EKAIA (2024), artikulua prentsan/article in press.
https://doi.org/10.1387/ekaia.25706
Behin-behineko bertsioa (euskara-orrazketaren faltan).

ekaia
ZIENTZIA eta TEKNOLOGIA ALDIZKARIA

ISSN: 0214-9001
e-ISSN: 2444-3255
©UPV/EHU Press

Kointzidentzien jokoaren azterketa bat

An analysis of the game of rencontres

Yosu Yurramendi Mendizabal

Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala Saileko lankide

Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

yosu.yurramendi@ehu.eus

LABURPENA: Kointzidentzien jokoa lehendabizikoz Pierre Rémond de Montmort-ek (1678-1719) enuntziatu zuen 1708an 'Jeu du Treize' izenarekin. Jokoaren ebazpena konbinatorian eta probabilitate-kalkuluan dago oinarrituta. Idazlan honetan hiru soluziobide ematen dira, eta bakoitzaren ezaugarriak adierazten. Lehenengo biak matematika esperimentalei dagozkie.

HITZ GAKOAK: Kointzidentzien jokoa, simulazioa, matematika esperimentalak, errekurtsibitatea, barneratze-kanporatze erregela.

ABSTRACT: The game of rencontres was first stated by Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) in 1708 under the name 'Jeu du Treize'. The solution is based on combinatorics and calculus of probability. This work provides three ways of solution, and points out the features of each of them. The first two belong to experimental mathematics.

KEYWORDS: Rencontres numbers, simulation, experimental mathematics, recursion, inclusion-exclusion rule.

***Harremanetan jartzeko/ Corresponding author**: Yosu Yurramendi Mendizabal. https://orcid.org/0000-0002-4399-600X, yosu.yurramendi@ehu.eus

Nola aipatu / How to cite: Yurramendi, Yosu (2024). <<Kointzidentzien jokoaren azterketa bat>>, Ekaia, 46, xx-xx. (https://doi.org/10.1387/ekaia.25706)

Jasoa: abenduak 1, 2023; Onartua: apirilak 9, 2024

ISSN 0214-9001-eISSN 2444-3225 / © 2024 UPV/EHU

1. SARRERA

Pierre Rémond de Montmort (1678-1719)-ek [1] 1708an argitaratutako ‘Essay d’Analyse sur les Jeux de Hazard’ idazlanean, ‘Jeu du Treize’ izeneko jokoa agertzen du, eta 1713an, bigarren argitaraldian, jokoaren ebazpena ematen du probabilitate-terminoetan [2].

Hona hemen berak ematen duen jokoaren deskribapen euskaratua:

“Lehenik eta behin jokalariek zozketa bat egiten dute eskua nork duen erabakitzeko. Demagun Pierre dela, eta jokalari kopurua nahi den edozein dela. Pierrek, berrogeita hamabi kartez osatutako sorta bat izanik, bata bestearen ondotik botatzen ditu, 'bat' izendatuz eta ahoskatuz lehen karta botatzen duenean, 'bi' bigarren karta botatzen duenean, 'hiru' hirugarrena botatzen duenean, eta horrela 'Erregea' den hamahirugarreneraino. Orduan, karta-segida honetan guztian ez badu bat bera ere bota izendatu dituen mailaren arabera, jokalari bakoitzari mahai-jokoan jarri duena ordaintzen dio, eta eskuinean dagoenari ematen dio eskua.

Baina hamahiru karta horien segidan, adibidez, 'bat' izendatzen duenean bateko bat botatzen badu, edo biko bat 'bi' izendatzen duen unean, edo hiruko bat 'hiru' izendatzen duen unean, eta abar, mahai-jokoan dagoen guztia hartzen du, eta lehen bezala berriro hasten da jokoa, jokalari bakoitzak mahai-jokoan dirua jarriz, eta 'bat', 'bi' eta abar izendatuz.

Gerta liteke Pierrek behin baino gehiagotan irabazi ondoren, eta batetik hasita, karta bakar bat ere ez izatea eskuan hamahirugarren kartara iristeko, orduan, kartarik ez duenean, botatako karta guztiak nahastu behar ditu, karta-sorta moztu, eta, gero, jokoarekin jarraitzeko behar duen karta-kopurua bota behar du karta-sorta osotik, aurreko eskuan geratu denarekin hasita. Adibidez, baldin azken karta zazpi izendatu badu, karta-sorta moztu ondoren, bota behar duen lehen karta 'zortzi' izendatu eta gero 'bederatzi', eta abar, 'hamahiru' arte, lehenago irabazi ezean, eta orduan berriz hasiko litzateke, lehenik 'bat', gero 'bi', eta gainerakoak arestian azaldu bezala izendatuz. Hortik ondorioztatzen da Pierrek hainbat esku jarraian egin ditzakeela, baita amaigabe joka dezakeela ere.”

Jokoa matematikoki aztertzearren bi jokalari hartzen dira kontuan, Montmortek egin zuen bezala: A, Pierre, eta B, jokalari multzoa. Gainera, esku bakarra aztertzen da, gehienez n karta botaz, 13 karta bota ordez. Jokoa ebaztea galdera honi erantzuna ematea izango da: zein da jokalari bakoitzak duen irabazteko probabilitatea?

Horrelako jokoa daukagu beraz: *n* karta desberdinez osatutako karta-sorta bat zoriz nahastu ondoren, kartak banan-banan botata eta *1*-etik *n*-ra izendatuta, kointzidentzia bat dagoenean A-k irabazten du, eta bestela, karta-sorta agortutakoan kointzidentziarik ez dagoenean, B-k irabazten du. Are ikuspegi zabalago batetik, pentsa daiteke *n* kartak botatzen direla, hau da, *n* karten permutazio bat definitzen dela, eta lehenengo kointzidentzia noiz gertatzen den behatu baino (kointzidentziarik badago) permutazioaren kointzidentzia kopurua behatzen dela.

Matematikari askok egin diote aurre problema honi, eta ohikoa bihurtu da probabilitate-kalkuluaren testuetan.

Idazlan honetan problema ebazteko hiru bide azaltzen ditut (2. atala):

1. Lehena simulazio-prozesu bat da. Probabilitate-kalkulua ezagutu gabe, baina programatzeko gaitasuna izanda, erantzun bat eman dakioke galderari, praktikoki nahi bezain zehatza. Konputagailu baten bitartez hainbat (*N*) permutazio sortzen dira zori hutsez (*n* tamainako permutazio guztiek gertatzeko probabilitate berdina izanda), eta horietako bakoitzean kointzidentzia kopurua zenbatzen da. Bilatutako probabilitateak kointzidentzia kopuruaren maiztasunen bidez zenbatesten dira.

