

# Korrugazioa iragartzeko eredu eraginkor baten garapena eta haren aplikazioa metro-linea erreal batean

Development of an efficient model for corrugation prediction and its application to a real metro line

Rakel Robles\*<sup>1</sup>, Nekane Correa<sup>1</sup>, Ernesto García Vadillo<sup>1</sup>,  
Javier Santamaría<sup>1</sup>, Javier Astarloa<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ingeniaritza Mekanikoa Saila, Bilboko Ingeniaritza Eskola,  
Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

<sup>2</sup> Euskal Trenbide Sarea-Red Ferroviaria Vasca (ETS-RFV)

**LABURPENA:** Artikulu honetan denboraren/espazioaren eremuan eredu bat garatzen da, konputazionalki oso eraginkorra, trenbidearen eta ardatz muntatuaren dinamika bertikala eta laterala konbinatzen dituena, trenbidearen eta ibilgailuaren parametroen arabera higadura ondulatorioa aurreikusteko. Eredu hau maiztasunaren eremuko eredu batetik abiatuz eta denboraren eremura eraldatuz lortzen da, zatiki arrazional polinomikoen metodoaren bidez. Metodo honen bidez, errezeptantzia bati lotutako transferentzia-funtzio baten doikuntza lortzen da. Algoritmo genetiko multiobjektiboak erabiliz, trenbidearen eta ardatz muntatuaren dinamika bertikal eta laterala deskribatzen duten errezeptantzien doikuntzen errorea minimizatzen da, sistemaren egonkortasuna ziurtatzeaz gain. Eredu honetan, kontaktu tangenziala FASTSIM algoritmoaren bidez lortzen da. Azkenik, garatutako eredu metro-linea batean egindako korrugazio eta errezeptantzien neurketa esperimentalen bidez balioztatzen da. Balioztatze honetarako hautatutako kontrol-puntua, neurketa esperimentalak egin diren 5 urteetan, korrugazioaren hazkunde handienetarikoa izan duenetako bat da. Ereduaren bidez lortutako higadurek antzekotasun handia erakusten dute emaitza esperimentalekin.

**HITZ GAKOAK:** korrugazioa, errezeptantzia, gurpil-errail kontaktua, higadura.

**ABSTRACT:** This paper develops a computationally efficient time/space domain model that combines vertical and lateral dynamics of the track and the wheelset to predict rail corrugation as a function of track and vehicle parameters. The model is obtained by transforming a frequency domain model to the time domain using the Rational Fraction Polynomials method. With this method, the fit of a transfer function associated with a receptance is obtained. Using multi-objective genetic algorithms, the error in the fitting of the receptances describing the vertical and lateral dynamics of both the track and the mounted axle is minimised, in addition to ensuring the stability of the system. In this model, the tangential stresses are obtained using the FASTSIM algorithm. The model is validated by means of experimental measurements of receptances and corrugation carried out on a metro line. The control point selected for this validation is one of those that has experienced the greatest corrugation growth over the 5 years of the study. The wear results obtained using the model show a great similarity with the experimental results.

**KEYWORDS:** corrugation, receptance, wheel-rail contact, wear.

\* **Harremanetan jartzeko / Corresponding author:** Rakel Robles. Ingeniaritza Mekanikoa Saila, Bilboko Ingeniaritza Eskola, Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), Plaza Ingeniero Torres Quevedo 1, 48013, Bilbo. – raket.robles@ehu.eus

**Nola aipatu / How to cite:** Robles, Rakel; Correa, Nekane; García Vadillo, Ernesto; Santamaría, Javier; Astarloa, Javier (2024). «Korrugazioa iragartzeko eredu eraginkor baten garapena eta haren aplikazioa metro-linea erreal batean». *Ekaia*, 46, 2024, 341-353. (https://doi.org/10.1387/ekaia.25887).

Jasotze-data: 2024, urtarrilak 9; Onartze-data: 2024, martxoak 6.

