Lilura geometrikoak (argazki-kamera geometrikoa)

Josu Arroyo Olea

Matematika Saila
Euskal Herriko Unibertsitatea
644 p.k., 48080 BILBAO

Laburpena: Azken urteko ordenagailuen munduko aurrerakadak gaur egungo bihurtu du infografia hitz berria. Amu geometriko txiki bat aitzakia dugula, artikulu honetan infografiaren inguruko ideia batzuk aztertzen ditugu, oinarrizko egitura batzuk aurkeztu, egituren arteko erlazioak ezarri, eta lan horren emaitza den eredu erraz bat eraiki, ematen diren urratsek eredu hori nola hobetzen duten iruditan erakutsiz.

> «Neke barik amestu dezaket ordenagailuz sorturiko lehen filme luzea. 1991n gaude. Gelako pasabidetik behera noa behaztopaka, palomita sintetikoz beteriko poltsa eta alkoholik gabeko baina eraskin ez naturalez beteriko edaria daramatzadala. Zinemako gelako argiak apurka-apurka motelduz doaz itzali arte; oihala gora eta pantailan J.R.R. Tolkien-en "Eraztunen Jauna"-ren eraketak bizia hartzen du. Frodo hobbit-a ibarxkan zehar doa. Urrunean mendikate baten tontorrek, elurrez apainduta, zerua ikutzen dute. Landare bitxiak eta mota ezezaguneko zuhaitzak, eguzkiak zigortuak, begi aurrean zehar. Irudiek pixkanaka azti bat erakusten digute, bere kristalezko bolari tinko begiratzen. Esferaren erdian gaztelua bereizten da, dorretan sua dantzan».

Orain urte asko, A.K. Dewdney-k lerro horiek idatzi zituen «Ikerkuntza eta Zientzia» aldizkariko «ordenagailuen txokoa» sailean. Aipatzen zuenez, Californiako San Rafael-en jaio berria zen Pixar **(«Lucasfilm Computer Graphics Laboratory»** zena) empresan ikustaldi bat egin ondoren idatzi zituen. Garai horietan, diru askotxo ordainduz ere, gizaki arrunt batek eros zezakeen ordenagailuaren abiadura ez zen 12 MHz baino handiagoa, mikroprozesagailuaren ingurukoen mugak ez aipatzeagatik.

Gaur egun Pixar mundu osoan zehar ezaguna egin dute bere lanek: hurbilenak ***«Toy Story»*** eta ***«Bichos»;*** dinosaurioak bizitzara itzuli egin dira; telebistan platoak ordenagailuz sortutakoak dira; eta etxerako ordenagailuen abiadurak 1000MHZtik gorakoak dira, ahalmen grafikoa indartzeko bereziki prestatuak. Honela ba, norberaren etxean Pixar txiki bat sortzea ez da jadanik ameskeria.

1. **SARRERA**

Artikulu labur honetan infografiaren mundura hurbilduko gara. Metaforikoki hitz eginez, «teorema-frogapena» motako egiturak alde batera utzita esan genezake jarraituko dugun bidea azalduko ez den teorema baten frogapena izango dela, zailtasun maila pixkanaka igoz, baina, hori bai, lurra beti gure hankapean dagoela. Honela ba, ez da lerro hauetan zorroztasun tekniko gehiegirik aurkituko. Amu moduan edo hasteko bultzada moduan, geometriagaz loturiko aitzakia plazaratuko dugu, hain zuzen, **gainazal geometrikoen *bistaratzea.***

Gaur egun, ordenagailuak gure lagunak direla, gainazal geometrikoen adierazpena gai iluna izatetik oso urrun dago, eta esan liteke ia edonoren esku dagoela.

Adibide gisa, hortxe daude Mathematica™ bezalako *«munstro»* (berbaren esanahi guztiak hartuz) itxurako programak. Baina ez da hori guk nahi duguna; bide honetatik urrunduko gara, gehiago nahi dugu eta: hasteko, gainazal geometriko horiek *ikusi* nahi ditugu, edo hobeto esateko, aditza zentzu egokian uler dadin, **gainazal geometrikoen *argazkiak* lortu nahi ditugu.**

2. **3D ESPAZIO BAT GURE MENPE**

Lehen urratsak emateko jarritako helburua ikusirik, alegia, gainazalen *argazkiak* lortu nahi ditugularik, argi dago errealitatean gertatzen dena hartu beharko dugula eredutzat. Honela ba, ideia erraztuz, esango dugu R^3 espazio batean *gauzak, argiak* eta *begiralea* aurkituko ditugula kokaturik. Fisikak esango liguke argi-iturri desberdinetatik datorren argiak gauzak ukitu eta milaka norabidetan ihes egiten duelarik, horren fotoi batzuk begiralearengana heltzen direla eta honi bere inguruaren irudi bat egiteko (sortzeko) aukera ematen diotela.

Honela ba, gure lehen pausoa, eta garrantzitsuena, **«gainazalen gaineko argazkia»** arte berri hau jorratzeko aukera emango digun unibertsoa (gure kontrolpeko hiru dimentsioko espazioa) eraikitzea izango da; lehen atala, *«jaungoiko ikasleak»*.

2.1. **[3D] espazioaren osagaiak**

Izan bedi $E = R^3$ espazio afin euklidearra (matematikoki esanez), aurrerantzean gure kontrolpean egongo dena, gureganatu dugun paperari jarraituz. Espazio honetan gainazalen argazkiak posible egingo dituzten legeak ezarri beharko ditugu. Honela, *E*-n, gure unibertsoa izango den honetan, *argazki-kamera* definitu beharko dugu (alegia, argazkia lortzeko aukera emango digun tresneria), *argia* (hots, mundu horretan *ikustea* posible egingo duen tresneria) ere definitu behar da, eta noski, *argia* eta gainazalak elkarren artean nola erlazionatzen diren ere ezarri beharko dugu. *Argazki-kamera* eta *argia* modu «natural» batean definituko ditugu, mundu errealean betetzen duten lana ikusiz. Argiaren eta gainazalen arteko erlazioak antolatuko dituzten *legeak* finkatzeko, gainazalek parte duten egitura egokiak definituko ditugu. Gure *argazki-kameraren* makina ordenagailua izango da eta honen pantaila argazkia hartu behar duen *argazki-papera*.