2. Bigarrena behaketa-prozesu bat da. *n* bakoitzerako permutazio guztiak sortzen dira, eta horietako bakoitzean kointzidentzia kopurua (*k*) zenbatzen da (honetarako ere, *n* txikia ez denean, konputagailu bat eta programa informatiko bat ezinbestekoak dira). Horrela osatzen da *T(n,k)* izeneko taula bat. Taulari begira, zenbakien arteko zenbait erlazio behatzen dira, galderari erantzun bat ematen diotenak.

3. Hirugarrena, konbinatorian oinarritutako bide analitikoa da.

Lehenengo bi soluziobideak matematika esperimentalari dagozkio. Biak dira ibiltzeko errazak, eta beren ahalmenak adierazten ditut. Idazlan honen ikuspegi nagusia osatzen dute.

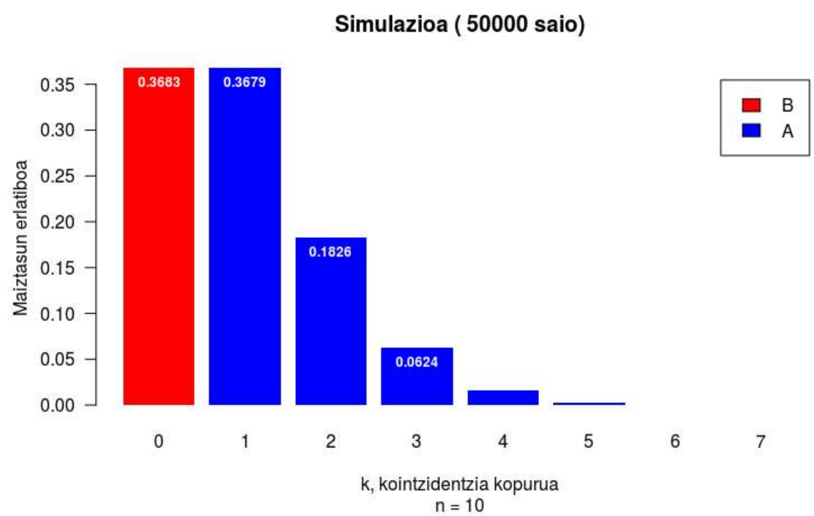
Hiru soluziobideei buruzko zenbait iruzkin azaltzen ditut 3. atalean.

2. SOLUZIOBIDEAK

2. 1. KOINTZIDENTZIEN JOKOAREN SIMULAZIOA

Konputagailu batekin jokoaren simulazioa egitea erraza da. Eranskinean ematen dut R lengoaia informatikoan [3] egindako programa. Simulazio-saio bat honetan datza: lehenengo n zenbakien zorizko permutazio bat sortu, eta bertan dauden kointzidentziak zenbatu (0 eta n-ren arteko zenbaki bat lortu). Adibidez, $n=7$ *632415**7*** permutazioak 2 kointzidentzia ditu, ***4***koa eta ***7***koa.

Halako N saio eginez gero kointzidentzien kopuru-zerrenda bat osatzen da. 0 eta n-ren arteko zenbaki oso bakoitzari maiztasun bat dagokio. 1. irudian azaltzen dut $n=10$ eta $N=50000$ direnean lortutako maiztasun erlatiboen grafiko bat.



1. irudia. $n=10$ jokoaren $N=50000$ zorizko simulazio-saioren emaitza.

Bertan azaltzen da zenbatetan irabazi duen B jokalariak, (0 kointzidentzia, **gorriz**, *%36.832*tan), eta zenbatetan A-k (**urdinez**, *%63.168*tan). Ez dirudi beraz jokoa orekatuta dagoenik (*%50* eta *%50*): A-k irabazteko abantaila du.

Grafikoaren barren luzerei erreparatuta badago gehiago esaterik, 'gutxi gorabehera' bada ere:

1. *0* kointzidentzia eta kointzidentzia bakar baten maiztasunak parekoak dira (*0.36832* eta *0.36788*). Hortaz, A-ren abantaila kointzidentzia bat baino gehiagotan gertatzen diren saioetan datza.

2. *2* kointzidentzien maiztasuna (*0.18260*) kointzidentzia bakar batenaren erdia da (*1/2*).

3. *3* kointzidentzien maiztasuna (*0.06240*) *2* kointzidentzien maiztasunaren herena da (*1/3*).

4. *4, 5, 6* eta *7* kointzidentzien maiztasunak *0.01554* , *0.00272, 0.00046* eta *0.00008* dira, hurrenez hurren; hau da, aurreko kointzidentzia kopuruaren maiztasunaren *1/4, 1/5, 1/6* eta *1/7*, hurrenez hurren.

5. Ez da *7* kointzidentzia baino gehiagorik gertatu *50000* saio horien artean, ez *8* ezta *10* kointzidentzia ere, baina gerta zitekeen. Noski, ezinezkoa da *9* kointzidentzia zehatz-mehatz gertatzea.

Egiazta daiteke $n=10$-ren ordez beste edozein n handiago bat erabiliz gero antzeko maiztasunak lortzen direla. 2.3 atalean emango dut honen arrazoia.

0 kointzidentziaren maiztasun erlatiboari f_0 izena emanda (B-k irabazitakoaren maiztasuna), eta aipatutako oharrak kontuan hartuta, maiztasun-banaketa bat denez gero (batura 1), hauxe dugu 'gutxi gorabehera':

$f_0 \cdot (1 + 1 + 1/2 + 1/(2 \cdot 3) + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4) + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + 1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)) \approx 1$, edo
$f_0 \cdot (1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6! + 1/7!) \approx 1$.

n handia denean, parentesien arteko biderkagaiak e zenbakiaren ($e=2.71828$) seriezko garapenaren hasiera gogoratzen digu ($e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + ...$). Horrenbestez, n handia denean, limitean, $f_0 \cdot e \approx 1$, edo $f_0 \approx 1/e$:

$$f_0 \approx e^{-1} = 1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! + ... = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i / i! \quad (0)$$

Guzti honen arabera, B-k irabazteko duen probabilitate zenbatetsia (f_0) *0.3678794* da, eta A-k duena, beraz, *0.6321206*. Ohar daitekeenez, zenbatespen hauek simulazioan lortutako maiztasun erlatiboen antzekoak dira.

Gainera, f_0, f_1, f_2, ..., f_k, ..., f_n izenak emanda k kointzidentziaren maiztasun erlatiboei, simulazioaren emaitzek hauxe iradokitzen dute: $f_k \approx f_0 \cdot 1/k!$ ($0 \le k \le (n-2)$). Esan bezala $f_{n-1} = 0$ da, eta f_n, n elementuak bere lekuan kointziditzearen maiztasun erlatiboa, $1/n!$ 'gutxi gorabehera'. Kontuan hartuta $8! = 40320$ eta $10! = 3628800$ direla, ez da harritzekoa simulazioan *8* edo *10* kointzidentzia gertatu ez izana, *50000* saio egin baldin baditut ere.