ISSN 0214-9001 - eISSN 2444-3255 / © UPV/EHU Press



Lan hau Creative Commons Aitortu-EzKomertziala-PartekatuBerdin 4.0 Nazioartekoa lizentzia baten mende dago

## 1. SARRERA

Korregazioa uhin itxura duen irregulartasun mota bat da, errailaren errodadura-gainazalean luzetarako norabidean agertzen dena. Korregazioak mundu osoko trenbide-sektoreari eragiten dio, zarata eta bibrazio arazoak sortuz, bai eta trenbidearen eta trenen mantentze-lanetarako gastuak handituz. Korregazioa ezabatzeko aukera bakarra, behin agertu denean, harriztatze bat egitea da [1]. Prozesu horren gastuak oso handiak direnez, denboran zehar korregazioaren hazkuntza murrizteko edo galarazteko hainbat aukera aztertu dira, hala nola trenbidearen parametroen optimizazio dinamikoa [2], marruskadura-aldagailuen erabilera [3] edo trenen abiaduraren fluktuazioa [4].

Ereduek aukera ematen dute trenbide-linea jakin batean gertatuko den higadura aurreikusteko, eta, beraz, oso erabilgarriak dira mantentze-lanak planifikatzeko, bai eta korregazioa murrizteko edo ezabatzeko beharrezko neurriak hartzeko ere. Higadura mota hau aztertzeko garatu diren ereduak maiztasunaren eremuko eta denboraren eremuko eredueta sailkatzen dira.

Maiztasunaren eremuko ereduak aukera ematen dute konputazio-denbora murriztua duten eredu lineal oso zehatzak lortzeko. Horrez gain, korregazioa hasiko den bao barneko posizioa iragartzea ahalbidetzen dute. Aitzitik, ez dute akats baten ondoren korregazioaren garapena lortzen uzten, eta ez dute baotik igarotzean dagoen kitzikapen parametrikoa kontuan hartzen. Hainbat autorek garatu dituzte maiztasunaren eremuko ereduak, hala nola Hempelmann-ek [5], Muller-ek [6] eta Gomez-ek [7].

Denboraren eremuan garatutako ereduak, [8,9] artikuluetan deskribatutakoek bezala, problema ez-linealak ebazteko gaitasuna dute. Denboraren eremuan hainbat eredu daude kostu konputazionalaren eta zehaztasunaren arteko erlazio ona lortzen dutenak. Horien artean, Wu eta Thompson-en [10,11] eta Corraeren [12,13] ereduak nabarmentzen dira. Kasu hauetan, ereduak denboraren eremuan garatzen dira, maiztasunaren eremuko eredu zehatz bat abiapuntutzat hartuta, gurpilaren eta errailaren arteko interakzio dinamikoa aztertzeko. Artikulu hauetan, maiztasunaren eremutik denboraren eremurako eraldaketa transferentzia-funtzioen bidez egiten da, bao baten errezeptantzia bertikalak doituz. Metodo honek konputazionalki oso eraginkorrak diren ereduak lortzeko aukera ematen du.

Aipatutako ereduak dinamika bertikalean oinarritzen dira. Artikulu honetan aurkezten den eredu berriak dinamika lateralak gaineratzen du, denbora konputazional laburraren abantailari eutsiz. Dinamika lateralak kontuan hartzeak korregazioaren azterketa hobetzen du, batez ere

bihurgune itxietan, frogatu baita, trenen zirkulazio-baldintzen arabera, dinamika lateralak funtsezko garrantzia duela korrukazioaren garapean [14].

Aurkezten den artikuluak 4 atal ditu. Lehenengo atalean, korrukazioaren arazoa eta hura aztertzeke garatutako eredu batzuk deskribatzen dira. Era berean, artikulu honetan garatzen den ereduaren aurkezpen laburra egin da. Hurrengo atalean (2. atala), garatutako ereduak deskribatzen da. Atal hau hiru azpiataletan banatzen da: trenbidearen dinamika, ardatz muntatuaren dinamika eta gurpil-errail interakzioa, eta, azkenik, higadura kalkulatzeko metodoa. Amaitzeko, aurkeztutako ereduak metro linea batean hartutako neurketa esperimentalekin balioztatzen da (3. atala) eta egindako lanaren ondorioak komentatzen dira (4. atala).

