

Dirac-en ekuazioa eta mekanika kuantiko erlatibista

(The Dirac equation and the relativistic quantum mechanics)

Naiara Arrizabalaga Uriarte*

Matematika Saila, Zientzia eta Teknologia Fakultatea, Leioako Campusa (UPV/EHU)

LABURPENA: Deribatu partzialetako ekuazioen artean, badago bat elektroien mugimendua aztertzen duena ikuspuntu erlatibista batetik. Ekuazio hori Diracen ekuazioa bazala ezagutzen da. Ekuazio hau 1928. urtean Paul Dirac fisikariak asmatu zuen eta historian zehar ekuazio garrantzitsua izan da mekanika kuantiko erlatibistaren sorrera ekarri zuelako. Hala ere, gaur egun pil pilean dagoen ekuazio bat da. Besteak beste grafenoaren azterketan erabiltzen da. Oinarrizko ikerketaren ikuspuntutik eta baita ikuspuntu teknologiko batetik ezinbesteko material bihurtu da grafenoa bere propietate elektronikoak direla eta. Horrez gain, quarken konfinamentua hadroien barruan deskribatzeko ere balio du. Lan honetan Diracen ekuazioaren definizioa, nondik datorren eta bere propietate batzuk aztertuko ditugu.

HITZ GAKOAK: Dirac-en ekuazioa, mekanika kuantikoa, eragileen teoria, matematika.

ABSTRACT: *The Dirac equation is a partial differential equation that describes the movement of an electron from a relativistic perspective. Created by the physicist Paul Dirac in 1928, this equation has historically been significant as it introduced relativistic quantum mechanics. However, it is still relevant today. For example, it is used to analyse graphene, a material that has become important thanks to its electronic properties, both from a theoretical and a technological perspective. Furthermore, the Dirac equation can describe the confinement of quarks in hadrons. In this work, we will define the Dirac equation, analyse its creation, and study some of its main properties.*

KEYWORDS: The Dirac equation, quantum mechanics, operator theory, mathematics.

***Harremanetan jartzeko/Corresponding author:** Naiara Arrizabalaga Uriarte, UPV/EHU, Matematika Saila, Zientzia eta Teknologia Fakultatea, Barrio Sarriena s/n, Leioa 48940.

 <https://orcid.org/0000-0002-2805-4380>, naiara.arrizabalaga@ehu.eus

Nola aipatu/How to cite: Arrizabalaga Uriarte, Naiara (2025). «Dirac-en ekuazioa eta mekanika kuantiko erlatibista», Ekaia, DOI: <https://doi.org/10.1387/ekaia.27715>

Jasoa: uztailak 18, 2025; Onartua: abenduak 18, 2025
ISSN 0214-9001-eISSN 2444-3225 / ©2025 UPV/EHU



Obra Creative Commons Atribución 4.0 Internacional-en lizentziazpean dago

1. Sarrera

Diracen ekuazioa azken hamarkadetan bereziki ezagun bihurtu den ekuzio bat da. Ez soilik zientzialarien artean baizik eta kultura herrikoiean ere. Zientzialari batzuek munduko ekuaziorik politena bezala bateiatu dute. Eta beste batzuek maitasunaren ekuazioa dela aldarrikatzen dute. Pertsona askok beraien maitasuna adierazteko ekuazio hau tatuatzera heldu arte. Ez dira gutxi sarean aurkitu daitezkeen Diracen tatuajeen irudiak. Baina, ba al dakite guztiek zer tatuatu duten?

Asko entzun eta idatzi da azken urteotan nola Diracen ekuazioa maitasun apurtezinaren sinboloa den, irakurri adibidez [3]. Eta askotan ekuazioa honako azalpenarekin lotuta joaten da: Noizbait eta denbora batez elkar-eragina izan duten bi sistema denboran edo distantzian banantzen badira, banandutako bi sistema bezala deskribatu ahal izango dira. Hala ere modu sotil baten sistema bakarrean bihurtu dira. Batak bestean eragiten jarraitzen du nahiz eta distantzia eta denbora luze batek banatu. Hau da, noizbait loturik egon diren bi partikula nolabait erlazionatuta egoten jarraitzen dute naiz eta unibertsoko kontrako puntuetan aurkitu. Hori da korapilatze kuantikoa edo konexio kuantikoaren interpretazioetako bat.