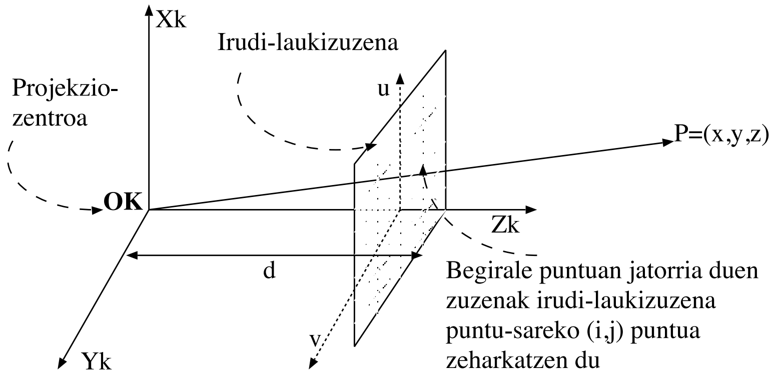
Gehiago itxaron barik, defini ditzagun kudeaketa gure esku utzi duen *E* unibertsoko antzesleak (eredu erraz bat):

—Kamera

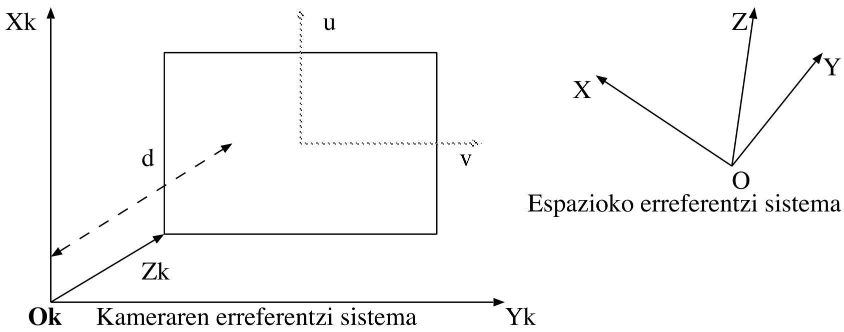
$$[Kam] = \{OK = (Kx, Ky, Kz), (Kdx, Kdy, Kdz), d, Lx, Ly, \ldots\}$$

deskribatzen duten egiturak (bertsio erraz honetan) hauek dira:

1. $OK = (Kx, Ky, Kz)$ *E* puntu bat, bete behar duen lana ikusirik *begirale-puntua* edo *projekzio-zentroa* esango dioguna;
2. (Kdx, Kdy, Kdz) norabide bat, kamerak *begiratzen* duen norabidea emango diguna;
3. *Lx* unitate luzeran eta *Ly* unitate altueran duen laukizuzen bat, *irudi-laukizuzena,* (Kdx, Kdy, Kdz) bektorearekiko perpendikularra, *zentroa OK* puntutik *d* unitatetara duena;
4. eta azkenik, guk eskainitako datuak erabiliko dituzten legeak; datuak eskaintzen jakin beharko dugu gure gustuko emaitzak lortu ahal izateko.



1. irudia. Kameraren ideia bat.



2. irudia. Gure *E* unibertsoan agertzen diren erreferentzi sistema desberdinak: kamerarena, irudi-pantailarena, *E* espaziokoa, [*OG*]-bakoitzekoa…

—Argia

$$[Argia] = \{A = (A_x, A_y, A_z), kA = (A_r, A_g, A_b), \ldots\}$$

da eta egitura nabarmenenak hauek ditu:

1. $A = (A_x, A_y, A_z)$ E puntu bat, bere eginkizuna argiaren posizioa ematea da (errazteko, demagun *argi-iturria* *E*-ko puntu bat dela);
2. $kA = (A_r, A_g, A_b)$ $[0, 1]^3$ hirukotea, *argi-kolorea*. Azaldu beharra dago gure *E* honetan koloreak oinarrizko hiru koloreen konbinazio moduan datozela: gorria, berdea eta urdina, «kolore-oinarria» izango da guretzat. Gorria (1, 0, 0) hirukotea izango da, berdea (0, 1, 0) eta urdina (0, 0, 1). Honela erraz ikus daiteke horia (1, 1, 0) izango dela, beltza (0, 0, 0), erdiko grisa (0.5, 0.5, 0.5), zuria (1, 1, 1), etab...

—Eta [*Kam*] eta [*Argia*] klaseen alboan, *oinarrizko gauzaki* esango diogun klasea

$$[OG] = \begin{array}{ll} EF: & \{S = S^2, T^2, \ldots\} \\ & kOG, K, K_r, K_s, K_t, \ldots \\ ED: & \mathrm{N} : \mathrm{S} \quad \mathrm{R}^3 \\ & \ldots \end{array} ,$$

bi egituratan banatua:

1. lehenengoa, *egitura fisikoa* esango dioguna, matematikoki espazioan kokaturiko S gainazal geometriko bat izango dena, esfera (S^2), toroa (T^2), kuboa, planoa eta abar (beharrezko dituen translazio, biraketa, dilatazio eta abar emanda);

2. eta bestalde, *egitura deskriptiboa* deritzoguna, oinarrizko gauzakia «deskribatu» egingo diguten funtzio eta konstanteek osatzen dutena, betebehar nagusia [*Argia*] eta [*OG*] klaseko elementuak erlazionatzen dituzten *legeetan* agertzea izango duena. Azpimarratuko dugu egitura honetan adibidez [*OG*]-ko «kolorea» izeneko hirukote konstantea edukiko dugula, $kOG = (k_r, k_g, k_b)$ $[0,1]^3$ (gogoratu gainazalak *ikusi* nahi ditugula), eta oso garrantzitsua izango den *aplikazio normala* $N : S$ R^3 (oinarrizko geometria diferentziala), lana [*OG*]-ko *S* gainazaleko *p* puntu bakoitzeko *N(p)* bektorea ematea edukiko duena, non *N(p)* = *S* GAINAZALEKO *p* PUNTUAN [*OG*]-REN NORMALA DEN BEKTORE UNITARIOA. Egitura deskriptibo hau apurka-apurka aberatsagoa egingo zaigu, gure *E* unibertsoan «fisikaren lege» batzuk sortu eta ezartzen ditugun heinean.