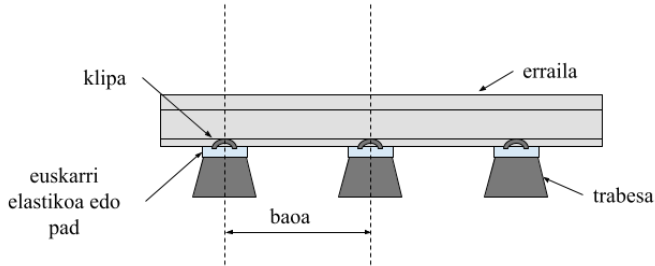
## 2. GARATUTAKO EREDUAREN DESKRIBAPENA

Atal honetan egileek garatutako ereduak deskribatzen da. Eredu hau korrukazioaren hazkuntza iragartzeko tresna eraginkorra da, linea espezifiko batean eta zirkulazio-baldintza zehatzetarako.

Zatiki arrazional polinomikoen —edo Rational Fraction Polynomials (RFP)— metodoari esker, denboraren eremuko eredu bat lor daiteke, maiztasunaren eremuko sistema baten portaera dinamikoaren arabera. Kasu honetan, metodo honen bidez, trenbide baten errezeptantzia batekin erlazioatutako transferentzia-funtzioaren doikuntza lortzen da (1. ekuazioa). Errezeptantziak indar-unitateko desplazamendua adierazten du, maiztasun desberdinetako kitzikapenentarako. Errezeptantzia hori FEM bidez lor daiteke, esperimentalki edo beste tresna matematiko batzuen bidez. Ekuazio honetan,  $a_i$  eta  $b_i$  errezeptantzia bakoitzerako doikuntzatik lortzen diren transferentzia-funtzioaren koefizienteak dira, eta  $n$  eta  $m$  transferentzia-funtzioaren zenbakitzailearen eta izendatzailearen polinomioen ordenak. Oro har, polinomioen ordena handiagoa da dinamika lateralean dinamika bertikalean baino, norabide horretan trenbideak malgutasun handiagoa duelako.

$$R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^n + b_2 s^{n-1} + \dots + b_n s + b_{n+1}}{s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_{m-1} s + a_m} \quad (1)$$

Lan honetan, euskarri diskretua duen trenbide bat aztertzen da (ikus 1. irudia); beraz, trenbidearen dinamika, eta, hortaz, errezeptantziak, periodikoki aldatzen dira, periodoa trabesen arteko distantzia izanik. Horrela, transferentzia-funtzioaren koefizienteek balio desberdinak lortuko dituzte baoaren posizio bakoitzean.



**1. irudia.** Euskarri diskretua duen trenbidea.

## 2.1. Trenbidearen dinamika

RFP metodoaren bidez trenbidearen doikuntza bertikal eta lateralak lortu ondoren, baoaren posizio bakoitzerako Laplace-ren transformatua erabiltzen da  $m$  ordeneko ekuazio bat lortzeko. Ekuazio hori, aldi berean, 1 ordeneko  $m$  ekuaziotara transformatzen da (2. eta 3. ekuazioak). Ekuazio horietan,  $f_z$  eta  $f_y$  gurpilaren eta errailaren arteko kontaktu indarrak dira eta  $z_i$  eta  $y_i$  errailak kontaktu-aztarnaren erdiko puntuan duen desplazamenduak dira norabide bertikal eta lateralean, hurrenez hurren.  $\mathbf{M}$  eta  $\mathbf{c}$  matrizeak 4. eta 5. ekuazioen bidez kalkulatu dira; haietan, bai transferentzia-funtzioen polinomioen ordenak ( $n$  eta  $m$ ), bai koefizienteak ( $a_i$  eta  $b_i$ ) desberdinak dira doitutako errezeptantzia bakoitzerako.

$$\dot{z}(t) = M * z(t) + c * f_z(t), \quad \text{non} \quad z(t) = \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_m(t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = M * y(t) + c * f_y(t), \quad \text{non} \quad y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_m(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$M = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_m & -a_{(m-1)} & -a_{(m-2)} & \dots & -a_1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$c = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 - a_1 * b_1 \\ \dots \\ b_m - \sum_{k=1}^{m-1} a_{(m-k)} * c_k \end{Bmatrix} \quad (5)$$

## 2.2. Ardatz muntatuaren dinamika eta gurpil-errail arteko interakzioa

Lan batzuetan, ardatz muntatuaren dinamika bertikala ( $z$  ardatza) deskribatzeko, masa kontzentratu bat erabiltzen da, ardatz-muntatuaren masa-ren erdiarekin bat datorrena, zeinari gurpil batek eusten duen ibilgailuaren pisua aplikatzen zaion. Kasu honetan, ardatz muntatuaren dinamika bertikala lortzeko, esperimentalki neurtutako gurpilaren errezeptantzia bertikala doitu behar da, deskribatutako metodoa erabiliz.

