaren teorian. Aurrerantzean erabiliko dugun notazioa argitzearren, I -ren bidez adieraziko ditugu $\mathbb{R}$ -ren tarte bornatuak eta $\varepsilon > 0$ parametroak limitean zerorantz konbergentea den segida bat izango da. Ohartu ε parametroak geroz eta balio txikiagoak hartzen dituen heinean, funtzioaren oszilazioak hainbat eta lasterragoak izango direla. Orduan, egoera honen aurrean egin dezakegun galdera bat da ea zein den $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ motako funtzio segiden portaera $\varepsilon \rightarrow 0^+$ eramaten dugunean.

Lema 17. [2, 1.46. proposizioa] Izan bedi $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segida $L^2(I)$ -n.

Orduan, honako bi enuntziatu hauek baliokideak dira:

(i) $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ ahulki $L^2(I)$ -n.

(ii) $\left\{ \begin{array}{l} (a) \{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \text{ uniformeki bornatua da } L^2(I)\text{-n,} \\ \text{eta} \\ (b) \int_J f_\varepsilon(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_J f(x) dx, \quad J \subset I \text{ azpitarte guztietarako.} \end{array} \right.$

Adibidea 18. Izan bedi $u : I = [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, u(x) = \sin x$.

Defini dezagun $\varepsilon > 0$ guztietarako $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzioen familia honako modu honetan:

$$u_\varepsilon(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \forall x \in [0, 2\pi].$$

Argi dago $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segida uniformeki bornatuta dago. Gainera, hurrengo betetzen da $J = (a, b) \subset [0, 2\pi]$ moduko azpitarte baten gaineko u_ε -en integralarekin $\varepsilon \rightarrow 0^+$ limitera eramaten dugunean:

$$\int_J u_\varepsilon(x) dx = \int_a^b \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 2\varepsilon \sin\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{b+a}{2\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 = \int_J 0 dx.$$

Hortaz, 17. lemaren bi baldintzak betetzen dira, eta $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ahulki konbergentea da zerorantz $L^2(0, 2\pi)$ -n. Halere, azpimarratzekoa da $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segida ez dela $L^2(0, 2\pi)$ -ren norman konbergentea, izan ere,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,2\pi)}^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon \int_0^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \sin^2 y dy \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\varepsilon}} (1 - \cos(2y)) dy \\ &= \pi - \frac{\varepsilon}{4} \sin\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

dugu. Ondorioz, limitean honakoa gertatuko da:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,2\pi)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\pi} \neq 0.$$

Gainera, froga daiteke $\varepsilon > 0$ parametroak $\{1/2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segidaren balioak hartzen baditu, orduan, limitera $\varepsilon \rightarrow 0^+$ eramaten dugunean, $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segida ezin daitekeela konbergentea izan ia inon $[0, 2\pi]$ tartean.

Horretarako, absurdura eramanez suposa daiteke haren limite puntuala, u_0 , existitu egiten dela. Ohartu u_0 limitea, existitzekotan, konbergentzia menderatuaren teorematik, nulua izango dela, hori delako $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ -ren limite ahula. Orain, konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz, eta kontuan izanik $I_\delta = \{x \in I : \forall \varepsilon > 0, |u_\varepsilon(x)| < \delta\}$ -ren neurria bornatuta dagoela $\delta > 0$ guztietarako, kontraesan bat lortzen da.

Honako teorema honek funtzio periodiko oszilakorren limite zehazten du.

Teorema 19. [2,2.6. teorema] *Izan bedi f funtzioa ℓ -periodikoa, non $f \in L^2(0, \ell)$ den. Definitu*

$$f_\varepsilon(x) := f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Orduan,

$$f_\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{M}_{(0,\ell)}(f) \text{ ahulki } L^2(V)\text{-n,}$$

$V \subset \mathbb{R}$ multzo ireki eta bornatu guztietarako.

Froga. 1. urratsa: normaren bornea lortu.