2. 2. KOINTZIDENTZIEN TAULAREN BEHAKETA

n bakoitzerako, zorizko permutazioak eragin ordez permutazio guztiak sortzen dira, eta permutazio bakoitzaren kointzidentzia kopurua (*k*) kalkulatzen da. Adibidez, $n=4$ kasurako 1. taula osatzen da:

1. taula. $n=4$-ren permutazioak, kointzidentzia kopuruaren arabera sailkatuta

$n=4,\ k=$	0	1	2	3	4
	2143	**1**423	**12**43		**1234**
	2341	**1**342	**1**4**3**2		
	2413	3**2**41	**1**32**4**		
	3142	4**2**13	4**23**1		
	3412	24**3**1	3**2**1**4**		
	3421	41**3**2	21**34**		
	4123	231**4**			
	4312	312**4**			
	4321				
$T(4,k)=$	(9)	(8)	(6)	(0)	(1)

Horrela arituz *n* eta *k* desberdinetarako ($0\leq k\leq n$), maiztasun-taula bat osa daiteke (ikusi 2. taula): $T(n,k),\ n\geq 0,\ 0\leq k\leq n$ ($n=0$ lerroarena gehitu dut, $T(0,0)=1$, komenentziagatik, aurrerago azalduko dudanez). $T(n,k)$ funtzioa da jokoaren problema aztertzeko definitzen den objektu matematikoa.

2. taula. $T(n,k)$ kointzidentzien taula

n \ *k*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Guztira (n!)
0	1											1
1	0	1										1
2	1	0	1									2
3	2	3	0	1								6
4	9	8	6	0	1							24
5	44	45	20	10	0	1						120
6	265	264	135	40	15	0	1					720
7	1854	1855	924	315	70	21	0	1				5040
8	14833	14832	7420	2464	630	112	28	0	1			40320
9	133496	133497	66744	22260	5544	1134	168	36	0	1		362880
10	1334961	1334960	667485	222480	55650	11088	1890	240	45	0	1	3628800

EKAIA (2024), artikulua prentsan/article in press.
https://doi.org/10.1387/ekaia.25706

Konputagailua ezinbestekoa da halako taula bat osatzeko [4], [5]; konputagailuaren potentziaren arabera *n*-ren handitasuna mugatua da. Eranskinean R lengoaian egindako programa informatikoa ematen dut.

2. taularen bertako egiturari erreparatuta, berehalako hauek esan daitezke zenbakiei buruz:

1. $T(n,n) = 1, n \geq 0$ (2)

   Diagonal nagusia *1*-ez osatuta dago.

2. $T(n,n\text{-}1) = 0, n \geq 1$ (3)

   Diagonalaren azpiko hurrengo paraleloa *0*-z osatuta dago.

3. $T(n,1) = n \cdot T(n\text{-}1,0), n \geq 1$ (4)

   k=1 zutabeko zenbaki bat aurreko lerroan eta *k=0* zutabean dagoen *n* aldiz biderkatutako zenbakia da.

4. $T(n,0) - T(n,1) = (-1)^n, n \geq 1$ (5)

   k=0 eta *k=1* zutabeak antzekoak dira, unitate bakar baten aldea dute, eta aldizkatu egiten dira.

5. Kointzidentzien kopuruak faktore egokietan deskonposatuz gero (ikusi 3. taula), koefiziente binomialak [6] beha daitezke ($C(n,k) = n! / (k! \cdot (n\text{-}k)!)$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$).

3. taula. *T(n,k)* kointzidentzien taula deskonposatuta

k / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Guztira (n!)
0	1·1											1
1	0·1	1·1										1
2	1·1	0·2	1·1									2
3	2·1	1·3	0·3	1·1								6
4	9·1	2·4	1·6	0·4	1·1							24
5	44·1	9·5	2·10	1·10	0·5	1·1						120
6	265·1	44·6	9·15	2·20	1·15	0·6	1·1					720
7	1854·1	265·7	44·21	9·35	2·35	1·21	0·7	1·1				5040
8	14833·1	1854·8	265·28	44·56	9·70	2·56	1·28	0·8	1·1			40320
9	133496·1	14833·9	1854·36	265·84	44·126	9·126	2·84	1·36	0·9	1·1		362880
10	1334961·1	133496·10	14833·45	1854·120	265·210	44·252	9·120	2·120	1·45	0·10	1·1	3628800

Ohar daitekeenez, $T(n,k)$ zenbakiak $T(n\text{-}k,0)$ eta $C(n,k)$ zenbakien bitartez osatzen dira. Adibidez, $T(9,4) = 44 \cdot 126 = T(5,0) \cdot C(9,4)$. Orokorrean:

$$T(n,k) = T(n\text{-}k,0) \cdot C(n,k),\ n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n \quad (6)$$

$T(n,n) = 1$ adierazpide orokor honetan sartzeko $T(0,0) = 1$ definitu izana komeni da.
Formula honen bi kasu berezi dira $k=n$ denean, (2) formula ($T(n,n)=1$), eta $k=1$ denean, (4) formula ($T(n,1) = T(n\text{-}1,0) \cdot n$).

Beraz, taularen gakoa (problemarena, azken finean), B-ri dagokion $T(n,0)$ zutabeak adierazten duen segidan dago. 4. taulan ikus daiteke zertan den segida hau.

4. taula. *T(n,0)* kointzidentzien zutabea deskonposatuta

n	*T(n,0)*	*T(n,0)*
0	***1***	
1	***0***	
2	***1***	*1·(1+0)*
3	***2***	*2·(0+1)*
4	***9***	*3·(1+2)*
5	***44***	*4·(2+9)*
6	***265***	*5·(9+44)*
7	***1854***	*6·(44+265)*
8	***14833***	*7·(265+1854)*
9	***133496***	*8·(1854+14833)*
10	***1334961***	*9·(14833+133496)*

Bigarren zutabeak formula errekurtsibo hau iradokitzen du:

$$T(n,0) = (n\text{-}1) \cdot [T(n\text{-}1,0) + T(n\text{-}2,0)],\ n \geq 2,\ T(0,0) = 1,\ T(1,0) = 0 \quad (7)$$

2. taularen lehenengo behaketa eginda, laburbilduz esan daiteke bi formula nagusi daudela $T(n,k)$ taularen muinean, (6) eta (7) formulak.

2. taula beste ikuspegi batetik beha liteke, hain zuzen lerroekiko proportzioen bitarteko ikuspegitik (ikusi 5. taula). Proportzio hauek probabilitate gisa uler daitezke n jakin baterako

permutazioek gertatzeko zori berbera dutenean (permutazioen probabilitate-banaketa uniformea, $1/n!$ alegia).