Gurpilaren eta errailaren arteko kontaktu-indar bertikala 6. ekuazioan erakusten den bezala kalkulatzen da. Ekuazio honetan,  $C_H$  konstante her-tziarra da,  $z_w$  gurpilaren desplazamendu bertikala,  $z_r$  errailaren desplaza-mendu bertikala eta  $r$  errailaren luzetarako profilararen irregulartasuna. Ar-datz bertikala positibotzat hartuko da errailaren gainazalean hondoratzea badago, eta negatibotzat, irtegunea bada.

$$f_z(t) = \begin{cases} C_H * (z_w(t) - z_r(t) - r(t))^{\frac{3}{2}} & , \text{non } (z_w(t) - z_r(t) - r(t)) > 0 \\ 0 & , \text{non } (z_w(t) - z_r(t) - r(t)) \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Ardatz muntatuaren dinamika laterala ere ( $y$  ardatza) esperimentalki neurtutako errezeptantzia doitzuz lortzen da, eta hura ekuazio-sisteman txer-tatzen da. Dinamika lateralaren ekuazioak 7. ekuazioarekin osatzen dira. Ekuazio horretan, pseudo-irristadura lateralaren ( $\gamma_y$ ) fluktuazioa hartzen da kontuan duen balio nominalarekin alderatuta ( $\gamma_{y0}$ ). Ekuazio honetan,  $\dot{y}_w$

aldagaiak gurpilaren alboko abiadura adierazten du,  $\dot{y}_1$  errailaren alboko abiadura da eta  $V$  ibilgailuak zirkulatzen duen abiadura.

$$\gamma_y = \gamma_{y0} + \frac{\dot{y}_w(t) - \dot{y}_1(t)}{V} \quad (7)$$

### 2.3. Higaduraren kalkulua

Higadura marruskadura-potentiarekiko proportzionaltzat hartzen da, [15-17] artikuluetan bezala, eta 8. ekuazioaren bidez kalkulatu da. Ekuazio horretan,  $z$  errailaren luzetarako profila adierazten duen funtzioa da, norabide bertikalean,  $k_0$  higaduraren konstantea,  $q$  kontaktu-aztarnaren puntu bakoitzean agertzen den tentsio tangentiala,  $s$  irristadura abiaduraren modulua,  $\rho$  altzairuaren dentsitatea eta  $V$  ibilgailuaren abiadura.  $\Delta x$  aldagaiak gurpilaren eta errailaren arteko kontaktuan tentsio tangentialak kalkulatzeko erabili den luzetarako ardatzean ( $x$  ardatza) kontaktu-aztarnaren diskretizazioaren tamaina adierazten du.

$$\Delta z = \frac{k_0 q s \Delta x}{\rho V} \quad (8)$$

Hainbat metodo daude gurpil eta errail arteko kontaktuan tentsio tangentialak kalkulatzeko [18,19]. Artikulu honetan FASTSIM algoritmoa erabiltzen da.

## 3. GARATUTAKO EREDUAREN BALIOZTATZEA

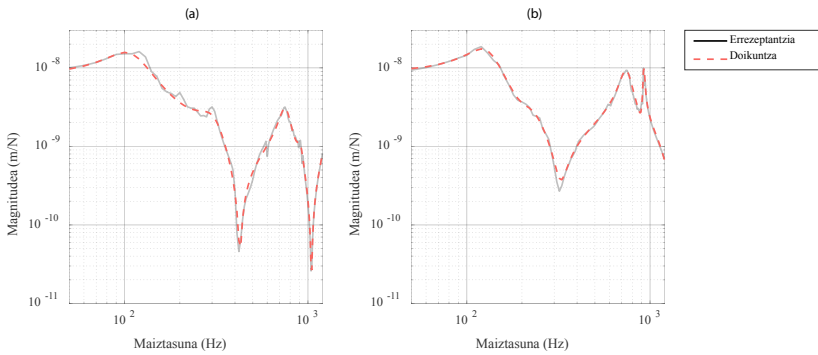
Atal honetan, Bilbo inguruko metro-linea batean oinarrituz garatutako eredu balioztatzen da, 5 urtean zehar egindako korrugazio-neurri esperimentalekin. Azaldu den moduan, eredu honek trenbidearen eta ardatz muntatuaren dinamika bertikal eta laterala konbinatzen ditu.