Izan bedi $V \subset \mathbb{R}$ multzo irekia eta bornatua. Frogatuko dugu $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ segida uniformeki bornatua dela $L^2(V)$ -n. Horretarako, $I = (a, b)$ moduko edozein tarte kontsideratuz $K > 0$ konstantea aurkituko dugu, ε -en independentea izanik, non $\|f_\varepsilon\|_{L^2(a,b)} \leq K$. Orokortasunik galdu gabe, demagun $Q = (0, \ell)$ tartearen traslazioen bat I -ren parte dela. Ohartu Q -ren N_ε traslazio aurki daitezkeela, beren artean binaka disjuntuak izanik, non $\varepsilon Q_k \subset I$ den $k \in \{1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ guztietarako, eta Q -ren beste traslazio disjuntu pare bat aurki daitekeela, Q_a eta Q_b , non $a \in \varepsilon Q_a$ eta $b \in \varepsilon Q_b$. Orduan, honako partekotasun hau dugu (ikusi 1. irudia):

$$I \subset \varepsilon \overline{Q}_a \cup \varepsilon \overline{Q}_b \cup \left[\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon \overline{Q}_k \right], \quad (2)$$



1. irudia. I tartearen estaldura.

Hemen, $\overline{Q}$ ikurrarekin Q -ren itxitura topologikoa adierazi nahi da. Ohartu $\varepsilon > 0$ guztietarako $b - a = \varepsilon \ell N_\varepsilon + \delta_\varepsilon$ idatz dezakegula, $0 \leq \delta_\varepsilon < \varepsilon \ell$ izanik. Orduan, honako hau izango dugu limitea hartzerakoan:

$$\varepsilon N_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{b - a}{\ell}. \quad (3)$$

Hortaz, f -ren periodikotasuna kontuan izanik, ε behar bezain txikia baldin bada,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{L^2(I)}^2 &\leq \int_{\varepsilon Q_a} |f_\varepsilon(x)|^2 dx + \int_{\varepsilon Q_b} |f_\varepsilon(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \int_{\varepsilon Q_k} |f_\varepsilon(x)|^2 dx \\ &= (N_\varepsilon + 2) \int_0^{\varepsilon \ell} |f_\varepsilon(x)|^2 dx = \varepsilon (N_\varepsilon + 2) \int_0^\ell |f(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\frac{b - a}{\ell} + 1 \right) \|f\|_{L^2(Q)}^2 := K. \end{aligned}$$

Hemen, azken desberdintzako goi-bornea (3)-ri esker lortu dugu.

Ondorioz, 4. teorema aplikatuz, $\{f_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'>0}$ azpisegida existitzen da, non $f_{\varepsilon'} \rightarrow f_0$ den.

2. urratsa: limite ahula identifikatu.

Orain, $\{f_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segidaren limite ahula f -ren batezbesteko balioa Q -n dela frogatuko dugu, hau da, $f_0 = \mathcal{M}_Q(f)$ betetzen dela. Horretarako, 17. lemarri esker, aski izango da honako hau frogatzea:

$$\int_c^d f_{\varepsilon}(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_c^d \mathcal{M}_Q(f) dx,$$

$J = (c, d) \subset V$ guztietarako. (2) partekotasuna kontuan hartzen badugu

$$\int_c^d f_{\varepsilon}(x) dx = \varepsilon N_{\varepsilon} \int_0^{\ell} f(x) dx + \int_{\varepsilon Q_a \cap J} f_{\varepsilon}(x) dx + \int_{\varepsilon Q_b \cap J} f_{\varepsilon}(x) dx.$$

Gainera, (3)-ren bidez ondorengo bi emaitza hauek lortzen ditugu:

$$\varepsilon N_{\varepsilon} \int_0^{\ell} f(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d-c}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx = \int_c^d \mathcal{M}_Q(f) dx,$$

eta

$$\left| \int_{\varepsilon Q_a \cap J} f_{\varepsilon}(x) dx + \int_{\varepsilon Q_b \cap J} f_{\varepsilon}(x) dx \right| \leq 2 \left| \int_0^{\varepsilon \ell} f_{\varepsilon}(x) dx \right| = 2\varepsilon \left| \int_0^{\ell} f(x) dx \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Hortaz, $f_0 = \mathcal{M}_Q(f)$ berdintza lortzen dugu. Amaitzeko, 4. teorema beste behin aplikatuz, $\{f_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ jatorrizko funtzio segida f -ren batezbesteko baliorantz ahulki konbergentea dela ondorioztatzen dugu, hau da, $f_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{M}_Q(f)$. $\square$