Errez uler daiteke nola erlazionatu duen kultura herrikoia konexio kuantikoaren ideia maitasunarekin. Baina hori ez da Diracen ekuazioak adierazten duena. Lan honetan ekuazioaren definizioa, esanahia eta berezitasunak aztertuko ditugu ikuspuntu matematiko batetik.

Diracen ekuazioa ekuazio dotore bat izateaz gain bi zientzia adierazpen bakarrean batzen ditu: mekanika kuantikoa eta erlatibitatea. Ekuazioaren autoreak, Paul Diracek, bi gai hauek bateratu zituen 1928. urtean argitaratutako lan batzuetan, momentu hartara arte pentsaezina zen zerbait izanik.

Alde batetik, mekanika kuantikoa dugu. Teoria honek proposatzen duena da aztertzen ari garen sistema baten informazio guztia uhin-funtzioa, $\psi(x, t)$, izeneko objektu baten enkriptatuta dagoela. Uhin-funtzio honek sistema bat nolabait aurkitzeko probabilitatea du bere barne. Uhin-funtzio honek denboran eboluzionatzen du Schrödinger-en ekuazioa jarraituz. Sinplifikatzeko, bat dimentsioko Schrödingerren ekuazioa idatziko dugu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V\psi(x, t),$$

non x aldagai espaziala den, t denbora aldagaia, m masa, i unitate konplexua, $\hbar$ Planck-en konstantea eta V energia potentziala izanik.

Bestetik, Einstein-en erlatibitate berezia dugu. Honek argiaren abiadurara mugitzen diren sistemen funtzionamendua azaltzen du. Teoria honetako ekuaziorik garrantzitsu eta ezagunena honako hau izanik:

$$E = mc^2,$$

non E sistemaren energia, m masa eta c argiaren abiadura diren. Ekuazioa honek masa eta energiaren arteko erlazioa azaltzen du hutsean zehar.

Diracek Schrödingerren ekuazioa eta energia eta masaren arteko ekuazioa adierazpen bakarrean fusionatu zituen, mekanika kuantiko erlatibista bezala ezagutzen dena sortuz. Mekanika kuantiko erlatibistak oso arin (argiaren abiaduratik hurbil dauden abiaduretan) mugitzen diren partikulak deskribatzen ditu. Ekuazio horren bitartez Paul Diracek espin -1/2 bat duten eta argiaren abiaduratik hurbil mugitzen diren partikulen dinamika ezinhobe deskribatu zituen. Hala nola, elektroi baten dinamika. Geroago, protoi eta neutroien dinamika ere deskribatu zituen. Beraz, Diracen ekuazioak ez du konexio kuantikoa deskribatzen. Hasieran aipatu bezala, konexio kuantikoa edo korapilatze kuantikoa bi partikula subatomiko edo gehiago modu intrinsekoan lotuta dauden fenomenoak da haien arteko distantzia edozein izanda ere. Hau da, partikula baten egoerak besteengan eragiten du beraien arteko distantzia handia izan arren. Konexio kuantikoa mekanika kuantikoko fenomeno orokor bat da eta Diracen ekuazioak partikulen dinamika deskribatzen du, beraz, kontzeptu desberdinak dira. Are gehiago, Diracen ekuazioak partikula askeen dinamika deskribatzeko

ere balio du. Hau da, beste partikula batekin inoiz elkareraginik izan ez duen partikula batena. Eta konexio kuantikoa existitzeko, gutxienez, bi partikula egon behar dira. Edozein kasutan, oso ekuazio ederra da, adierazpen erraz eta xume batek esanahi handia duelako eta partikulen fisikan eragin itzela izan duelako historian zehar.