Neurketa esperimentalak plaka metrikoko trenbide batean egin dira; euskarri diskretua du trenbide horrek, eta trabesen arteko distantziak 0,6 eta 1 m artekoak ditu, kurba zirkularren erradioaren arabera. Linea honetan erradiorik txikiena 150 metrokoa da, eta errailak 54E1 dira, SKL-1 euskarriekin. Errailaren gogortasuna aldakorra da linean, eta bi balio hartzen ditu, eremu beretik zihoan aurreko linea bateko errail zati bat berrera-biltzen baita. Horrela, trenbide berrerabiliaren eremuan, gogortasun-maila R260 da, eta, eremu berrian, gogortutako erraila erabiltzen da, R350HT gogortasun-mailarekin. Lineatik ibiltzen diren ibilgailuek 3 edo 4 kotxe dituzte eta 7,5 minutuan behin pasatzen dira.

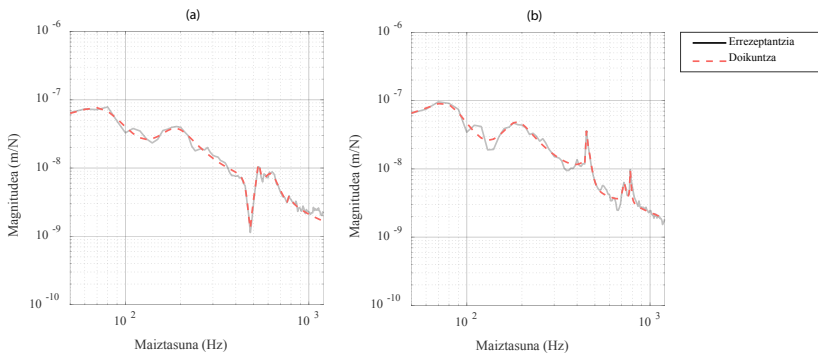


Esperimentalki neurtutako errezeptantzietatik abiatuta, doitu egiten dira RFP metodoaren bitartez. Euskarri diskretua duen trenbide bat denez, non bao guztiak eta trabesen arteko distantziak berdintzat hartzen diren, transferentzia-funtzioaren koefizienteak periodikoki aldatzen dira, periodoa trabesen arteko distantziaren berdina izanik. Doitutako bi sekzioen arteko sekzioen transferentzia-funtzioen koefizienteak bi transferentzia-funtzio doitu horien koefizienteen interpolazio linealaren bidez lortzen direla jotzen da. Kontrol-puntu honetarako, trenbidearen errezeptantzia bertikal eta lateralaren transferentzia-funtzioaren polinomioen ordenak 9 eta 10, eta 11 eta 12 dira, hurrenez hurren.

Trenbidearen errezeptantzia bertikal eta lateralaren doikuntzak 4. irudian eta 5. irudian agertzen dira. Doikuntzak baoaren barruko bost posizioetarako egin dira, baina espazio-arrazoiengatik trabesaren gainean eta bao erdian lortutako doikuntzak baino ez dira aurkezten.



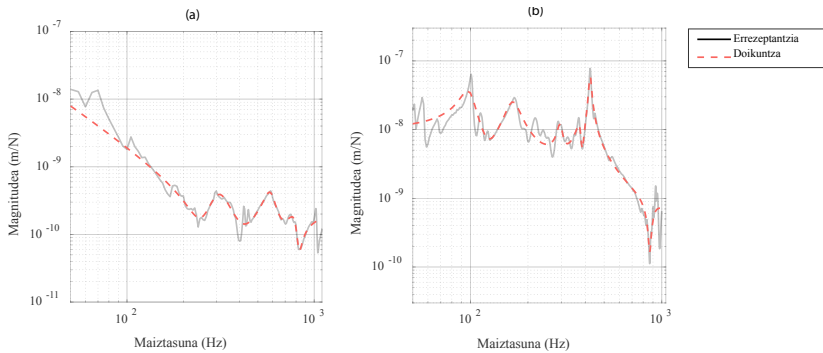
**4. irudia.** Trenbidearen errezeptantzia bertikalen doikuntzak: (a) trabes gainean (b) bao erdian.