3. **TRESNERIA**

Demagun *E* espazioan kokatzen ditugula [*Kam*] klaseko elementu bat, [*Argia*] klaseko elementu bat (bat bakarrik formulak errazteko), eta [*OG*] klaseko elementu bat edo gehiago, eta demagun lortu nahi dugula *E*-ren barrualdean «ikusten» denaren irudi bat; beste era batera esanda, lortu nahi ditugu gure espazioaren barneko lehen *argazkiak*.

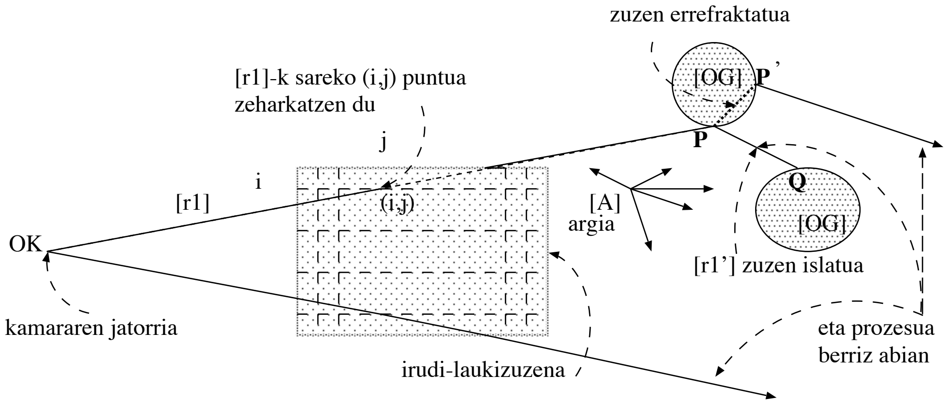
Errealitatean, irudi bat lortzeko argia da heltzen dena irudia sortu behar duen tresnaraino; hau da, heltzen diren fotoiek, adibidez, aukera ematen diote kamera bati argazki bat lortzeko. Honela ba, kanpoko mundu horretan, tresneria hori heldu behar diren fotoien zain legoke. Gure *E* mundu honetan horrelako portaerarik ez liguke *argazkirik* lortzeko aukerarik emango. Alderantziko prozesu bat jarriko dugu abian. Fotoien zain egon beharrean, fotoiek kameraraino heltzeko egin beharko luketen bidea aztertuko dugu baina alderantziz, kamera bertatik abiatuz alderantzizko bidea sortu eta honela ondorioztatu nolako informazioa ekarriko luketen.

Teknikoki hitz eginez, demagun, adibidez, lortu gura dugun argazkiaren neurria 800   600 pixelekoa dela. Horretarako [*Kam*]-ko *irudi-laukizuzena* 799 zatitan horizontalean eta 599 zatitan bertikalean zatituko dugu, honelaxe $\{M\ (i, j)\ ;\ i = 1, \dots, 800, j = 1, \dots, 600\}$ puntu-sare bat lortuz. Sare horretako puntu bakoitzetik jatorria [*Kam*]-ko *OK* puntua duen zuzen bat (zuzenerdia) bidaliko dugu *E* espazioaren barnera informazio baten bila, $[0,1]^3$-ko hirukote moduan idatzita egongo dena, kolore baten bila, ordenagailuko (i, j) pixelak erakutsi behar duen kolorearen bila. [*Kam*]-ko tresneria izango da informazio hori lortuko duena. Sareko puntu guztietarako prozesu hori bukatuz, bilatzen ari ginen irudia, *argazkia,* gure aurrean agertuko da.

Goazen ba *E*-ren barneko argazkiaren «artea» gidatuko duen tresneriaren «kutxa beltza» darabilen ingeniaritza deskribatzera.

3.1. **Burmuina**

Izan bedi [*r*1], *OK* = (*Kx, Ky, Kz*) *begirale-puntu*tik abiatu eta *irudi-laukizuzen*-eko *M* (*i, j*) puntutik igarotzen den zuzena (zuzen horrek irudiko *M* (*i, j*) puntura helduko litzatekeen fotoiaren alderantzizko bidea egin nahi du, honela nolako informazioa helduko litzatekeen ondorioztatzeko. Gerta liteke zuzen horrek bere bidaian [*OG*] klaseko elementurik ez ukitzea (beren gainazalak ebaki), infinituan galduz, nolabait esateko. Honela bada, esango dugu (oraingoz) zuzen horrek (0, 0, 0) hirukotea (kolore beltza) itzultzen digula informazio moduan (errealitatean puntu horretatik ez bailitzateke fotoirik helduko); hau da, lehenago aipatu bezala, kolore beltza izango da ordenagailuaren pantailako (*i, j*) pixelak erakutsiko diguna.

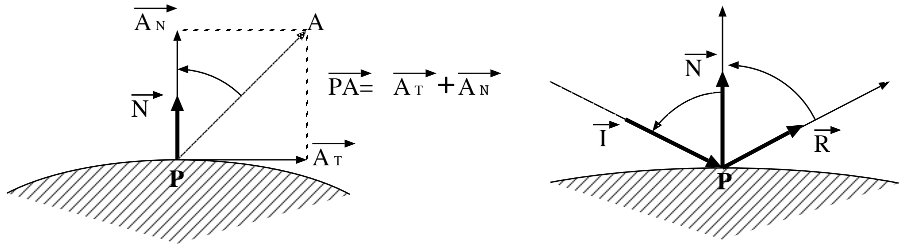


3. irudia. Tresneria abian.

Demagun orain informazio bila bidali dugun zuzenak ikutzen duela bai [*OG*] klaseko elementuren bat (*S*, [*OG*]-ren egitura *fisiko*ko gainazala matematikoki ebaki). Har dezagun ebakidura guztietatik *OK begirale-puntu*tik hurbilen dagoena: *p* E esango diogu puntu horri. Une horretan bigarren fase bat hasten da, [*r*1] zuzenak itzuli behar duen informazioa ($[0,1]^3$-ko hirukotea) eman behar diguna, eta hortik pantailan dagokion pixelean kolore moduan agertuko dena: *KV* [*p*] gisa adieraziko dugu informazio edo kolore hori.

3.1.1. *Argi Arrunta*

—Hasteko, demagun argia *p* punturaino heltzen dela; hau da, *p* eta [*Argia*]-ren *A* posizio-puntuaren arteko zuzenak ez duela beste [*OG*] klaseko elementurik ukitzen (*argiztatua izatea*-ren definizioa datozen lerroetan aldatuko da, aukera gehiago agertuko baitira). [4(a)] irudia.