Nahiz eta Diracen ekuazioa fisikatik datorren objektu bat den, artikulua honetan ikuspuntu matematiko batetik soilik jorratuko da.

2. Oinarrizko definizioak eta notazioa

Deribatu Partzialetako Ekuazio bat aldagai bat baino gehiago dituen funtzio ezezagun bat eta bere deribatuak erlazionatzen dituen ekuazio bat da. Funtzioak aldagai bat baino gehiago duenez funtzio horren deribatuak deribatu partzialak izango dira, hau da, aldagai konkretu batekiko deribatuak. Sarritan aldagai aske horiek denbora eta espazioa izango dira. Mota honetako ekuazioen aplikazioa benetan zabala da. Zientzia eta Teknologiako fenomenoak aztertze erabiltzen dira normalean. Ingeniaritza, fisika, kimika, ekonomia zein biologia arloetan, besteak beste. Gehien bat eboluzio ereduak aztertzen dira, zeinetan denboran zehar kantitate edo aldagai zehatz baten dinamika deskribatzen den. Aldagai horrek satelite espazial baten kokapena, partikula baten posizioa, zein populazioaren hazkundera bezalako fenomeno desberdinak adieraz ditzake. Hala ere, askotan egoera egonkorak edo orekan dauden egoerak deskribatzeko ere erabiltzen dira.

Definizioa 1. *Deribatu partzialetako ekuazio bat $u(x)$ funtzioa ezezagun bezala duen eta*

$$F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) = 0$$

erlazioa betetzen duen ekuazio bat da, F ezeguna eta $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ izanik. $D^m u$ -k $m \in \mathbb{N}$ ordeneko u -ren deribatu partzial guztiak adierazten ditu.

Definizioa 2. *Deribatu partzialetako ekuazio edo sistema baten ordena bertan agertzen diren u -ren deribatuen ordenik handiena da.*

Adibidea 1. *Honako ekuazio hau,*

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio bat da, funtzio ezezaguna $u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$ eta $t > 0$ izanik. Ekuazio hau dimentsio bateko beroaren ekuazioa bezala ezagutzen da. Eta t aldiunean, x posizioan dagoen tenperatura adierazten du.

Ikuspuntu klasiko batekin begiratzuz gero, deribatu partzialetako ekuazioak ekuazio hiperboliko, paraboliko eta eliptikoetan sailkatzen dira. Sailkapen horretako ekuazio nagusiak Uhinen ekuazioa, Beroaren ekuazioa eta Laplaceren ekuazioa dira, hurrenez hurren. Baina badaude beste asko ez direnak sailkapen horretan sartzen, Schrödinger, Dirac, Klein-Gordon edo Korteweg-de Vries-en ekuazioak, besteak beste. Hauek ekuazio dispersibo bezala ikus daitezke, hau da, frekuentzia desberdinak abiadura talde desberdinetan hedatzen dira. Beste modu batera esanda soluzioak sakabanatzera jotzen du denboran zehar.

Lan honetan deribatu partzialetako ekuazio konkretu baten zentratuko gara, Diracen ekuazioan, hain zuzen. Ekuazio hau lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio matrizial bat da. $\mathbb{R}^3$ espazioan ari garenean Diracen ekuazioak $-\frac{1}{2}$ -eko espina duten partikulen eboluzioa deskriba dezake ikuspuntu erlatibista batetik, adibidez, elektroio edo positroioak bezalako partikulak. Partikula hori beste partikula batzuen edo beste indar batzuen menpe egon daitekeelarik. Bestalde, $\mathbb{R}^3$ -ko Ω eremu bornatu batean ari garenean, Diracen ekuazioak quarken konfinamendua hadroiaren deskriba dezake. Eta bi dimentsioetan lan egiten dugunean, grafenoaren azterketarako ere balio du. Hau da, aukeratzen dugun espazio, eremu edo baldintzen arabera, Diracen ekuazioak aipatutako kasu bat edo beste deskribatuko du. Grafenoaren adibidea, bi dimentsioko ekuazioari dagokiona,