Bitez $p_{n,k} = T(n,k)/n!$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$. Hortaz, $p_{0,0} = 1$, $p_{1,0} = 0$, $p_{n,n-1} = 0$ eta $p_{n,n} = 1/n!$ dira.

5. taula. Kointzidentzien taula proportzionalki ($p_{n,k} \equiv T(n,k)/n!$)

k / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1.00000										
1	0↓	1.00000									
2	0.50000↑	0↓	0.50000								
3	0.33333↓	0.50000↑	0↓	0.16667							
4	0.37500↑	0.33333↓	0.25000↑	0↓	0.41667						
5	0.36667↓	0.37500↑	0.16667↓	0.08333↑	0↓	0.00833					
6	0.36806↑	0.36667↓	0.18750↑	0.05556↓	0.20833↑	0↓	0.00139				
7	0.36786↓	0.36806↑	0.18333↓	0.06250↑	0.01389↓	0.00417↑	0↓	0.00020			
8	0.36788↑	0.36786↓	0.18403↑	0.06111↓	0.01563↑	0.00278↓	0.00069↑	0↓	0.00002		
9	0.36788↓	0.36788↑	0.18393↓	0.06134↑	0.01528↓	0.00313↑	0.00046↓	0.00010↑	0↓	0.00000	
10	**0.36788**↑	**0.36788**↓	**0.18394**↑	**0.06131**↓	**0.01533**↑	**0.00356**↓	**0.00052**↑	**0.00007**↓	**0.00001**↑	**0**↓	**0.00000**

Ohar daitekeenez $n=10$ kasuaren lerroa aurreko ataleko simulazioarekin lortutako maiztasunen erlatiboen antzekoa da (1. irudia).

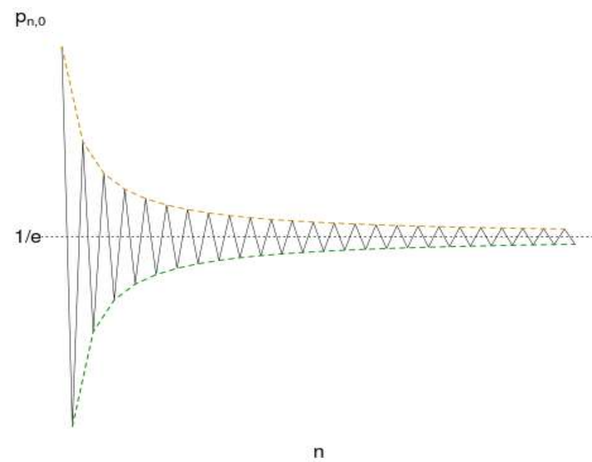
Gainera, zutabeak goitik behera ikusita, konbergenteak eta oszilatzaileak direla dirudi. Zutabe bakoitza bi segidatan deskonposa daiteke (ikusi 5. taula):

1. k eta n bikoitiak direnean segidak beheranzkoak dira. Adibidez $k=0$ denean, *1.00000, 0.50000, 0.37500, 0.36806, 0.36788, ...*

2. k bikoitia eta n bakoitia direnean, goranzkoak. Adibidez k=0 denean, *0, 0.33333, 0.36667, 0.36786, 0,36788, ...*

3. k bakoitia denean, alderantziz.

$k=0$-ren zutabean bi segidak, goranzkoena eta beheranzkoena, puntu berera konbergitzen dute ($1/e = 0.3678794$), bata gainetik eta bestea azpitik. 2. irudian adierazten da joera hau, kontuan hartuta $p_{n,0}$-ren ardatzean ez dela unitaterik definitu, grafikoa era ulergarri batean azaltzeko eskala egokirik ezin izan dudalako eman.



2. irudia. $p_{n,0}$-ren balioen joera konbergentea n-ren handitzearekin batera.

2.3. ARRAZOIKETA KONBINATORIOAREN BIDEZKO FORMULAK.

Aurreko bi azpiataletan (2.1 eta 2.2) zenbait formula lortu dira esperimentazioaren bitartez. Atal honetan formula horien egiazkotasuna azalduko dut konbinatoriaren arrazoibidea erabiliz. Ikuspegia ez da beraz esperimentala izango.

Lehendabizi, B jokalariaren irabazteko probabilitatea kalkulatzeko formula esplizitu bat, 2.1 ataleko simulazioak eta e zenbakiaren seriezko garapenak iradokitako (0) formulan oinarritutakoa, eta gero 2.2 atalean lortutako (6) eta (7) formula errekurtsiboak.

Ingelesez *derangement* deitzen zaio berezko kokapenean elementurik ez duen permutazio bati (*0* kointzidentzia), puntu finkorik gabeko permutazio bati alegia [7]. Kointzidentzien problema, beraz, *derangement* kopurua zenbatzean datza (kointzidentzia kopuruaren osagarria), B jokalariaren ikuspegia, 2.1 eta 2.2 ataletan nagusi izan dena (f_0 eta $T(n,0)$).

Formula esplizitura iristeko A-ren ikuspegia izango da gakoa, aurreko bi ataletan ez bezala. Beraz, karta-sorta jakin baterako kalkulatuko dut zenbat aldiz gertatzen den karta bakoitza bere lekuan, eta gero haien arteko erlazioei buruz hausnartuko dut. Hauxe da probabilitate-kalkuluari buruzko ohiko testuetan azaltzen den arrazoibidea.

Bedi A_i, i zenbakia duen karta ($1 \leq i \leq n$) bere lekuan (i. lekuan) gertatzea (kointzidentzia bat) adierazten duen permutazio-multzoa. Kalkulatzeko zenbatetan ez den gertatzen kartarik bere lekuan ($T(n,0)$, B-ren ikuspegia), kalkulatuko dut zenbatetan gertatzen den A_1, edo A_2, edo ... edo A_i, edo ..., edo A_n (honela adierazten da multzo-teoria erabiliz: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ \ldots \cup A_n|$), eta guztirako permutazio kopurua den $n!$ zenbakiarekiko osagarria izango da bilatutako $T(n,0)$-a.

$n=1$ kasuan $A_1=\{1\}$. Beraz: $T(1,0) = 1! - |A_1| = \mathbf{0}$.

$n=2$ kasuan $A_1=\{12\}$, $A_2=\{12\}$. A_1-k eta A_2-k permutazio bana dute, eta gainera berbera da ($A_1 \cap A_2=\{12\}$); hau da, 12 permutazioa bi aldiz zenbatzen da. Beraz:

$|A_1 \cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2| = 2 \cdot 1-1 = 1$, eta $T(2,0) = 2! - |A_1 \cup A_2| = \mathbf{1}$.