4. irudia. (a) *A* puntuan kokaturik daukagun [*Argia*] klaseko elementuak *p* puntua argiztatzen du. (b) *p* puntuak *I* norabide-bektorea duen zuzena isla dezake.

—Badakigu *pA* bektorea bi bektoreren batura moduan adieraz daitekeela; bata [*OG*]-ren normala eta bestea [*OG*]-ren ukitzailea *p* puntuan: $pA = \mathrm{A}_\mathrm{N} + \mathrm{A}_\mathrm{T}$.

—Fisikak esango liguke *p* puntuak *A* puntuan kokatuta dagoen argi-iturritik jasotzen duen argi kopurua $\|\mathrm{A}_\mathrm{N}\|$-ren eta *p* eta *A*-ren arteko distantziaren araberakoa dela. Hain zuzen, *p* puntuak jasotzen duen argi kopurua

$$\frac{\|A_N\|}{\mathrm{d}(p, A)^2}\,(A_r, A_g, A_b) = \frac{\cos}{\mathrm{d}(p, A)}\,(A_r, A_g, A_b)$$

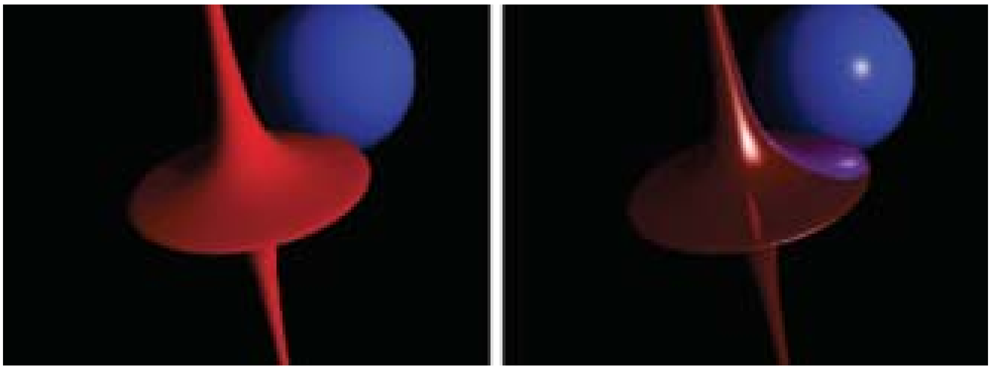
izango da. Gogoratu (A_r, A_g, A_b) $[0,1]^3$ hirukoteak *A* puntuan kokatuta dagoen *argi-iturriko kolorea* adierazten digula.

—Honela, gogoratuz [*OG*]-ren «kolorea» $kOG = (k_r, k_g, k_b)$ adierazten dugula, $Dif\,[p] = (k_rA_r, k_gA_g, k_bA_b)\,\dfrac{\cos}{\mathrm{d}(p, A)}$ idatziz, demagun *p* puntuari dagokion [*OG*]-ren ezaugarri fisiko bat dela jasotzen duen argi guztia bereganatzea, eta bakarrik kanporatzea bere kolorea ematen diona; orduan [*r*1] zuzenak itzuliko lukeen informazioa hauxe litzateke:

$$\mathrm{KV}[p] = Dif\,[p] = (k_rA_r, k_gA_g, k_bA_b)\,\frac{\cos}{\mathrm{d}(p, A)}$$

Hona helduta, ikus dezagun nolako itxura hartzen ari den eraikitzen ari garen *E*-ren barneko *argazki-makina*. Horretarako onena froga bat egitea da, edo beste era batera esateko, argia piztuko dugu behingoz orain arte ilunpean egon den *E* mundu horretan.

Lehen froga hori egiteko, [*OG*] klaseko bi elementu kokatzen ditugu, esfera eta sasiesfera dituztela egitura fisikoko gainazal moduan; [*Argia*] klaseko elementu bat eta [*Kam*] klaseko beste bat, azken hau [*OG*] *gauzakiei* «begira», eta *argazkia* hartzeko agindua ematen dugu; hain zuzen ere, lehenago deskribatutako prozesua *M* (*i, j*) sareko puntu guztietarako. Emaitza [5(a)] irudian ikus daiteke.



5. irudia. (a) «Eta argia sortu zen *E*-n»; (b) Sasiesferak argia eta gauzakiak islatzen ditu; esferak argia besterik ez.

3.1.2. *Argiaren islapena*

Lehen urratsa emanda dago; gure *E* espazioaren barnean *ikusteko* aukera dugu. Baina orain arte egindakoa hasiera besterik ez da. Gogoratu gure hastapeneko helburua *E* espazioan *argazkigintza* posible egitea zela, errealitatean gertatzen dena jarraibide moduan hartuz. Hori dela eta, badakigu goian aipaturiko fenomenoaz gain gauzakiek beste modu bateko portaera eduki dezaketela heltzen zaien argiarekiko (fotoiekiko —gogoratu zein den [*r*1] zuzenak egiten duen lana—). Horietako bat argiaren islapena da. Bigarren urrats honetan, posible egingo dugu fenomeno hori gure kontrolpean daukagun *E* mundu honetan.

- —[*OG*] klaseko egitura deskriptiboan $_r$ [0,1] konstantea definitzen dugu, «islapen-koefizientea»; honek adieraziko digu [*r*1] zuzenak itzuli behar duen *VK* [*p*] informazioko zenbateko proportzioa datorren *p* puntuan islatzen den informaziotik.
- —[4(b)] irudia. Alde batetik, heltzen den *I* eta islatua izango den *R* bektoreek angelu berbera osatuko dute *N* norabidearekiko, *p* puntu horretan gauzakiaren bektore normala den horrekiko; hau da, $=$. Gainera, norabide normal hori eta sartzen eta islatzen diren argi-izpiak, *N*, *I* eta *R*, bektore-plano bereko elementuak izango dira. Honela, *R* bektorea beste bi bektoreen konbinazio lineal moduan idazteko aukera erraza edukiko dugu: *I*, *N* eta *R* unitarioak,

$$R = I + 2\cos\quad N = I + 2 <-I,N>.$$

— Honela, R bektorea [$r1'$] beste zuzen baten norabide-bektorea izango da, p puntua jatorri duena eta [$r1$] zuzenak egiten zuen bezala, E espazioan informazio (kolore) bila murgilduko dena. Kasu honetan informazio hori, [$r1$] zuzenak itzuli behar duen KV [p]-ren osagai moduan erabiliko da. Zehazkiago, nomenklatura berbera erabiliz, [$r1'$]-k itzuliko duen informazioa KV_P [q] izendatuko dugu, q puntuaren kolorea p puntutik ikusita, eta informazio hori KV [p] kalkulatzeko erabiliko da.