gaur egun pil pilean dagoen gai bat da material horren propietate bereziak direla eta. Grafenoaren estruktura bi dimentsioko ezti-orraze itxurakoa da. Gai hau ere interesgarria izan arren, gu hiru dimentsiotako ekuazioan zentratuko gara, hau da, elektroien eboluzioa deskribatzen duen ereduan. Eta honako hau da hiru dimentsiotako Diracen ekuazio askea, hau da, kanpoko indarren eraginik gabekoa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta m c^2) \psi(t, x),$$

non ∇ $\mathbb{R}^3$ -ko gradiente bektorea den, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_k, k = 1, 2, 3$, eta β balio konplexuak dituzten 4×4 -ko matrizeak, i unitate konplexua eta $\hbar, c, m$ konstante fisikoak diren.

Aurrera jarraitu orduko, artikulua honetarako beharrezkoak izango diren kontzeptu batzuen definizioa emango dugu:

Definizioa 3. Izan bitez $f(x)$ funtzioa $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ izanik eta $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ eremu bektoriala. Orduan, f -ren gradiente $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ da. F eremu bektorialaren divergentsia,

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

izango da eta f funtzioaren laplacearra

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Bestalde, aztertuko ditugun ekuazioak eta beraien soluzioak zein eremutan dauden definituta finkatzea ezinbestekoa da. Horretarako Hilberten espazioa zer den definitu behar dugu.

Definizioa 4. Izan bedi V espazio bektorial lineal bat. V gaineko $\langle \cdot, \cdot \rangle$ biderketa eskalarra $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ aplikazio bat da non edozein $x, y, z \in V$, $a \in \mathbb{C}$ balioetarako honako hau betetzen den:

- $\langle ax + y, z \rangle = a \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (lineala lehen sarreran),
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (simetrikoko konplexua),
- $\langle x, x \rangle \geq 0$, eta $\langle x, x \rangle = 0$ baldin eta soilik baldin $x = 0$ (positiboki definitua).

Biderketa eskalarra duen edozein espazio bektorial lineal, V , aurrehilbert dela esaten da.

Definizioa 5. Izan bedi $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ aurrehilbert espazioa. Orduan, edozein $v \in V$ balioetarako defini dezagun

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Orduan, $\|\cdot\|$ V gaineko norma bat da.

Definizioa 6. Izan bedi $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ aurrehilbert espazioa. Orduan, V Hilberten espazioa dela esango dugu V espazio osoa baldin bada. Hau da, V -ren Cauchyren segida guztiak konbergenteak badira biderketa eskalarrak sortutako norman.

Adibidea 2. Izan bedi honako espazio hau:

$$L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) := \left\{ \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Orduan, $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ espazioa Hilberten espazioa da. Espazio horretako ψ eta ϕ funtzioen arteko biderkadura eskalarra honela definitzen delarik

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \overline{\phi(x)} dx,$$

eta norma $\|\psi\|_{L^2} = (\langle \psi, \psi \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$

Mekanika kuantikoan espazio ohikoenetako bat $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ Hilberten espazioa da. Eta espazio honen orokorpen bat izango da Diracen ekuazioaren espazio naturala.

3. Mekanika kuantiko erlatibista

XX. mendearen hasieran *Fisika klasikoa* paradigma nagusi bezala inposatzen zen arren, esperimentu batzuek eredu horien limitazioak nabarmendu zituzten. Alde batetik, Einsteinek, 1905. urtean argitaratutako efektu fotoelektrikoari buruzko lanean, argi izpiak argiaren partikulez osaturik daudela esan zuen. Gaur egun argi partikula horiek fotoi bezala ezagutzen dira. Aldi berean, de Broglie-k materiaren uhin eredu bat proposatu zuen. Uhin-partikula dualitate honek eraman zuen fisika berri bat sortzera: *fisika kuantikoa* deiturikoa. Ideia hau naturako fenomenoaren interpretazio probabilistikoa oinarritzen da.