**5. irudia.** Trenbidearen errezeptantzia lateralaren doikuntzak: (a) trabes gainean (b) bao erdian.

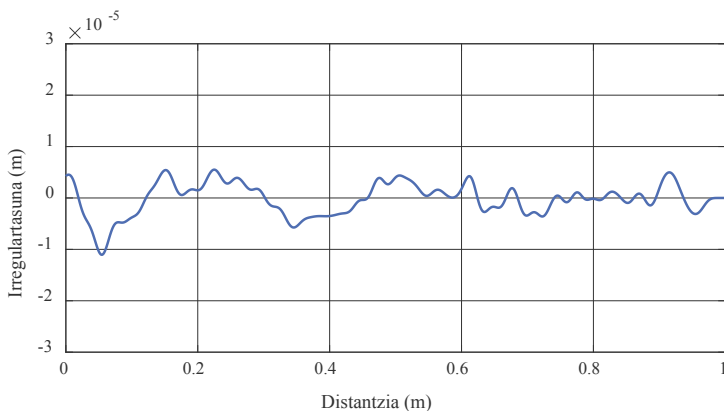


Esperimentalki neurtutako ardatz muntatuaren errezeptantziak trenbidearen errezeptantziak bezala doitu dira; kasu honetan,  $n$  eta  $m$ -ren balioak 9 eta 10 dira ardatz bertikalean, eta 11 eta 12 alborako norabidean. 6. irudian gurpilaren errezeptantziak eta dagozkien doiketak ageri dira norabide bertikalean eta lateralean.



**6. irudia.** Ardatz muntatuaren errezeptantzien doikuntzak: (a) bertikala eta (b) laterala.

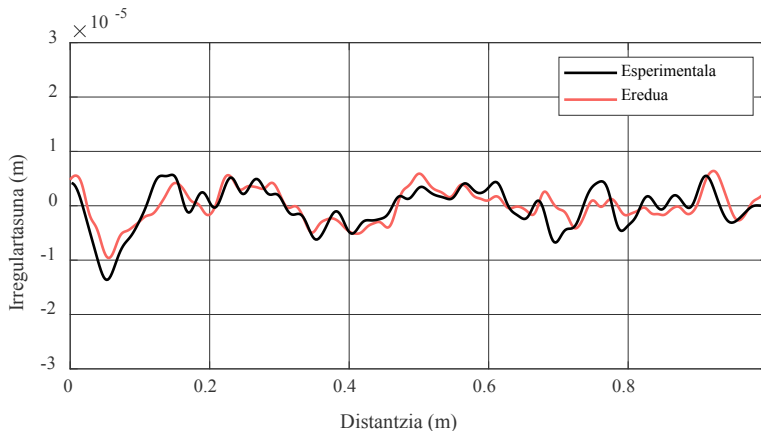
Neurketa esperimentaletatik eskuratutako korruazioaren hazkuntza-ereduarekin lortutako emaitzekin alderatzeko, higadura kalkulatu da 7. irudian erakutsitako irregulartasunetik abiatuta. Irudi honetan aurkezten den irregulartasunak harriztatze-prozesu baten ostean esperimentalki neurtutako irregulartasuna erakusten du. Kontrol-puntu horretako zirkulazio-abiadura aldakorra denez, 53,6 km/h-ko batez besteko balioarekin eta 2,8 km/h-ko desbideratze tipiko batekin, banaketa horri jarraitzen dioten ausazko abiadurak erabili dira.



**7. irudia.** Esperimentalki neurtutako irregulartasuna.

Higadura-koefizientea datu bibliografikoetatik lortu da [20-22] eta haren balioa  $3e-11$  kg/Nm-koa da R350HT gogortasun maila duten errailetarako, zeinetan High Positive Friction (HPF) motako marruskadura-aldagailua erabiltzen den. Lan honetan,  $C_H$ -ren balioa  $93,03$  GN/m<sup>3/2</sup> dela kalkulatu da.