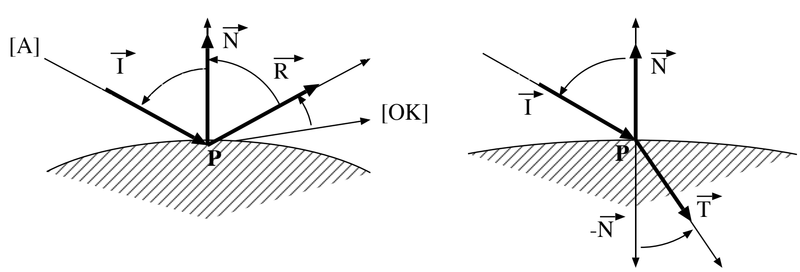
— Baina islapenak gehiago dakar. Badakigu horrelako gainazaletan zuzenean [A] argi-iturritik datorren argia bera ere islatu daitekeela, gauzakiaren iragazkia jasan barik: *ispilu-islapena* edo *distira,* eta ondo ikus daiteke nahiko leundutako gauzakietan, argiarekiko angelu egoki batetik ikusten direnean.

— Fenomeno edo portaera hau gure mundu honetan posible egiteko, [OG] klaseko egitura deskriptiboan $_s$ [0, 1] *(ispilu-koefizientea)* eta $_s$ (0,+ ∞) (*ispilu-potentziala*) konstanteak agertuko dira. Lehenengoak esango digu KV [p] koloreko zenbateko zatia etor daitekeen zuzenean argiaren koloretik. Honela, adibidez, $_s$ = 0-k ezaugarri hori ez duela esango lioke gure [OG] gauzakiari; $_s$ = 1-ek, aldiz, argiaren kolorearen VK [p]-ren gaineko eraginik handiena izango luke, goian aipaturiko angeluaren arabera, laster ikusiko dugun bezala. Horren alboan, $_s$ bigarren konstanteak, [OG] gauzakiko puntuetan argiaren islapena zabala edo murriztua izan behar duen azaltzen du.

— [6(a)] irudia. Argi dago angeluaren funtzioan egongo dela argiaren zenbateko islapena helduko den begiralearengana [Kam]-ko OK-ra. Hau da, [A] *argi-iturritik p* puntura heltzen den argiak sortuko duen islapena (kolorea) p puntu horretan (gogoratu 3.1.1.) hauxe izago da:

$$\mathrm{KLS}[p] = \frac{\|A_N\|}{\mathrm{d}(p, A)^2} \cdot {}_{s} \cdot (\cos\quad)^{s} \lozenge (A_r, A_g, A_b)$$

— Adibide gisa, metalen kasuan jakina da $_s \geq 50$ dela.



6. irudia. (a) puntuaren inguruan *A*-n kokaturik daukagun argiaren *ispilu-islapena;* (b) heltzen den zuzenaren *I* bektorea eta errefraktatua den zuzenaren *T* bektorea.

Geldiketa txiki bat eginez, aipatutako guztiari gainbegirada bat emango diogu. Gogoratuz *KV* [p] izeneko kolore baten bila gabiltzala, une honetan gure esku ditugu:

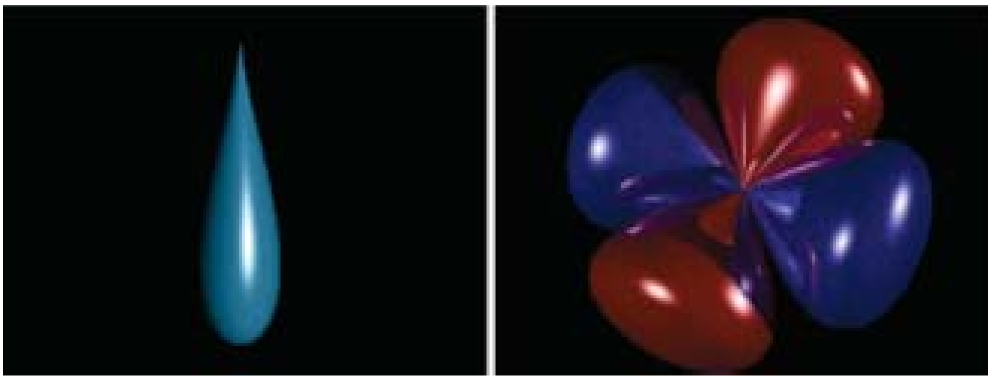
$$Dif\,[p]; \quad {}_r \quad \text{eta} \quad KV_p\,[q]; \quad KLS\,[p],$$

eta eraikitzen ari garen *argazki-kamera*ko «burmuin» hori hobetzeko aukera garbia ere.

Lehen eraldaketak barneko lege honetara garamatza:

$$KV\,[p] = KLS\,[p] + {}_r \cdot KV_p[q] + (1 - {}_r) \cdot Dif\,[p].$$

Hobekuntza hauek guztiek zer berri eskaini diguten ikusteko, lehenago aurkezturiko parametroak lehen irudia lortzeko erabili diren [*OG*] klaseko gauzakien egitura deskriptiboan jartzen ditugu, eta berriz argazki bat hartzen dugu, orain barne-lege berri honekin, hobetu dugun «burmuina» erabiliz. [5(b)] eta [7] irudiak lortuko genituzke. Nabaria da irudiaren kalitatearen hobekuntza.



7. irudia. (a) Malko itxurako kuartika bat; (b) leminiskata pare bat.

Hala ere, teknika honek ez du bere azken urratsa eman. Hasiera batean bota dugun amua gainazal geometrikoen argazkiak lortzea zen, espazio matematiko berberetik lortuta. Hori egiteko, gainazalak [*OG*] klaseko gauzakien egitura fisikoaren euskarri moduan kokatzen genituen, eta honela gainazalen eta «argiaren» arteko erlazioak ezartzeko modua lortu ere. Baina ez gara hemen gelditukoo; jauzi kualitatibo baten bila goaz: geroz eta protagonismo handiagoa hartzen ari den [*OG*] klaseko egitura deskriptiboa erabiliz, onartuko dugu argiak gauzakia zeharkatzea, hau da, gainazala zeharkatzea.