Fisika kuantikoaren lehen postulatuak dio sistema kuantiko bateko t aldiuneko egoera ψ uhin-funtzio baten bidez deskribatzen dela. Uhin funtzio hau Hilberten espazio bateko funtzio baten bidez adierazten da (askotan $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$), non $t \in \mathbb{R}$ guztietarako

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t, x)|^2 dx = 1$$

den. Kontextu honetan $|\psi(t, x)|^2$ kantitatea honela interpretatzen da: t aldiunean partikula x posizioan egoteko probabilitate dentsitatea bezala. Eta egoera kuantiko horien denborarekiko eboluzioa Schrödingerren ekuazioaren bidez deskribatzen dela postulatzen dute.

Mekanika kuantikoa mekanika klasikoak aztertu ezin zituen problemak azaltzeko sortua izan zen. Atomoak eta partikula subatomikoen propietate fisikoak deskribatzeko besteak beste. Schrödingerren ekuazioaren soluzioaren (uhin funtzioaren, $\psi(t, x)$) interpretazioetako bat honako hau da: partikulak t aldiunean posizio konkretu baten egoteko probabilitatearekin erlazionatuta dagoen balio bat ematen du eta balio hauek konplexuak izan daitezke.

Mekanika klasikoak eskala mikroskopikoko problemak deskribatzeko arazoak zituen modu berean mekanika kuantikoak eta, konkretuki, Schrödingerren ekuazioak arazoak izan zituen arin mugitzen ziren partikulekin. Honen harira galdera praktiko bat sortu zen: nola deskriba ditzakegu argiaren abiaduratik hurbil mugitzen diren partikulen propietate fisikoak? Ikertzaileek erlatibitatearekin bat zetorren mekanika kuantikoaren teoria bat sortzen saiatu ziran. Baina behin eta berriz arazo teknikoekin aurkitzen ziren. Konkretuki beraien saiakeretan probabilitate negatiboak aurkitzen zituzten, eta hau ezinezkoa da, probabilitatearen ohiko definizioagatik balioak $[0, 1]$ tartean egon behar baitira. Beraz, zeintzuk dira elektroiak modu egoki baten deskribatzen dituzten uhin funtzioak? Nolako izan behar da uhin-funtzio horien dinamikak deskribatzen dituen ekuazioa?

Honelako galderei eman zien erantzuna Paul Dirac fisikariak 1928. urtean argitaratu zituen bi artikuluetan [1, 2]. Erlatibitatearen eskakizunak kontuan hartu ahal izateko Diracek honako proposamen harrigarri hau egin zuen: uhin-funtzioa ez da funtzio (balio) bakar bat izan behar, baizik eta 4 balio dituen bektore bat.

Ikus dezagun, modu sinplifikatu batean, nola heldu zen ideia horretara. Arestian aipatutako Schrödingerren ekuazioa Newtonen legeen berrinterpretazio bat bezala ikus daiteke, non balio asko uhin-funtzioan eragiten lortzen diren. Normalean, uhin-funtzioari deribatu eragilea aplikatzen. Gogora dezagun Schrödingerren ekuazioa dimentsio batean energia potentzialik gabe, hau da, kanpoko indarren eraginik gabe:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t).$$

Bere garaian Schrödingerrek eta beste fisikari batzuek oinarri bezala hartu zuten ekuazioa guztiok ezagutzen dugun honako ekuazio hau da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

non E energia zinetikoa den, m masa eta v abiadura. Hau da, energia zinetikoa masa eta abiaduraren bitartez nola kalkulatu daitekeen esaten duen ekuazioa. Bestalde, momentu lineala, p , masa

bider abiadura eginez kalkula daiteke, hau da,

$$p = mv.$$

Beraz, energia zinetikoa momentu lineala eta masaren bitartez honela adieraz daiteke:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{p}{m} \right)^2 = \frac{1}{2m}p^2. \quad (1)$$