$n=3$ kasuan $A_1=\{123,132\}$, $A_2=\{123,321\}$, $A_3=\{123,213\}$. Hirurek bina permutazio dute, eta binaka hartuta permutazio bat partekatzen dute ($A_1 \cap A_2=\{123\}$, $A_1 \cap A_3=\{123\}$, $A_2 \cap A_3=\{123\}$), berbera dena $A_1 \cap A_2 \cap A_3=\{123\}$. Beraz:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| -|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1 = 4$, eta $T(3,0) = 3! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \mathbf{2}$.

$n=4$-ren kasuan 7. taulari erreparatuta A_1-ek 6 permutazio ditu, A_2-k, A_3-k eta A_4-k bezainbeste.

7. taula. $n=4$ kasurako kointzidentziak

A_1	A_2	A_3	A_4
1234	1234	1234	1234
1243	1243	2134	1324
1324	3214	4132	2134
1342	3241	1432	2314
1423	4213	4231	3124

1432 4231 2431 3214

Kartak binaka hartuta *6* bikote dago, *2* permutazio partekatzen dituztenak: $A_1 \cap A_2 = \{1234, 1243\}$, $A_1 \cap A_3 = \{1234, 1432\}$, $A_1 \cap A_4 = \{1234, 1324\}$, $A_2 \cap A_3 = \{1234, 4231\}$, $A_2 \cap A_4 = \{1234, 3214\}$, $A_3 \cap A_4 = \{1234, 2134\}$. Hirunaka hartuta *4* hirukote dago, permutazio bakar bat partekatzen dutenak ($A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_4 = A_1 \cap A_3 \cap A_4 = A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{1234\}$), ezinbestean berbera dena ($A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{1234\}$). Beraz:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = & \ (|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|) \\
& -(|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_1 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3|+|A_2 \cap A_4|+|A_3 \cap A_4|) \\
& +(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& -(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) = \\
= & \ C(4,1) \cdot (4-1)! - C(4,2) \cdot (4-2)! + C(4,3) \cdot (4-3)! - C(4,4) \cdot (4-4)! \\
= & \ 4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 15, \text{ eta } T(4,0) = 4! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 9.
\end{aligned}
$$

Arrazoibide hau orokortu egin daiteke edozein *n*-rako *barneratze-kanporatze erregela* delakoa erabiliz [8] (honen egia indukzio matematikoz froga daiteke): permutazioak lehenik ugari barneratzen dira (+), gero kanporatzen (-), gero barneratzen (+) eta abar.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} \cdot C(n,i) \cdot (n-i)! = n! \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} / i! = - n! \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} / i!$$

eta $T(n,0) = n! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = n! \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} / i! \right)$

Beraz:

$$T(n,0) = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} / i! \quad (1)$$

Probabilitateen terminoetan, B-k irabazteko duen probabilitatea ($p_{n,0} = T(n,0) / n!$) hauxe da:

$$p_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} / i! \quad (1')$$

Probabilitate honen limitea, *n* handitzean, $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i / i!$ da, *1/e* alegia. 2.1 ataleko (0) formularen egia lortu da, beraz, arrazoiketaren bitartez. Soluziobide analitiko hau Montmort-en testuan azaltzen dena da [2], gutxi gorabehera, garai hartan ez baitzen esplizituki ezagutzen *e* zenbakia, ezta *barneratze-kanporatze erregela* ere.

2.2 atalean lortutako formulen egiak arrazoiketa konbinatorioen bitartez lor daitezke ere.

(2) formula ($T(n,n) = 1$) gauza jakina da, modu bakarra baitago permutazio baten zenbaki guztiak bere lekuan kokatzeko, baita (3) formula ere ($T(n,n\text{-}1) = 0$), ezinezkoa baita zenbaki guztiak bat ezik bere lekuan kokatzea.

(4) formula ($T(n,1) = n \cdot T(n\text{-}1,0)$) burutzeko arrazoibidea hauxe da: zenbaki bakar bat bere lekuan zenbatetan kokatzen den kalkulatzeko, nahikoa da kalkulatzea gainontzekoak zenbatetan ez diren bere lekuan kokatzen zenbatzea; *n* zenbaki desberdin direnez, *n* aldiz handiagoa da kopuru hori.

(6) formulak ($T(n,k) = T(n\text{-}k,0) \cdot C(n,k)$) (4) formularen antzeko arrazoibidea du (gogoratu (4) formula (6)-ren kasu berezi bat dela). Formula ikusita, eta hitzen bitartez esanda, problemaren deskonposizioa honetan datza: *n* kartetako *k* karta beren lekuetan finkatu (*C(n,k)* modu daude), eta gainontzeko *(n-k)* kartak ez kokatu beren lekuetan (*T(n-k,0)* modu).

(7) formularen ($T(n,0) = (n\text{-}1) \cdot [T(n\text{-}1,0) + T(n\text{-}2,0)]$) arrazoibidea bestelakoa da. Euler-ek [9] azaldu zuen: $n=1$ ($T(1,0) = 0$), $n=2$ ($T(2,0) = 1$), $n=3$ ($T(3,0) = 2$), $n=4$ eta $n=5$ kasu errazenak konbinatorioki aztertu ondoren, formula errekurtsiboa enuntziatu zuen edozein *n*-rako. Laburbilduz, hauxe da arrazoibidea:

Demagun karta bat, *j* ($1 \leq j \leq n$) ez dagoela bere lekuan, j*'* lekuan baizik ($1 \leq j' \leq n$, $j' \neq j$). Bi kasu daude: *j' j*-ren lekuan egotea, ala beste lekuren batean.

1. *j' j*-ren lekuan baldin badago, orduan *T(n-2,0)* modu dago denak beren lekutik kanpo egoteko. *j'* edozein izan daitekeenez ($1 \leq j' \leq n$, $j' \neq j$), guztira $(n\text{-}1) \cdot T(n\text{-}2,0)$ modu.

2. *j' j*-rena ez den beste lekuren batean badago *T(n-1,0)* modu dago. Guztira, $(n\text{-}1) \cdot T(n\text{-}1,0)$ modu.

Beraz: $T(n,0) = (n\text{-}1) \cdot T(n\text{-}2,0) + (n\text{-}1) \cdot T(n\text{-}1,0)$ edo $T(n,0) = (n\text{-}1) \cdot [T(n\text{-}2,0) + T(n\text{-}1,0)]$.