8. irudian, esperimentalki 2 hilabete eta gero garatzen den higadura alderatu egiten da ereduaren bidez lortzen denarekin. Antzekotasun nabarmena ikusten da, bai anplitudetan, bai uhin-luzeretan. Beraz, garatutako ereduak modu egoki batean aurreikusten du trenbidean sortuko den higadura.



**8. irudia.** Esperimentalki eta ereduaren bitartez lortutako higadura.

#### 4. ONDORIOAK

Artikulu honetan, eredu bat deskribatzen da trenbidearen eta ardatz muntatuaren dinamika bertikal eta lateralak konbinatzen dituen higadura iragartzeko, Correak [12] artikuluan garatutako eredu bertikaletik abiatuta. Deskribatutako ereduak euskarri diskretua duten errezeptantzien doikuntzan oinarritzen da, maiztasunaren eremuan oso zehatza den eredu bat denboraren eremura eraldatuz. Eraldaketa hori zatiki arrazional polinomikoen metodoaren bidez egiten da. Metodo horren bidez, errezeptantzien doikuntza oso onak lortzen dira, eta sistemaren egonkortasuna denboran bermatzen da, algoritmo genetiko multiobjektiboen bidezko optimizazioari esker. Sistemaren ekuazioek barne hartzen dituzte trenbidearen eta ardatz muntatuaren dinamika bertikal eta laterala, gurpilaren eta errailaren arteko interakzioa eta higadura-eredu bat.

Artikulu honetan aurkezten den eredu oso zehatza izateaz gain, errezeptantzien doikuntzari esker, oso eraginkorra da konputazionalki

ere. Deskribatutako metodoaren bidez, denbora laburrean lor daitezke baiko posizio guztietarako errezeptantzien doikuntzak eta ardatz muntatuen iraganaldi kopuru jakin baten ondoren errailaren errodadura-azaleran sortutako higadura. Ardatz muntatuen iraganaldi bakoitzaren ondorengo higadura kalkulatzeko 15 metroko errailean, 2 minutu inguru behar dira 3,8 GHz-ko PC batean, nukleo bakar batean eta 64 GB-ko RAM batekin.

Eredua balioztatzeko, metroko linea batean esperimentalki neurtutako emaitzekin alderatu dira garatutako ereduarekin ardatz muntatuak 2 hilabete igaro ondoren lortutako higadura-emaitzak. Emaitzek ereduaren eta neurri esperimentalen arteko antzekotasun handia erakusten dute.

Artikulu honetan garatutako eredu korrukazioa iragartzeko erabiltzen da. Hura oso baliagarria da linearen mantentze-lanak planifikatu ahal izateko, baita trenbidearen edo zirkulazio-parametroen aldaketek korrukazioan duen eragina aztertzeko ere, korrukazioaren garapena murriztea edo ezabatzea helburu dela.

## **ESKER ONAK**

Artikulu hau UPV/EHUK finantzatuta eta Eusko Jaurlaritzako Hezkuntza Sailari esker argitaratu da. Eskerrak eman behar zaizkie, halaber, SHIF2RAIL Joint Technology Initiative-ri, HORIZON2020 programa europarraren barnean IN2TRACK3 (Ref: 101012456) proiektua finantzatzegatik; Zientzia eta Berrikuntza Ministerioari (MCI), Estatuko Ikerketa Agentziari (AEI) eta Eskualde Garapeneko Europako Funtsa-ri (FEDER-ERDF) erakunde finantzatzaile gisa, PID2019-109483RB-I00 kontratuaren bidez; Eusko Jaurlaritzari, IT1764-22 eta KK-2023/00029 atalen bidez emandako finantza-laguntzagatik eta doktoretza aurreko laguntzagatik (PRE\_2021\_2\_0047). Azkenik, Euskal Trenbide Sarea-ri (ETS-RFV) ere eskerrak eman nahi dizkiogu, eskainitako laguntzagatik.

## **5. BIBLIOGRAFIA**

- [1] KALOUSEK J., SROBA P. eta HEGELUND C. 1989. «Analysis of Rail Grinding Tests and Implications for Corrective and Preventative Grinding». *4th International Heavy Haul Railway Conference*, 193-204.
- [2] OYARZABAL O., GOMEZ J., SANTAMARIA J. eta VADILLO E.G. 2009. «Dynamic optimization of track components to minimize rail corrugation». *Journal of Sound and Vibration*, **319**, 904-917.
- [3] EGANA J.I., VINOLAS J. eta GIL-NEGRETE N. 2005. «Effect of liquid high positive friction (HPF) modifier on wheel-rail contact and rail corrugation». *Tribology International*, **38**, 769-774.