Izan bitez $\{u_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ eta $\{v_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ segida ahulki konbergenteak H -n, beren limite ahulak $u \in H$ eta $v \in H$ izanik, hurrenez hurren. Orduan, aurreko teoremaren ondorioz, gerta daiteke $\langle u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon} \rangle \not\rightarrow \langle u, v \rangle$ izatea. Jadanik azaldu zaigu halako adibideren bat 2 atalean $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio segidarekin, hain zuzen ere. Eman dezagun konbergentzia eza hori erakusten duen beste adibide bat. Izan bitez $u, v \in L^2(0, \ell)$ -n funtzioak ℓ -periodikoak.

$$u_{\varepsilon}(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{eta} \quad v_{\varepsilon}(x) := v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Orduan, 19. teoremari esker, $V \subset \mathbb{R}$ multzo ireki eta bornatu guztietarako,

$$u_{\varepsilon} v_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{M}_{(0, \ell)}(uv) \text{ ahulki } L^2(V)\text{-n.}$$

Aurrekoa $f \equiv 1$ funtzio konstantearekin bidertzerakoan aplikatuz,

$$\langle u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon} \rangle_{L^2(0, \ell)} = \int_V u_{\varepsilon}(x) v_{\varepsilon}(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_V \mathcal{M}_{(0, \ell)}(uv) dx.$$

Bestaldetik, 19. teoremaren arabera, limitean honakoa lortu behako genuke:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, \ell)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_V \mathcal{M}_{(0, \ell)}(u) \mathcal{M}_{(0, \ell)}(v) dx,$$

baina $u(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$ eta $v(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$ hartuz, ikus daiteke honako hau betetzen dela:

$$\mathcal{M}_{(0, \ell)}(uv) \neq \mathcal{M}_{(0, \ell)}(u) \mathcal{M}_{(0, \ell)}(v).$$

Hortaz, biderketa eta homogeneizazioa ez dira trukakorak.

4 MATERIAL KONPOSATU PERIODIKOAK

Jarraian, beroaren fluxua lantzeko marko teorikoa aurkeztuko dugu. Ondoren, deribatu partziale-tako ekuazioen bidez modeliza daitezkeen beste problema fisiko batzuren aipamena egingo dugu. Izan bedi $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R})$ zeinetarako existitzen diren α eta β konstante errealak honako desberdintza hau betetzen dutelarik:

$$0 < \alpha \leq \gamma(x) \leq \beta < \infty \text{ ia nonahi.}$$

Definitu honako funtzio hauen familia $\varepsilon > 0$ guztietarako:

$$\gamma_\varepsilon(x) := \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

eta honako eragile hauen familia:

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \frac{d}{dx} \left(\gamma_\varepsilon(x) \frac{d}{dx} \right).$$

Homogeneizazioaren teoriari esker, deribatu partzialetako hainbat problemen joera azter daiteke $\varepsilon \rightarrow 0^+$ eramaten dugunean. Esaterako, $\Omega = [0, L]$ bezalako tarte itxi eta bornatu batean definitutako $\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = f$ erako problemak azter daitezke, non $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0$ den. Ekuazio horiek berebiziko garrantzia dute errealitate fisikoaren fenomeno termikoak, elektrikoak edota akustikoak deskribatzeko izateko. Problema horiek material heterogeneoen kasurako lantzen ditugunean, ε parametroak materialaren heterogeneotasun maila deskribatzen duela esan genezake. Horrelako problema esaguratsu bat da Dirichlet-en problema deritzoguna:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon(x) = f(x), & x \in (0, L), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0. \end{cases}$$

Dirichleten problemen harira, interesgarria da halako problemen bidez modelizatu daitezkeen problema klasiko batzuk aipatzea. Sarreran aurkeztutako problema gogora ekarriz, gorputz orokor baten zeharreko beroaren fluxua honela deskriba daiteke:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\gamma(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Ω eremua sarreran deskribatutako Ω_1 eta Ω_2 azpieremuetan banatuta dagoela suposatzen badugu, eta γ_ε -ek gorputz heterogeneoaren zeharreko eroankortasun termikoa adierazten badu, orduan, u_ε problema honen soluzioa izango da:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\gamma_\varepsilon(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f(x), & (0, L)\text{-n}, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0. \end{cases}$$

Problema hori Dirichleten problema heterogeneo bat da, non γ_ε koefizienteak oszilazio geroz eta lasterragoak dituen. Horrela, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ atal honen hasieran aurkeztu dugun Dirichleten problema homogeneo berbera lortuko dugu.