(5) formula ($T(n,0)$ - $T(n,1)$ = $(-1)^n$), 2. taulan behatutako lehenengo bi zutabeen aldea, behatutako (4) eta (7) formulen ondorioa da:

$$\begin{aligned} T(n,0) - T(n,1) &= T(n,0) - n \cdot T(n-1,0) = (n-1) \cdot [T(n-1,0) + T(n-2,0)] - n \cdot T(n-1,0) = \\ &= -1 \cdot T(n-1,0) + (n-1) \cdot T(n-2,0) = -1 \cdot [T(n-1,0) - (n-1) \cdot T(n-2,0)] = \\ &= -1 \cdot [(n-2) \cdot [T(n-2,0) + T(n-3,0)] - (n-1) \cdot T(n-2,0)] = \\ &= -1 \cdot [-T(n-2,0) + (n-2) \cdot T(n-3,0)] = \\ &= (-1)^2 \cdot [\, T(n-2,0) - (n-2) \cdot T(n-3,0)] = \\ &= \ldots = (-1)^{n-1} \cdot [T(n-(n-1),0) - (n-(n-1)) \cdot T(n-n,0)] = \\ &= (-1)^{n-1} \cdot [T(1,0) - T(0,0)] = \\ &= (-1)^n \;. \end{aligned}$$

Hurrengo lerroetan erakutsiko dut zein erlazio dagoen (1) formula esplizituaren eta (7) formula errekurtsiboaren artean.

Arestian lortutako (1) formula (6) formularen kasu berezia den (4) formularen, eta (4) eta (7) formulen ondorioa den (5) formularen ondorioa da:

$$\begin{aligned} T(n,0) &= (-1)^n + T(n,1) = (-1)^n + n \cdot T(n-1,0) = (-1)^n + n \cdot [(-1)^{n-1} + (n-1) \cdot T(n-2,0)] = \\ &= (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot n + n \cdot (n-1) \cdot T(n-2,0) = (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot n + n \cdot (n-1) \cdot [(-1)^{n-2} + T(n-2,1)\,] = \\ &= (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot n + n \cdot (n-1) \cdot [(-1)^{n-2} + (n-2) \cdot T(n-2,0)\,] = \\ &= (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot n + (-1)^{n-2} \cdot n \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot T(n-2,0) = \\ &= (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot n + (-1)^{n-2} \cdot n \cdot (n-1) + (-1)^{n-3} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot T(n-3,0) = \\ &= \cdots = (-1)^n + (-1)^{n-1} \cdot n + (-1)^{n-2} \cdot n \cdot (n-1) + (-1)^{n-3} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot (n-(n-3)) \cdot T(2,0) = n! \cdot \sum_{i=2}^{n} (-1)^i / i! = \\ &= n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i / i! \end{aligned}$$

(kontuan hartuta $T(2,0) = 1$, eta $(-1)^1/1! + (-1)^0/0! = 0$ direla).

Bestalde, (1) formula honetatik abiatuta (7) formularen egia erator daiteke:

$$T(n-1,0) + T(n-2,0) = (n-1)! \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i / i! + (n-2)! \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i / i! =$$

$$= [(n-1)!+(n-2)!] \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i / i! \; + (n-1)! \cdot (-1)^{(n-1)}/(n-1)! =$$

$$= n \cdot (n-2)! \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i / i! \; + (-1)^{(n-1)} .$$

$$(n-1) \cdot [T(n-1,0) + T(n-2,0)] = n! \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i / i! \; + (n-1) \cdot (-1)^{(n-1)} =$$

$$= n! \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i / i! \; + n \cdot (-1)^{(n-1)} + (-1)^n =$$

$$= n! \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i / i! \; + n! \cdot (-1)^{(n-1)}/(n-1)! + n! \cdot (-1)^n/n! =$$

$$= n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i / i!$$

$$= T(n,0) .$$

Probabilitateen terminotan ($p_{n,k} = T(n,k)/n!$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$) lortutako formulak beste hauetan bihurtzen dira:

1. $p_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i / i!$, $n \geq 0$ (1')

   Ohartzekoa da $p_{0,0} = 1$ dela, eta $p_{1,0} = (-1)^0/0! + (-1)^1/1! = 0$.

   $p_{n,0}$-ren limitea, n infiniturantz doan heinean, $1/e$ da (2.1 atalean simulazioak iradoki bezala). n-ren handitzeak, urrats bakoitzean, batugai bat eransten dio aurreko kalkuluari, + ala - zeinua duena, batugaiaren bakoiti-bikoiti mailaren arabera; hortik 2. irudia.

2. $p_{n,n} = 1/n!$, $n \geq 0$ (2')

   $p_{n,n}$-ren limitea, n infiniturantz doan heinean, 0 da.

3. $p_{n,n-1} = 0$, $n \geq 1$ (3')

4. $p_{n,1} = p_{n-1,0}$, $n \geq 1$ (4')

   $p_{n,1}$-ren limitea, n infiniturantz doan heinean, $1/e$ da ere.

5. $p_{n,1} = p_{n,0} - (-1)^n/n!$, $n \geq 1$ (5')

6. $p_{n,k} = (1/k!) \cdot p_{n-k,0}$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$ (6')

Ohartzekoa da $p_{n,n-1} = 0$ dela, eta $p_{n,n} = 1/n!$.

Horrenbestez, $p_{n,k}$-ren formula esplizitua hauxe da:

$$p_{n,k} = (1/k!) \cdot \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i / i! \quad , n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n \quad (9')$$

Limitean, n infiniturantz doanean $p_{n,n-1}$ (p_{n-1} deituko diot) 0 da, eta $p_n = 0$ ere. Gainontzeko zutabeetan ere ($0 \leq k \leq (n-2)$) konbergentzia gertatzen da ere (ikusi 5. taula). $(n-k)$ infiniturantz doan heinean, $p_k = e^{-1}/k!$ da; hau da, $\lambda=1$ parametroa duen Poisson-en probabilitate-banaketa (ikusi 8. taula) osatzen da [10], eta beraz kointzidentzia 1-ekoa da jokoaren itxaropen matematikoa:

8. taula. $\lambda=1$ parametroa duen Poisson-en probabilitate-banaketa

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
p_k	0.3678794	0.3678794	0.1839397	0.06131324	0.01532831	0.003065662	0.0005109437	0.00007299195	...

5. taulako $n=10$-i dagokion lerroa bezalakoa da.
(9’) formularen limiteak argitzen du simulazioaren 2.1 atalean esandakoa: 'Egiazta daiteke $n=10$-ren ordez beste edozein n handiago bat erabiliz gero, antzeko maiztasunak lortzen direla.'