Korrespondentziaren printzipioak energia zinetikoa eta momentua denborarekiko eta espazioarekiko deribatuekin erlazionatzen ditu:

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t},$$

$$p \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x}.$$

Beraz, lenguai kuantiko berrian Schrödingerren ekuazioak erlazionatzen digu uhin-funtzioaren denborarekiko deribatu bat, energia zinetikoa errepresentatzen duena, uhin-funtzioaren espazioarekiko bigarren deribatuarekin, hau da, momentua karratura errepresentatzen duena,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t).$$

Ekuazio honek fenomeno fisiko ugari deskribatzen ditu, horien artean partikulekin erlazionatutakoak. Ekuazio horrek partikula baten dinamika deskribatzeko balio du hutsean, hau da, kanpoko indarren eraginik gabe. Aldiz, partikula desberdinen arteko interakzioa ere deskriba dezake V energia potentzial bat gehitzen baldin badugu,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V\psi(x, t).$$

Ekuazioari gehitutako potentzialak elektrikoak, magnetikoak edo bestelakoak izan daitezke. Eta potentzialadun ekuazioak aztertzea da gaur egun interesgarriena. Hala ere ekuazio hau ez dator bat Einsteinen erlatibitate bereziaren oinarritzko ideiarekin, non denbora eta espazioa modu parekagarri batean sartu behar diren ekuazioan. Hau da, aldagai biak egon behar dira deribatu bakarrarekin edo biak bi deribaturekin. Eta ez, bat deribatu batekin eta bestea birekin, Schrödingerren ekuazioan agertzen den bezala.

Beraz, bi teoria horiek bat egiteko arazo batekin topo egin dugu. Einstein bera izan zen arazo horri aurre egiteko lehen oinarria jarri zuena. Konturatu zen ordurarte erabilitako ekuazio famatua, (1), osatu gabea zegoela. Eta honako ekuazio berria proposatu zuen energia erlatibista deskribatzeko

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Ohartu Einsteinek proposatutako ekuazio berria geldidun objektuei aplikatuz gero, hau da, abiadura nulua eta ondorioz momentu lineala, p , zero den kasura aplikatuz, (1) erlazioa errekuaperatzen dela. Orain, berriz ere correspondentzia printzipioa erabiliz, Einsteinen ekuazio berria honela berriro idatz daiteke

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + m^2 c^4 \psi(x, t).$$

Ekuazio hau Klein-Gordon-en ekuazioa bezala ezagutzen da. Eta ekuazio honetan bi aldagaiekiko deribatua bigarren ordenekoak dira. Aldiz, ekuazio hau ez da egokia probabilitate funtzio bat deskribatzeko, hori egiten saiatuz gero probabilitate negatiboak agertzen baitira. Eta badakigu hori ez dagoela ondo definituta. Diracek uste zuen arazo hori energia karratura hartzetik zetorrela. Beraz, bere erro karratua hartzean pentsatu zuen, hau da,

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}. \quad (2)$$

Edo, baliokideki, Klein-Gordonen ekuazioaren erro karratua,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \sqrt{-c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^4} \psi(x, t).$$

Aldagai espazialarekiko bigarren deribatuaren erro karratua ondo defini daiteke Fourierren transformatuaren bidez. Baina Diracek ezin zuen aurkitu modurik potentzial elektromagnetikoak erlatibistikoki inbariantea zen era batean gehitzeko. Hau da, ezin zuen Schrödingerren ekuazioko V terminoaren baliokidea dena gehitu. Beraz, ekuazio berri bat beharrezkoa zen.