$\varepsilon \rightarrow 0^+$ limitera eramaterakoan, gure sistema homogeneizatzen ari dela esan daiteke. Koefiziente oszilakor bizkorreko sistema batetik sistema homogeneizatu batera pasa nahi izatearen arrazoia da u_0 soluzio homogeneizatua ezagutzen badugu, u_ε soluzioaren hurbilpen ona egin daitekeela. Beroaren fluxuaren problemaz ez beste, homogeneizazioa baliagarria da beste hainbat problema fisiko deskribatzeko. Hemen, aurrez definitutako γ_ε koefizienteak materialaren bestelako propietateak deskribatuko ditzake. Hona hemen adibide esanguratsu pare bat.

Adibideak 20. Fenomeno elektrikoen kasuan, u -k potentzial elektrostatikoa, f -k karga elektrikoaren banaketa eta γ -k eroankortasun elektrikoa deskribatzen dute, hurrenez hurren. Deskribatu nahi dugun fenomenoaren denboran zehar aldatzen bada, *beroaren ekuazioa* deritzogun sistema lortzen dugu:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon, & (0, L) \times (0, T)\text{-n}, \\ u_\varepsilon(0, \cdot) = u_\varepsilon(L, \cdot) = 0, & (0, T)\text{-n}, \\ u_\varepsilon(\cdot, 0) = u_\varepsilon^0, & (0, L)\text{-n}, \end{cases}$$

non u_ε^0 tenperaturaren hasierako egoera den. Hemen, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ eramaten dugunean, tenperaturaren hasierako egoera eta sistemaren eroankortasun propietateak ari gara homogeneizatzen aldi berean.

Uhinen hedapena deskribatzeko material konposatu batean, aurreko adibideko notazio bera jarraituz, materialaren zeharreko u_ε uhinen hedapena deskribatzen duen funtzioa bada, *uhinaren ekuazioa* deritzogun sistema honela definitzen da:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u_\varepsilon - \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon, & (0, L) \times (0, T)\text{-n}, \\ u_\varepsilon(0, \cdot) = u_\varepsilon(L, \cdot) = 0, & (0, T)\text{-n}, \\ u_\varepsilon(\cdot, 0) = u_\varepsilon^0, \quad \partial_t u_\varepsilon(\cdot, 0) = v_\varepsilon^0, & (0, L)\text{-n}, \end{cases}$$

non f_ε iturburuko terminoa eta u_ε^0 eta v_ε^0 hasierako datuak diren. Beroaren ekuazioaren nahiz uhinaren ekuazioaren inguruan sakondu nahi izatekotan, [2] liburuko hamaikagarren eta hamabigarren kapituluak kontsulta daitezke, hurrenez hurren.

5 BEROAREN FLUXUAREN EKUAZIOAREN HOMOGENEIZAZIOA

Azken atal honetan beroaren fluxuaren problema homogeneoaren portaera asintotikoa aztertzea izango dugu helburu $\varepsilon \rightarrow 0^+$ eramaten dugunean. Problema hori aztertu zuen lehena Spagnolo izan zen 1967. urtean. Haren artikulua kontsulta nahi izatekotan, [4] erreferentzian kontsulta daiteke. Artikulu honetako teorema nagusietan aurkeztu baino lehen, lema tekniko bat enuntziatuko dugu, erraz froga daitekeena konbergentzia ahulari buruz ikusitako emaitzak kontuan hartuz.

Lema 21. *Izan bitez $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eta $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segida bornatuak $L^2(0, L) \cap L^\infty(0, L)$ espazioan. Demagun $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ahulki konbergentea dela $L^2(0, L)$ -n eta $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ konbergentea dela $L^\infty(0, L)$ -ren norman. Orduan,*

$$u_\varepsilon v_\varepsilon \rightharpoonup uv.$$

Izan bedi $L > 0$ gelaxkaren luzera eta kontsidera dezagun honako problema hau:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\gamma_\varepsilon(x) \frac{du_\varepsilon}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, L), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Demagun γ funtzioa ℓ -periodikoa eta ia nonahi bornatua dela, honako desberdintza hau izanik:

$$0 < \alpha \leq \gamma(x) \leq \beta < \infty \text{ ia nonahi } \mathbb{R}\text{-n}, \quad (5)$$

α eta β konstante erreal batzuentzat, 4. atalaren hasieran suposatu dugun moduan.