3.1.3. *Errefrakzioa*

Puntu honetan *gauzaki-argia* erlazioetako azken aukera osatuko dugu. Orain arte argiak ezin zuen gauzaki bat zeharkatu edo, hobeto esateko, ez genion hori egiten uzten. Aurrerantzean, tabu batzuk apurtuz, aukera hori onartuko dugu.

- Definitzen ditugu [*OG*]-ko egitura deskriptiboan beste bi konstante: $_t$ [0,1] eta $_{it}$ R. Lehenengoak, *errefrakzio-koefizientea,* gauzakiari heltzen denaren zenbateko proportzia errefraktatua den esango digu. $_t$ = 0-tik (ez da errefrakzioa onartzen) $_t$ = 1-eraino (heltzen zaion guztia errefraktatua izaten da) mugituko da. Bigarren konstanteak errefrakzioaren neurri bat emango digu.
- [6(b)] irudia. Fisikak esango liguke ingurune fisikoaren aldaketa dela eta *I* bektoreak *T*-k adierazten duen norabide-aldaketa jasaten duela, sin /sin = LEHEN INGURUNE FISIKOAREN BIGARREN INGURUNE FISIKOAREKIKO ERREFRAKZIO-INDIZEA izanik. Hori da $_{it}$ konstanteak kontrolatuko duena: $_{it}$ = sin /sin . Adibide gisa, uretatik airerako aldaketan $_{it}$ =1.33 da, eta airetik diamanterakoa $_{it}$ =1.75.
- Ezaguna da *I*, *N* eta *T* bektoreak planokideak direla. Orduan, isladupenaren kasuan egin dugun bezalaxe, *T* bektorea *I* eta *N* bektoreen konbinazio lineala izango da:

$$T = \left(_{it} \cos() \quad - \sqrt{1 + {}^{2}_{it} (\cos^2() \quad -1)} \right) N + \quad _{it}\, I$$

- [3] irudia. Orduan *T* bektorea zuzen berri baten norabide-bektorea bilakatuko zaigu, *p* puntua jatorri duena eta hasierako [*r*1]-en eta [*r*1']-ren antzera, *E* espazioan informazioren bila murgilduko dena: infinituan galdu edo *p*' beste puntu bat aurkituko du bidean. Azken kasu honetan VK_p [*p*'] *kalkula genezake*, *p*' punturen kolorea *p* puntutik ikusita, eta datu hori erabili, $_t$ koefizientearekin batera, *VK* [*p*]-ren behin betiko kalkuluan. Lehenengo kasuan («infinituan galtzea») VK_p [*p*'] = (0, 0, 0) litzateke.

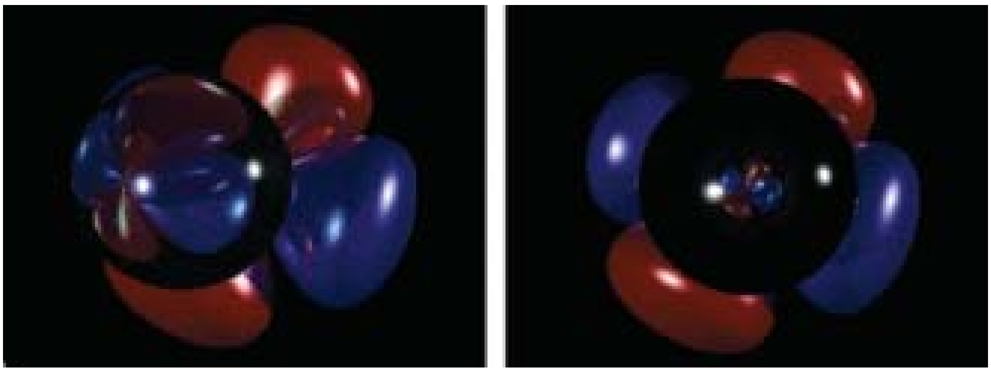
Eboluzioa hementxe bukatu eta lortutako fruituak gure *E* espazioaren barneko *argazki-makina* gidatu behar duen burmuinaren legeetan ezarriko ditugu. Honela, ikusbidea posible egin behar duen legea (lege berria) orain arte ikusi dugun bezalaxe, *p* puntuaz ikusiko dena ondorengo lau elementuen funtzioa izango da:

—argien distira *p*-ren gainean;
—*p*-ren islapenaren proportzioa;
—*p*-ren errefrakzioaren proportzioa;
—eta, azkenik, *p* gainean duen [*OG*]-ren kolore bera.

Zehazki,

$$KV\,[p] = KLS\,[p] + {}_{r} \cdot KV_{p}\,[q] + {}_{t} \cdot KV_{p}\,[p'] + (1 - {}_{t} - {}_{r}) \cdot Dif\,[p].$$

Argituko dugu hemen formulak laburragoak eta errazagoak idazteko beste gauza batzuen artean *argi-iturri* bakar bat erabili dugula. Gehiago baleude, prozesu osoa bakoitzerako errepikatu beharko litzateke eta lortutako emaitzak batu. Berba hauei irudia jartzeko, froga dezagun gure makina berritua lehenago ikusitako lemniskaten gainean, baina horien aurrean egitura deskriptiboan errefrakzioa aktibaturik daukan [*OG*]-klaseko *gauzaki* bat izanik, gainazala esfera duena, hain zuzen ere [8] irudia:



8. irudia. Esfera bat ${}_{it}$ balio desberdinetarako leminiskatak errefraktatuz.