Gainera, ekuazio berri horrek elektroien barne estruktura deskribatzeko gai izan behar zen, hau da, espina deskribatzeko gai. Klein-Gordonen ekuazioa uhin-funtzio eskalar batekin ez zen horretarako gai. Horrez gain, mekanika kuantikoko eboluzio ekuazio batek lehen ordenako denborarekiko deribatua izan beharko zuen. Beraz, energia-momentu erlazioa kontsideratu zuen, (2), baina mekanika kuantikoko hizkuntzara itzuli aurretik linealizatu egin zuen. Hau da, honako berdintza hau idatzi zuen

$$E = \alpha p + \beta m,$$

α eta β balio batzuetarako. Aurrerantzean $c = 1$ hartuko da kontuak sinplifikatzeko. Hau da, pausu analogoak jarraitu daitezke c orokor batentzat baina ondorioa ez da aldatuko. Diracek honako galdera hau planteatu zuen. Posiblea al da α eta β balioak aurkitzea Einsteinen erlatibitate bereziaren formularekin bat egiteko? Hau da,

$$\exists \alpha, \beta : E = \alpha p + \beta m \implies E^2 = p^2 + m^2.$$

Ikus dezagun zer gertatzen den E -ren adierazpen berriaren karratua egiten dugunean:

$$E^2 = (\alpha p + \beta m)^2 = \alpha^2 p^2 + \beta^2 m^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha)mp.$$

Beraz, azken adierazpen hori $p^2 + m^2$ adierazpenaren berdina izateko gertatu beharrezkoa honako hau da:

$$\alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta + \beta\alpha = 0.$$

Hiru berdintza horiek aztertzen baditugu zerbait arraroa gertatzen ari dela konturatzen gara. Baldin eta

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

bada, orduan, hirugarren baldintzatik honako hau ondorioztatzen da

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2\alpha\beta = 0 \implies \alpha = 0 \text{ edo } \beta = 0.$$

Eta hori ez dator bat $\alpha^2 = 1$ eta $\beta^2 = 1$ baldintzak betetzearekin.

Orduan, zer ari da gertatzen? Suposatu dugun hipotesia ($\alpha\beta = \beta\alpha$) ez al da beti egia? Ba, zenbaki erreal edo konplexuetan pentsatzen badugu, bai, hori beti da horrela. Zenbaki errealak eta konplexuak beraien artean konmutatzen dutelako, hau da, $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$ betetzen dute. Aldiz, α eta β matrizeak badira, orduan $\alpha\beta = \beta\alpha$ berdintza ez da beti betetzen. Eta honek Diracen ideia harrigarri eta berritzailera garamatza. Zenbaki eta funtzio eskalarretara mugatu beharrean, Schrödingerren ekuazioan egiten den bezala, matrize eta bektore funtzioen terminoetan pentsatzea. Beraz, Diracek ikusi zuen bai existitzen dela berak bilatzen zuen ekuazioa, eta hau, lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio matritzial bat da bektoreetan eragiten duena.

Hau da Diracek asmatutako ekuazioa arestian aipatutako arazo guztiak konpontzen dituen:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m)\psi(t, x),$$

non hiru dimentsiotako ekuaziorako $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bektore matritziala, $\alpha_k, k = 1, 2, 3$, eta β 4×4 -ko matrizeak eta $\psi(t, x)$ 4 osagaitako bektorea diren. Ekuazio horri potentzial elektromagnetikoak gehitu ahal zaizkio beharrezkoak diren propietate fisikoak mantentzen dituelarik.

4. Diracen ekuazioa

Azter dezagun orain zehatzago Diracen ekuazioa, $\mathbb{R}^3$ -n honela definitzen dena:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x) = H_0\psi(t, x), \quad (3)$$

non $\psi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$. H_0 eragileari Hamiltondarra deritzo eta honela definitzen da:

$$H_0 = -i\alpha \cdot \nabla + \beta m,$$

non $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ hiru osagaitako bektore matriziala den eta $\alpha_k, \beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3$. Matrizen hauei *Diracen matrizeak* deritze eta honela definitzen dira

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$$

non $\mathbb{I}_2$ 2×2 -ko identitate matrizea den eta $\sigma_k \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3$, *Pauliren matrizeak* deritzen matrizeak dira honako era honetan definitzen direlarik