- [4] BELLETTE P.A., MEEHAN P.A. eta DANIEL W.J.T. 2008. «Effects of variable pass speed on wear-type corrugation growth». *Journal of Sound and Vibration*, **314**, 616-634.
- [5] HEMPELMANN K., KNOTHE K. 1996. «An extended linear model for the prediction of short pitch corrugation». *Wear*, **191**, 161-169.
- [6] MÜLLER S. 1999. «A linear wheel-track model to predict instability and short pitch corrugation». *Journal of Sound and Vibration*, **227**, 899-913.
- [7] GOMEZ I. eta VADILLO E.G. 2003. «A linear model to explain short pitch corrugation on rails». *Wear*, **255**, 1127-1142.
- [8] MAGLIO M., PIERINGER A., NIELSEN J.C.O. eta VERNERSSON T. 2021. «Wheel-rail impact loads and axle bending stress simulated for generic distributions and shapes of discrete wheel tread damage». *Journal of Sound and Vibration*, **502**, 116085.
- [9] ZHANG S., CHEN G., SHENG X. eta THOMPSON D.J. 2020. «Dynamic wheel-rail interaction at high speed based on time-domain moving Green's functions». *Journal of Sound and Vibration*, **488**, 115632.
- [10] WU T.X. eta THOMPSON D.J. 2000. «Theoretical Investigation of Wheel Rail Non-Linear Interaction due to Roughness Excitation». *Vehicle System Dynamics*, **34**, 261-282.
- [11] WU T.X. eta THOMPSON D.J. 2004. «On the parametric excitation of wheel/track system». *Journal of Sound and Vibration*, **278**, 725-747.
- [12] CORREA N., VADILLO E.G., SANTAMARIA J. eta GOMEZ J. 2012. «A rational fraction polynomials model to study vertical dynamic wheel-rail interaction». *Journal of Sound and Vibration*, **331**, 1844-1858.
- [13] Correa N., Vadillo E.G., Santamaria J. eta Herreros J. 2016. «A versatile method in the space domain to study short-wave rail undulatory wear caused by rail surface defects». *Wear*, **352-353**, 196-208.
- [14] ISHIDA M., MOTO T. eta TAKIKAWA M. 2002. «The effect of lateral creepage force on rail corrugation on low rail at sharp curves». *Wear*, **253**, 172-177.
- [15] SHENG X., THOMPSON D.J., JONES C.J.C., XIE G., IWNICKI S.D., ALLEN P. eta HSU S.S. 2006. «Simulations of roughness initiation and growth on railway rails». *Journal of Sound and Vibration*, **293**, 819-829.
- [16] XIE G. eta IWNICKI S.D. 2008. «Simulation of wear on a rough rail using a time-domain wheel-track interaction model». *Wear*, **265**, 1572-1583.
- [17] WU T.X. 2008. «Parametric excitation of wheel/track system and its effects on rail corrugation». *Wear*, **265**, 1176-1182.
- [18] KALKER J.J. 1982. «A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact». *Vehicle System Dynamics*, **11**, 1-13.
- [19] VOLLEBREGT E.A.H. eta WILDERS P. 2010. «FASTSIM2: a second-order accurate frictional rolling contact algorithm». *Computational Mechanics*, **47**, 105-116.
- [20] RODRÍGUEZ B. 2021. *Nuevos desarrollos para la predicción de grietas en carriles ferroviarios por fatiga de contacto por rodadura*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, Navarra.

- [21] MESARITIS M., SANTA J.F., MOLINA L.F., PALACIO M., TORO A. eta LEWIS R. 2023. «Post-field grinding evaluation of different rail grades in full-scale wheel/rail laboratory tests». *Tribology International*, **177**, 107980.
- [22] VUONG T.T., MEEHAN P.A., EADIE D.T., OLDCROW K., ELVIDGE D., BELLETTE P.A. eta DANIEL W.J. 2011. «Investigation of a transitional wear model for wear and wear-type rail corrugation prediction». *Wear*, **271**, 287-298.