7. $p_{n,0} = (1-1/n) \cdot p_{n-1,0} + (1/n) \cdot p_{n-2,0}$, $n \geq 2$, $p_{0,0} = 1$, $p_{1,0} = 0$ (7’)

Azken formula honen adierazpide bat honako hau da: $p_{n,0}$ segidaren aurreko bi probabilitateen batezbesteko aritmetiko haztatua da. Ondorioz, n handitzean $p_{n-2,0}$-k hazta edo pisu gero eta gutxiago du, eta honenbestez $p_{n,0}$ eta $p_{n-1,0}$ gero eta berdintsuagoak dira. Konbergentzia oso azkarra dela esan daiteke, $n \geq 7$ denean lehenengo lau hamartarrak berdinak direlako. Bestela esanda, karta kopuruak, $n \geq 7$ denean, ez dio praktikoki axolarik B-ren eta A-ren irabazteko probabilitateen kalkuluan.

3. IRUZKINAK ETA ONDORIOAK

Jokoaren mamia bi jokalari eta *n* kartetan gauzatzen da. Jokoaren deskribapenetik problema matematikoa enuntziatzera igaro zen Montmort bera.

Idazlan honetan azaldutako hiru soluziobidetik bik konputagailuaren beharra izan dute (2.1 eta 2.2 atalak). Emaitzak ulertzearren maila bateko ezagutza matematikoa eduki behar izan da; izan ere, ezagutu zein den *e* zenbakia, zein e^x-ren garapena, eta zein koefiziente binomialak.

Gainerakoan, bi soluziobide horiek erabat esperimentalak izan dira, eta emaitzak indukzioz lortu dira (indukzio matematikoa ez da indukzio esperimentala, beste gai bat baizik, desberdina, dedukziorako metodo bat dena). Lortutako emaitzak (enpirikoak, nolabait esateko) ez daude matematikoki frogatuta, baina simulazioaren emaitzak bi jokalariek duten irabazteko probabilitateak iradokitzen ditu, eta 2. taularen behaketek formula sakon pare bat ematen dute, (6) ($T(n,k) = T(n-k,0)\cdot C(n,k)$) eta (7) ($T(n,0) = (n-1)\cdot[T(n-1,0) + T(n-2,0)]$). Horixe da esperimentazioaren indarra.

2.1 atalean kointzidentzien jokoari erantzun bat eman zaio, simulazio-prozesu baten bitartez eta probabilitate-kalkulua ezagutu gabe. (0) formula burutu da, eta 2.3 atalean bere egia deduzitu da (B-ren irabazteko probabilitatea *1/e* da limitean) arrazoiketa konbinatorioaren bitartez.

2.2 atalean taula bat eraiki da eta bera behatuz zenbait formula enuntziatu dira. 2.3 atalean beren (6) eta (7) formulen egiak deduzitu dira arrazoiketa konbinatorioen bitartez.

2.3 atalean erakusten da formula guztien egia arrazoiketa konbinatorioen bitartez, jakina, arrazoitzen duena nahiko argia eta gai bada hala aritzeko.

Izan ere, (2) eta (3) formulak arrazoitzeko ez da argitasun handirik behar izan, ia berehalakoak baitira sena erabiliz.

Argiagoa behar da izan (4) formula ($T(n,1) = n\cdot T(n-1,0)$) arrazoitzeko. Arrazoibide horretan (6) formulak ($T(n,k) = T(n-k,0)\cdot C(n,k)$) errekurtsibitatea eta konbinatoriako ezagutza maila bat eskatzen du (zenbaki konbinatorioak).

(7) formula ($T(n,0) = (n-1)\cdot[T(n-1,0) + T(n-2,0)],\ n\geq 2,\ T(0,0) = 1,\ T(1,0) = 0$) arrazoitzeko are zoliagoa izan behar da, arrazoibideak bi adar baititu.

Matematiketan esperimentalki jokatzea ohikoa da, baina testu akademiko gehienetan ez da inoiz alderdi hau erakusten (asmatze prozesua ezkutatua izan ohi da). Halako testuetan, Euklides-en bideari jarraiki, lortutako erlazioen egia dedukzioz frogatu behar da, erakutsi gabe nola bururatu den erlazioa. Matematiketan bi alderdiak dira beharrezkoak, induktiboa eta deduktiboa.

Begien aurrean (7) formula edukita, 2.2 atalean behaketaren bitartez azaldu den bezala, adierazpen konbinatorio bat ematea ez da oso zaila (nahikoa da formula hausnartzearekin), baina besterik da formulara iristea hasieratik arrazoibide konbinatorio bat erabiliz.

Ondorioz, konputagailuaren bitarteko esperimentazioa lagungarri izan da jokoaren ebazpena emateko.

2.3 atalean formulen egia deduzituz gain, eta beren arteko erlazioak azaldu dira, eta horren inguruan badago zer gehiago esaterik:

- Oinarritzat (1) $T(n,0)$-ren formula esplizitua hartuta (edo paraleloki (1'), $p_{n,0}$-rena), bere egia matematikoa testu akademikoetan erabiltzen den arrazoibidez, 2.3 atalean formulatu dena, (7) formula deduzitu egiten da, baina ez (6) $T(n,k)$-rena (edo (6') $p_{n,k}$-rena).

- Oinarritzat (6) eta (7) formula errekurtsiboak hartuta (beren egia matematikoak 2.3 atalean arrazoibidez formulatu egin direnak), (1) formula esplizitua deduzitzen da, edo zehazkiago esanda, haien ondorioak diren (4) eta (5) formulak uztartuz.

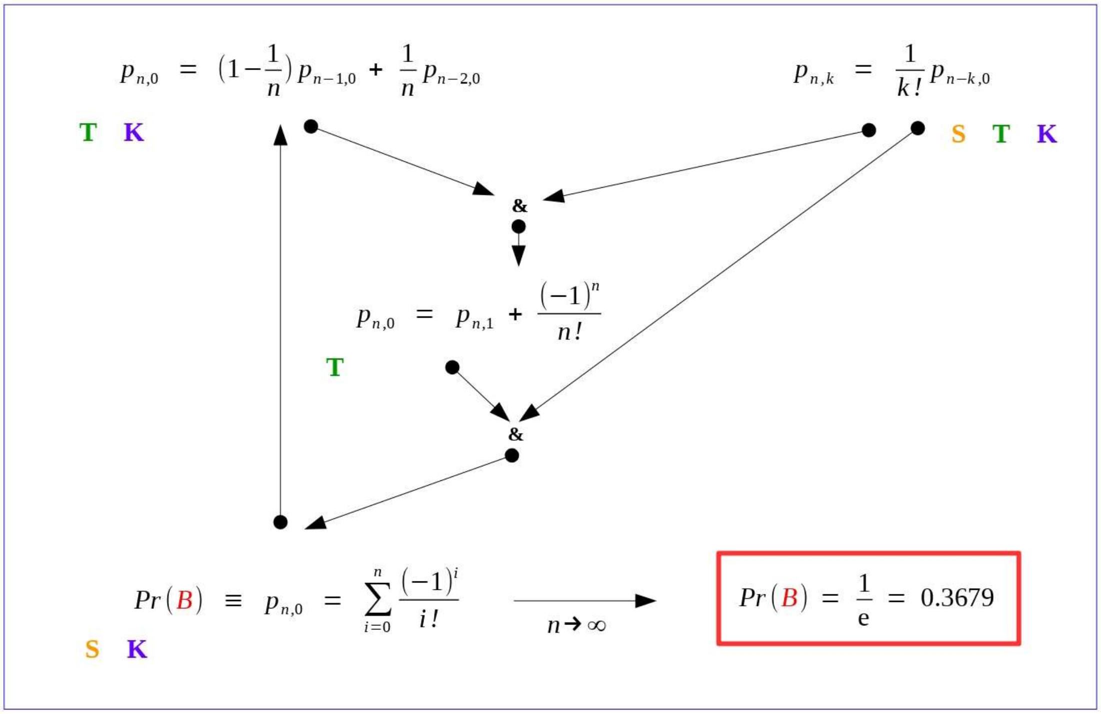
3\. irudian azaltzen ditut formula hauek lortzeko bideak eta beren arteko erlazio logikoak.