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

H_0 eragilearen lehen terminoa lehen ordenako eragile diferentzial matriziala da. Zehazki

$$\alpha \cdot \nabla = \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3$$

non $\partial_i x_i$ aldagaiarekiko deribatu partziala, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, adierazteko modu laburtua den. Beraz, H_0 esplitziki adierazita honako eragile hau izango da:

$$H_0 = \begin{pmatrix} m\mathbb{I}_2 & -i\sigma \cdot \nabla \\ -i\sigma \cdot \nabla & -m\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ 0 & m & \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \\ \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 & -m & 0 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 & 0 & -m \end{pmatrix}.$$

Diracen matrizeek aurreko ataleko baldintzak betetzen dituzte. Konkretuki

$$\alpha_l \alpha_k + \alpha_k \alpha_l = 2\delta_{kl} \mathbb{I}_4, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

$$\beta \alpha_k + \alpha_k \beta = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}_4,$$

non δ_{kl} Kronecker-en delta den, hau da, 1 balioa hartzen du $j = k$ denean eta 0 gainontzekoetan. Horrez gain, m konstante positibo eta erreal bat izango da, partikularen masa deskribatzen duena. Masa nulua den kasuan, $m = 0$, H_0 masa bako Diracen eragilea deritzo eta masaduna baldin eta $m > 0$ bada.

Matrizeek betetzen dituzten konmutazio erregelen ondorio garrantzitsuetako bat honako hau da:

$$H_0^2 = (-\Delta + m^2) \mathbb{I}_4.$$

Identitate horrek Diracen eragilea eta Laplaziarraren arteko erlazioa erakusten du. Horrez gain, $i\partial_t - H_0$ bere konjokatuarekin biderkatzerakoan Klein-Gordonen eragilea lortzen da,

$$(i\partial_t + H_0)(i\partial_t - H_0) = (-\partial_t^2 + \Delta - m^2) \mathbb{I}_4. \quad (4)$$

H_0 eragilearekin egiten diren eragiketak ondo definituta egoteko beharrezkoa da ψ funtzioa $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ espazioan egotea. Espazio hau, arestian aipatutako $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ Hilberten espazioaren orokorpena da. Ohartu H_0 4×4 -ko eragile matrizial bat dela eta, ondorioz, lau osagaitako bektoreetan eragiten duela. Hau da, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ non $\psi_i \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ espazioko biderketa eskalarra honela definitzen da

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)} = \int_{\mathbb{R}^3} (\psi_1(x)\overline{\phi_1(x)} + \psi_2(x)\overline{\phi_2(x)} + \psi_3(x)\overline{\phi_3(x)} + \psi_4(x)\overline{\phi_4(x)}) dx,$$

eta norma

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} (|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + |\psi_3(x)|^2 + |\psi_4(x)|^2) dx.$$

Honen inguruan gehiago sakontzeko begiratu [4] eta [5].

Paul Diracek sortutako ekuazioarenkin eta zehazki ψ -k lau osagai izatearekin erlazionatuta honako ideia hau sortu zen: ekuazioaren soluzio guztiek non elektroiek energia positiboa zuten bazuten bere baliokidea energia negatiboarekin. Hortik sortu zen positroiaren idea. 1932. urtean Andersonek positroia aurkitu zuenean Dirac betikotu zen, 1933. urtean Schrödingerrekin fisikako Nobel saria partekatu zuelarik.

Bibliografia

- [1] DIRAC P. A.M. 1928. «The quantum theory of the electron». *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **117**, 610-624.
- [2] DIRAC P. A.M. 1928. «The quantum theory of the electron. Part II.». *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **118**, 351-361.
- [3] Freire, N. 2024. «La ecuación de Dirac: cuando mecánica cuántica, relatividad y belleza se encuentran». *National Geographic España*, https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/ecuacion-dirac-mecanica-cuantica-relatividad-belleza-encuentran_21555
- [4] HISLOP, P.D. eta SIGAL, I. M. 1955. *Introduction to spectral theory: with applications to Schrödinger*. Springer-Verlag, New York.
- [5] THALLER, B.. 1992. *The Dirac Equation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.