Teorema 22. [2, 5.5. teorema] Izan bitez $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ (4) problemaren soluzioa eta $f \in L^2(0, L)$. Orduan, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ dugu $H^1(0, L)$ -n, non u_0 funtzioa ondorengo problema honen soluzio bat eta bakarra den $H^1(0, L)$ -n.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mathcal{M}_{(0,L)}(1/\gamma)} \frac{du_0}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, L), \\ u_0(0) = u_0(L) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Froga. **1. urratsa: limite ahularen existentzia.**

Hasteko, 16. proposizioari esker, honako estimazioa lortzen dugu:

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(0,L)} \leq \frac{L}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,L)}. \quad (7)$$

Orduan, (7) desberdintza eta 4. teorema aplikatuz,

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup v_0, & L^2(0, L)\text{-n}, \\ \frac{du_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{dv_0}{dx}, & L^2(0, L)\text{-n}. \end{cases} \quad (8)$$

2. urratsa: trinkotasun ahula erabili.

Izan bedi $\xi_\varepsilon := \gamma_\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$. Orduan, bistan dago honako hau betetzen dela:

$$-\frac{d\xi_\varepsilon}{dx} = f(x), \quad (0, L)\text{-n}. \quad (9)$$

Orduan, (5) eta (7) kontuan hartzen baditugu, ez da zaila ikustea

$$\|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{\beta}{\alpha} L \|f\|_{L^2(0,L)}$$

dela. Beraz, 4. teorema aplikatzen badugu, honako hau lortzen dugu:

$$\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi_0 \text{ ahulki } L^2(0, L)\text{-n}.$$

Gainera, distribuzioen zentzuko deribatuaren definiziotik erraz ikus daitekeena da

$$-\frac{d\xi_0}{dx} = f(x) \text{ dela } (0, L)\text{-n}. \quad (10)$$

Bestalde, (9) ekuaziotik eta ξ_ε -ren aurreko estimaziotik ikus daitekeena da

$$\|\xi_\varepsilon\|_{H^1(0,L)} = \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,L)} + \left\| \frac{d\xi_\varepsilon}{dx} \right\|_{L^2(0,L)} \leq \left[\frac{\beta}{\alpha} L + 1 \right] \|f\|_{L^2(0,L)}.$$

Hortaz, $\{\xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ bornatuta dago $H^1(0, L)$ -n, eta 13. teorema aplikatzen badugu, ξ_ε trinkoa da $H^1(0, L)$ -n. Ondorioz, $\{\xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ funtzio segidaren azpiseigida bat existitzen da, berriz ere $\{\xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ idatziko duguna, non

$$\xi_\varepsilon \rightarrow \xi_0 \text{ norman } L^2(0, L)\text{-n}. \quad (11)$$

3. urratsa: v_0 eta ξ_0 -ren arteko erlazioa zehaztu.

Definizioz, honako berdintza hau dugu:

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} = \frac{\xi_\varepsilon(x)}{\gamma_\varepsilon(x)}.$$

Ohartu (5) hipotesiengatik $1/\gamma_\varepsilon$ bornatuta dagoela $L^\infty(0, L)$ -n, izan ere,

$$0 < \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\gamma_\varepsilon(x)} \leq \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Orduan, (8) eta (11) baldintzak, 19. teorema eta 21. lema aplikatuz,

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \xi_0 \mathcal{M}_{(0,\ell)}\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

Azkenik, (10) ekuaziotik v_0 funtzioa (6) problema homogeneousatuaren soluzioa dela ondorioztatzen dugu. Are gehiago, $\mathcal{M}_{(0,\ell)}(1/\gamma) \neq 0$ dugunez, v_0 problema horren soluzio bakarra da. Hortaz, 4. teorema berriz aplikatuz, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ dugu $H_0^1(0, L)$ -n, teoremaren froga amaituz. $\square$

22. teoremak sarreran planteatutako (i), (ii) eta (iii) galderei erantzuna ematen die, eta, beraz, (iv) erantzutea besterik ez zaigu falta. Horretarako, (4) problemaren mikro-oszilazioak x *aldagai makroskopikoa* eta x/ε *aldagai mikroskopikoaren* bidez deskribatuko ditugu. Izan bedi

$$u_\varepsilon(x) = \theta_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\theta_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2\theta_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots,$$

non $\theta_n = \theta_n(x, y)$ funtzioa ℓ -periodikoa den y -rekiko. Orduan, (iv) galdera baliokideki planteatu dezakegu modu honetan: zein estimazioa egin dezakegu u_ε funtzioa $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n \theta_n(x, x/\varepsilon)$ moduko batura finitu batekin hurbiltzen badugu? Honako teorema honek, mugalde baldintzetako datuen erregularitasunaren inguruko baldintza jakin batzuen pean, $N = 2$ deneko kasurako errorearen estimazio kuantitatibo bat emango du.