EKAIA (2024), artikulua prentsan/article in press.
https://doi.org/10.1387/ekaia.25706
Behin-behineko bertsioa (euskara-orrazketaren faltan).

Hiru soluziobide : S ≡ Simulazioaz

T ≡ Kointzidentzien Taula behatuz

K ≡ Arrazoiketa Konbinatorioaren bidez



3. irudia. Formula nagusiak eta beren arteko erlazio logikoak.

Nondik hasi 'behar' da jokoaren ebazpena? Edo, nola azaldu 'behar' da jokoaren ebazpena? Idazlan honetan hautua bide esperimentala izan da (2.1 eta 2.2 atalak), baina 2.3-k ere badu bere garrantzia, noski.

4. BIBLIOGRAFIA

[1] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Montmort/ , 2015.

[2] MONTMORT, P. R. De . 1708. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris, Frantzia. 1713. 2e éd. rev. et augm. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110519q orr. 130-143.

[3] **R** Core Team 2024. ***R****: A language and environment for statistical computing.* ***R*** *Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. https://www.R-project.org/

[4] SLOANE N. J. A. (editor) 2024. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)* (founded in 1964). Kointzidentziak, ‘rencontres’ edo ‘derangements’: https://oeis.org/A008290, https://oeis.org/A000166 .

[5] Graham R. L., Knuth D. E. And Patashnik O. 1990, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, p. 194. https://seriouscomputerist.atariverse.com/media/pdf/book/Concrete%20Mathematics.pdf

[6] Koefiziente binomialak: https://oeis.org/A007318 , 2024.

[7] Comtet L. 1974, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, pp.180-182. https://ia801306.us.archive.org/27/items/Comtet_Louis_-_Advanced_Coatorics/Comtet_Louis_-_Advanced_Combinatorics.pdf

[8] https://cp-algorithms.com/combinatorics/inclusion-exclusion.html , 2023.

[9] EULER L. 1779. <<Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum>>, *Memoires de l’Acad. T.III*. http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E738.pdf

[10] https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/poisson-distribution , 2010.

ERANSKINA

```
##############################################################################
##############
#
# PERMUTAZIOEN SIMULAZIOA ETA KOINTZIDENTZIA KOPURUAREN ZENBAKETA
#
N.saio <- 50000 # N.saio, simulazio kopurua
#
n <- 10 # n, karta kopurua
#
kointzidentziak.banaketa <- NULL # simulazioaren emaitzen hasiera
#
for(N in 1:N.saio){
  set.seed(N) # saio bakoitzean sasizorizko zenbakia kontrolatzeko
  permu <- sample(1:n, replace=FALSE) # sasizorizko permutazioa
  #
  kointzidentziak <- 0 # permutazio baten kointzidentzia kopuruaren hasiera
  for(i in 1:n) if(i == permu[i]) kointzidentziak <- kointzidentziak + 1 # kointzidentzia kopurua
  #
  # saioz saio kointzidentzia kopuruak gorde
  kointzidentziak.banaketa <- c(kointzidentziak.banaketa, kointzidentziak)
}
table(kointzidentziak.banaketa) # N.saio-etan gertatutako maiztasunen taula
maiztasun.erlatiboak <- table(kointzidentziak.banaketa)/N.saio
maiz <- NULL # taula bektore batean bihurtzearen hasiera
for(k in 1:length(maiztasun.erlatiboak)) maiz <- c(maiz, maiztasun.erlatiboak[[k]])
maiz
#
# Irudikapen grafikoa
#
markak <-
  barplot(table(kointzidentziak.banaketa)/N.saio,
          main = paste("Simulazioa (", N.saio,"saio)"), sub = "n = 10",
          xlab =  "k, kointzidentzia kopurua", ylab = "Maiztasun erlatiboa", las = 1,
          col = c("red", rep("blue",n)), border = "transparent",
          legend.text=c("B","A"))
text(x = as.vector(markak), y = maiz, labels = round(maiz, digit = 4),
     pos = 1, col = "white", font = 2, cex = 0.75)
#
# e zenbakiaren alderantzizkoa
#
1/exp(1) # [1] 0.3678794
#
##############################################################################
##############

##############################################################################
##############
#
# PERMUTAZIO GUZTIEN SORRERA ETA KOINTZIDENTZIA KOPURUAREN ZENBAKETA
#
install.packages("combinat")
library(combinat) # permutazioak sortzeko liburutegi informatikoa
#
# Generating permutations of the numbers 1,...,n
#
n <- 7 # n, karta kopurua
#
p <- permn(n) # 1,2,3,...,n-ren permutazio guztiak sortu eta memorian gordetzeko
#
kointzidentziak.banaketa <- NULL  # Emaitzen hasiera
#
# n handia denean, p oso handia da.
# Kalkuluak zatika egiteko prozesua
#
for(k in 0:(n-1)){
 for(N in (1+k*length(p)/n):((k+1)*length(p)/n)){
# for(N in 1:length(p)){
    permu <- p[[N]] # permutazio bat finkatu
  #  print(permu)
  #
   kointzidentziak <- 0 # permutazioaren kointzidentzia kopuruaren hasiera
   for(i in 1:n) if(i == permu[i]) kointzidentziak <- kointzidentziak + 1 # kointzidentzia kopurua
  #
  # permutazioz permutazio kointzidentzia kopuruak gorde
   kointzidentziak.banaketa <- c(kointzidentziak.banaketa, kointzidentziak)
}}
#
( maiztasun.absolutuak <- table(kointzidentziak.banaketa) )
( maiztasun.erlatiboak <- table(kointzidentziak.banaketa)/length(p) ) # probabilitateak
#
##############################################################################
##############
```