4. HELBURU BERRIAK

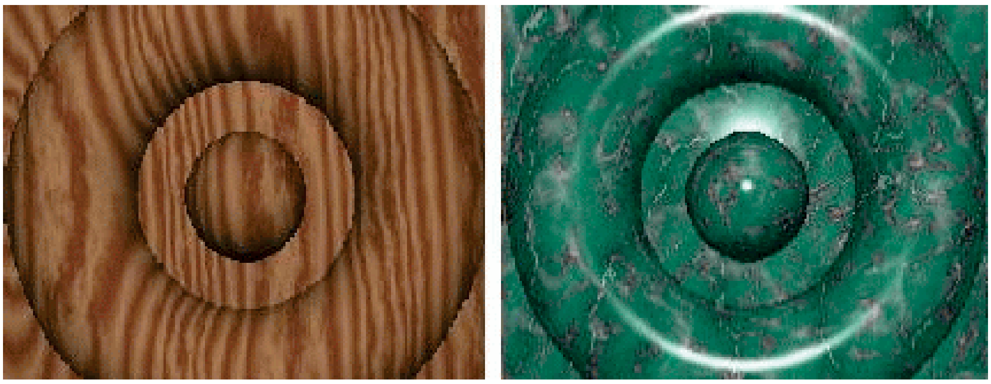
Esan genezake hemen bukatu egin dela urratsez urrats egin dugun tresneriaren nukleoaren eboluzioa. Lortzen diren irudiak ikusita, ez ginateke asko arriskatuko hasieran jarritako helburuak guztiz beteta geratu direla esango bagenu. Baina, hala ere, altxorrik aberatsena (egitura deskriptiboan) ikusteke dago. Xehetasunetan sartu barik, aipatuko ditugu aukera berri horietakoen batzuk.

Lehen urratsa eta logikoena, tresneria bukatu ondoren, [*Kam*], [*Argia*] eta [OG] klaseei begiratzea litzateke. Hor egin daitekeenak orri askotarako emango liguke. Lerro hauetan bakarrik [*OG*]-ren inguruko aipamen batzuk egingo ditugu.

[*OG*] klasea, gogoratuz, bi egituratan banatuta genuen: bata, egitura edo euskarri fisikoa, gainazal geometrikoa sartzeko erabiltzen duguna; bigarrena, egitura deskriptiboa. Orain arte, egitura deskriptibo honetan $K, {}_{r}, {}_{s}, {}_{s}, {}_{t}, {}_{it}$ konstanteak eta gainazalen gainean definituriko aplikazio bat genituen. Ikusi dugu makinaren eboluzioa egitura honen eskutik etorri dela. Hortxe, egitura deskriptibo horretan, benetako altxorra daukagu.

4.1. **Egitura Deskriptiboa «ber n»**

Goian aurkeztutako algoritmo nagusiari begira, ikusten dugu erabili ditugun datu asko konstanteak direla gainazalean zehar; gainazaleko puntu guztietarako berberak. Hauxe da *kolorea*ren kasua, hasiera batetik konstante moduan hartu duguna, eta baita ${}_{r}, {}_{s}, {}_{t}, \ldots$ koefizienteen kasua ere. Baina ez da konstante izatearen beharra inon ikusi. Tresneriaren burmuinaren gainazalen gaineko portaera guztiz «puntuala» dela ikusiz, gainazal bateko *p* puntuan azterketa egiten duenean *p*-ri buruzko datuak eskatzen ditu eta berdin zaio *p*-ren ingurunean gertatzen dena, pentsa genezake konstante horien ordez [*OG*]-ren gainazalean definiturik dauden aplikazioak eta funtzioak, puntuz puntu aldatzen direnak, erabiltzea. Adibidez, *kOG* kolore konstantearen ordez $kOG : S \quad [0, 1]^3$ aplikazio bat defini genezake («puntualtasuna»-ren aipamena gogoratuz ez du zergatik aplikazio jarraikia ere izan behar). Antzeko zerbait esan genezake beste konstante eta koefiziente guztietarako; hau da, funtzioak izateko aukera genuke, ${}_{r}, {}_{s}, {}_{t} : S \quad [0, 1]$, eta abar. Aukera hauek guztiek bultzada nabarmena ematen diote eraikitzen aritu garen tresneriari.



9. irudia. Espazio osoan definituriko *kolore-aplikazio*-etarako aukera batzuk.

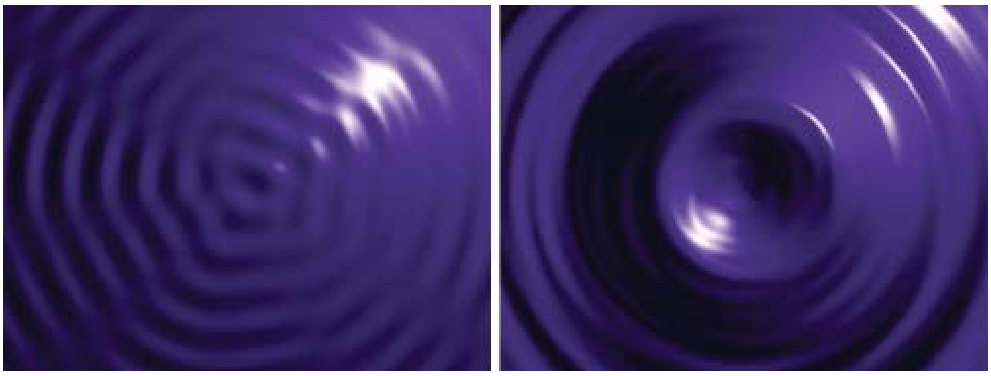
4.1.1. *Kolore-aplikazioa*

Esan bezala, tresneriaren legeak guztiz puntualak diren unetik (p-ko datu batek ez dio p-ren alboan dagoen r puntuaren datuari behartzen, p-tik hurbil badago ere), eskuak aske ditugu, adibidez, gure gustuko *kolore-aplikazio* desberdinak definitzeko. Honela eduki genezake E espazio osoan definiturik dagoen aplikazio bat non S gainazaleko p puntu batek espazioko posizio horretan egoteagatik hartuko lukeen kolore hori, [9] irudia. Edo, bestalde, defini genezake S gainazaleko puntuetarako, eta bakarrik horietarako, aplikagarri den aplikazio bat, oso xehetua, xehetasun asko hartuko lituzkeena (gainazalaren neurriak, begiralearenganako distantzia, angelua, eta abar) datuak emateko, [10] irudia. Edo gainazalak parametrizatu (geometrikoki) puntuen koordenatu lokalekin batera koloreen koordenatuak emateko, [10(b)] irudia.

10. irudia. Gainazal jakinei lotutako *kolore-aplikazioak:* (a) Nebulosa bat. (b) Jupiterren Io ilargiaren orbitan Merkurio planeta honen ordez sartuta.