Teorema 23. [2, 6.3. teorema] Izan bitez u_ε , aurrez definitu bezala, (4) koefiziente oszilakorreko problemaren soluzioa, $f \in C^\infty(0, L)$ eta θ_1, θ_2 funtzioak honako bi problema hauen soluzioak, hurrenez hurren:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\gamma(x) \frac{d\theta_1}{dx} \right) = -\frac{d\gamma}{dx}, & (0, \ell)\text{-n}, \\ \theta_1 \text{ funtzioa } \ell\text{-periodikoa da,} \\ \int_0^\ell \theta_1(x) dx = 0 \end{cases}$$

eta

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(\gamma(x) \frac{d\theta_2}{dx} \right) = 1 - \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell)}(1/\gamma)} - (1 + \gamma(x)) \frac{d\theta_1}{dx}, & (0, \ell)\text{-n}, \\ \theta_2 \text{ funtzioa } \ell\text{-periodikoa da,} \\ \int_0^\ell \theta_2(x) dx = 0. \end{cases}$$

Orduan, honako bornaketa hau dugu u_ε -en bigarren ordenako hurbilketarentzat:

$$\exists K > 0 : \left\| u_\varepsilon - \left(u_0 + \varepsilon\theta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du_0}{dx} + \varepsilon^2\theta_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d^2u_0}{dx^2} \right) \right\|_{H^1(0,L)} \leq K\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

K konstantea ε -en independentea izanik.

Azken teoremaren arabera, u_ε tenperatura bi eskala desberdinen menpekota da, zeinak x eta x/ε aldagaien bidez deskriba daitezkeen. Lehenengoak, aldagai *makroskopikoa* deritzogunak, puntuaren kokapena deskribatzen du Ω -n; bigarrenak, aldagai *mikroskopikoa* deritzogunak, ordea, ε parametroak geroz eta balio txikiagoak hartzen dituen heinean, hainbat eta azkarrago oszilatzen du eta puntua Ω_1 edo Ω_2 azpieremuetan dagoen zehazten du. Gainera, emaitza interesgarri bat ematen digu zenbakizko metodoei dagokionean, izan ere, teorema eskaintzen digun estimazioaren arabera, u_0 funtzioaren bidez, koefiziente oszilakorreko problema ebazten duen u_ε *soluzio fisikoaren* hurbilpen egoki bat egin genezake.

6 ESKER ONAK

Nire eskerrik beroenak artikulua idazteko prozesuan jaso dudana laguntza guztiagatik. Lehenik, BCAMeko kideei bi hilabeteko egonaldian egin didaten abegi onarengatik. Bigarrenik, proiektu hau aurrera eramateko finantzaketa CEX2021-001142-S Estatuko Ikerkuntza Agentziaren, BERC 2022-2025 Eusko Jaurlaritzaren laguntzari eta IT 1615-22 Eusko Jaurlaritzako ikerkuntza taldean praktikak egiteko Hezkuntza Sailak eskainitako IkasIker lankidetzaren bekari esker lortu da. Hirugarrenik, eskerrak eman idazlan hau aurrera eramaten lagundu didaten bi pertsonari, Jon Asier Bárcena eta Luz Roncali, haien iradokizun eta hobetzeko proposamenengatik izan ez balitz, artikulua hau ez litzatekeelako posible izango.

Erreferentziak

- [1] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext Springer New York, 2011.
- [2] CIONARESCU, D. eta DONATO, P. *An Introduction to Homogenization*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 17. The Clarendon Press, 1999.
- [3] ORUETXEBARRIA, O. *Neurria eta integrazioa*. Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, 2023.
- [4] SPAGNOLO, S. *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del Galore*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche, Serie 3, Volume 21 (1967) no. 4, 657-699.
- [5] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 123. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.