4.1.2. *Aplikazio normala*

[OG] klasea aurkeztu eta definitu dugunean, $N : S \quad S^2$ aplikazio normalaren lana idatzi dugu [OG]-ko gainazaleko $p \quad S$ puntu bakoitzeko $N(p)$ = BEKTORE [OG]-REN NORMALA ETA UNITARIOA S GAINAZALEKO p PUNTUAN zela. Nahita idatzi dugu «NORMAL UNITARIOA [OG]-RI», horrek geometriak ezartzen duen gainazal baten eta beren aplikazio normalaren arteko loturatik askatzen baikaitu. VK [p]-ren kalkuluan burmuinak bektore normala eskatzen duenean, berdin zaio geometrikoki normala den edo ez; bek-

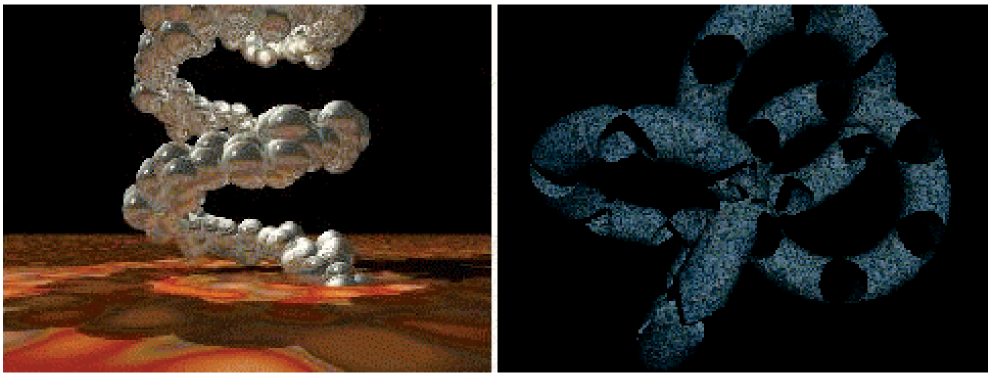


11. irudia. Gainazal berbera (plano bat) baina aplikazio normal desberdinak.

tore unitario bat behar du lan hori egiteko; hori da hartuko duena, eta emaitza bektore horren arabera etorriko da. Honako hau ez da nukleoaren ahulgune bat; alderantziz, gure makinaren aukerak askoz handiagoak izango dira: **gure esku lege geometrikoak bete edo ez.** [*OG*]-ren egitura deskriptiboan daukagun aplikazio normala [*OG*]-ren egitura fisikoko gainazalarekiko autonomoa izango da. Ondorioa? nahi izanez gero, **argiak begiari iruzur egin liezaioke,** [11] irudia.

4.2. **C.S.G. (Constructive Solid Geometry)**

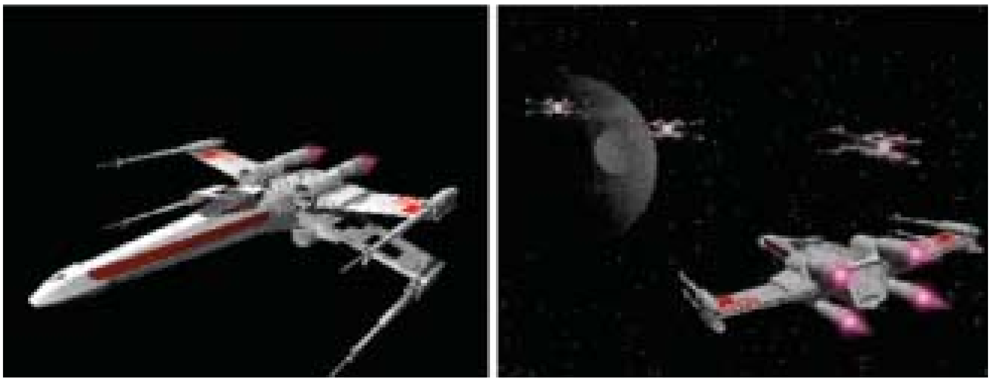
Hemen aipatuko ditugun [*OG*] klasearen inguruko hobekuntzei bukaera emateko, lerro batzuk *C.S.G.*k eskaintzen digunari buruz. [*OG*] klaseko egitura fisikoan gainazal bakun bat jartzen genuen, geometrikoki «erraz» defini daitekeen horietako bat. *C.S.G.*ren bitartez gainazal bakunak oinarri bezala hartuta, gainazal konplexuagoak definitzeko aukera genuke, horretarako hiru eragiketa nagusi erabiliz: bildura, ebakidura eta diferentzia. Eragiketa hauek aplikatzen dira [*OG*]-ko gainazalaren gainean eta *C.S.G.*ren bitartez lortu egin diren gauzaki konplexuen gainean ere. Esan genezake [*OG*]-ak atomoak direla eta *C.S.G.*ren bitartez atomo horietatik molekulak sortzen direla. Gauza asko esan litezke teknika honen inguruan (adibidez argitu ebakidura eta diferentzia-eragiketak), baina hori etorkizunerako utziko dugu.



12. irudia. (a) Esferak nonnahi; (b) Bildurak, ebakidurak eta diferentziak toroen gainean.

Hori bai, ikus ditzagun teknika honen emaitzak [12] irudian (bildurak, eta bildura gehiago), [13] irudian (arkitektura pixka bat) eta [14] irudian (eta noski fikzio-zientzia).

13. irudia. (a) Partenon-a bisitatu; (b) Jauregi bat eraiki.



14. irudia. Oinarrizko gauzakiak konbinatuz, gauzaki konplexu bat lortzen dugu. Hori egindakoan, klonazioa egiten dugu.

5. **BUKAERA**

Hemen amaituko dugu. Gure E espazioaren eraikitze-bilakaera berrikusiko bagenu, azpimarratuko genuke azken finean espazio hori espazio afin euklidearra besterik ez dela, elementu bakoitza koordenatuen bidez zehazki kokatuta duena. Honela ba, espazio horretako elementu guztien gainean oinarrizko (eta ez hain oinarrizko) transformazio geometrikoak aplikatzeko aukera dugu: translazioak, biraketak, dilatazioak, kurben gaineko garraiaketa, eta abar. Adibidez, [OG] bat puntu batetik beste puntu batera eramango bagenu eta gure E-ren barneko kamera bat ibilbideari jarraituko balitzaio, aldaketa txikiro *argazkia* hartuz, irudi horiek guztiak *argazkia* izatetik *fotograma* izatera helduko lirateke, eta honela animazio-sekuentzia bat osatuko lukete. Baina hori beste kontu bat da.