

Dirac-en ekuazioa eta mekanika kuantiko erlatibista

(The Dirac equation and the relativistic quantum mechanics)

Naiara Arrizabalaga Uriarte*

Matematika Saila, Zientzia eta Teknologia Fakultatea, Leioako Campusa (UPV/EHU)

LABURPENA: Deribatu partzialetako ekuazioen artean, badago bat elektroien mugimendua aztertzen duena ikuspuntu erlatibista batetik. Ekuazio horri Diracen ekuazioa deritzo. Ekuazioa Paul Dirac fisikariak asmatu zuen 1928. urtean, eta historiako ekuazio garrantzitsua izan da mekanika kuantiko erlatibistaren sorrera ekarri zuelako. Hala ere, gaur egun pil-pilean dagoen ekuazio bat da. Besteak beste grafenoaren azterketan erabiltzen da. Oinarrizko ikerketaren ikuspuntutik eta baita ikuspuntu teknologiko batetik ezin-besteko material bihurtu da grafenoa, beraren propietate elektronikoak direla eta. Horrez gain, quarken hadroien barruko konfinamendua deskribatzeko ere balio du. Lan honetan Diracen ekuazioaren definizioa, jatorria eta propietate batzuk aztertuko ditugu.

GAKO-HITZAK: Dirac-en ekuazioa, mekanika kuantikoa, eragileen teoria, matematika.

ABSTRACT: *The Dirac equation is a partial differential equation that describes the movement of an electron from a relativistic perspective. Created by the physicist Paul Dirac in 1928, this equation has historically been significant as it introduced relativistic quantum mechanics. However, it is still relevant today. For example, it is used to analyse graphene, a material that has become important thanks to its electronic properties, both from a theoretical and a technological perspective. Furthermore, the Dirac equation can describe the confinement of quarks in hadrons. In this work, we will define the Dirac equation, analyse its creation, and study some of its main properties.*

KEYWORDS: *The Dirac equation, quantum mechanics, operator theory, mathematics.*

* **Harremanetan jartzeko/Corresponding author:** Naiara Arrizabalaga Uriarte, UPV/EHU, Matematika Saila, Zientzia eta Teknologia Fakultatea, Barrio Sarriena s/n (Leioa 48940).  <https://orcid.org/0000-0002-2805-4380>, naiara.arrizabalaga@ehu.eus

Nola aipatu/How to cite: Arrizabalaga Uriarte, Naiara (2026). «Dirac-en ekuazioa eta mekanika kuantiko erlatibista», *Ekaia*, 49, 2026, DOI: <https://doi.org/10.1387/ekaia.27715>

Jasoa: uztailak 18, 2025; Onartua: abenduak 18, 2025

ISSN 0214-9001-eISSN 2444-3225 / © UPV/EHU Press



Lan hau Creative Commons Aitortu-EzKomertziala-PartekatuBerdin 4.0 Nazioartekoa lizentzia baten mende dago

1. SARRERA

Diracen ekuazioa azken hamarkadetan bereziki ezagun bihurtu da. Ez soilik zientzialarien artean, baita jedartean ere. Zientzialari batzuek munduko ekuaziorik politenaren titulua eman diote. Eta beste batzuek maitasunaren ekuazioa dela aldarrikatzen dute. Pertsona askok beraien maitasuna adierazteko ekuazio hau tatuatzearaino. Ez dira gutxi sarean aurkitu daitezkeen Diracen tatuajeen irudiak. Baina, ba al dakite guztiek zer tatuatu duten? Azken urteotan askotan esan eta idatzi izan da nola Diracen ekuazioa maitasun apurtezinaren sinboloa dela, (irakurri adibidez [3]). Eta askotan ekuazioa honako azalpen honekin lotuta joaten da: noizbait eta denbora batez elkarreragina izan duten bi sistema denboran edo distantzian banantzen badira, banandutako bi sistema gisa deskribatu ahal izango dira. Hala ere, modu sotil batean sistema bakarrean bihurtu dira. Batak bestean eragiten jarraitzen dute, nahiz eta distantzia eta denbora luze batek banatu. Hau da, noizbait loturik egon diren bi partikulak nolabait erlazionatuta egoten jarraitzen dute naiz eta unibertsoko kontrako puntuetan aurkitu. Hori da korapilatze kuantikoaren edo konexio kuantikoaren interpretazioetako bat.

Erraz uler daiteke nola erlazionatu duen herri-kulturak konexio kuantikoaren ideia maitasunarekin. Baina hori ez da Diracen ekuazioak adierazten duena. Lan honetan ekuazioaren definizioa, esanahia eta berezitasunak aztertuko ditugu ikuspuntu matematiko batetik. Diracen ekuazioak, ekuazio dotore bat izateaz gain, bi zientzia adierazpen bakarrean batzen ditu: mekanika kuantikoa eta erlatibitatea. Ekuazioaren autoreak, Paul Diracek, bi gai horiek bateratu zituen 1928. urtean argitaratutako lan batzuetan, momentu hartara arte pentsaezina zen zerbait izanik.

Alde batetik, mekanika kuantikoa dugu. Teoria horrek proposatzen duena da aztertzen ari garen sistema baten informazio guztia uhin-funtzioa, $\psi(x, t)$, izeneko objektu baten enkriptatuta dagoela. Uhin-funtzio honek sistema bat nolabait aurkitzeko probabilitatea du bere barne. Uhin-funtzio horrek denboran zehar eboluzionatzen du Schrödinger-en ekuazioari jarraituz. Sinplifikatzeko, 1 dimentsioko Schrödingerren ekuazioa idatziko dugu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V\psi(x, t),$$

non x aldagai espaziala den, t denbora aldagaia, m masa, i unitate konplexua, $\hbar$ Planck-en konstantea eta V energia potentziala izanik.

Bestetik, Einstein-en erlatibitate berezia dugu. Horrek argiaren abiadurara mugitzen diren sistemen funtzionamendua azaltzen du. Teoria horretako ekuaziorik garrantzitsu eta ezagunena honako hau da:

$$E = mc^2,$$

non E sistemaren energia, m masa eta c argiaren abiadura diren. Ekuazioa horrek masaren eta energiaren arteko erlazioa azaltzen du hutsean zehar.

Diracek Schrödingerren ekuazioa eta energiaren eta masaren arteko ekuazioa adierazpen bakarrean bildu zituen, mekanika kuantiko erlatibista esaten zaiona sortuz. Mekanika kuantiko erlatibistak oso arin (argiaren abiaduratik hurbil dauden abiaduretan) mugitzen diren partikulak deskribatzen ditu. Ekuazio horren bitartez Paul Diracek $-1/2$ bateko espin bat duten eta argiaren abiaduratik hurbil mugitzen diren partikulen dinamika ezin hobeto deskribatu zituen. Hala nola, elektroi baten dinamika. Geroago, protoi eta neutroien dinamika ere deskribatu zituen. Beraz, Diracen ekuazioak ez du konexio kuantikoa deskribatzen. Hasieran aipatu bezala, konexio kuantikoaren fenomenoaren arabera, bi partikula subatomiko edo gehiago modu intrintsekoan lotuta dauden fenomenoak da haien arteko distantzia edozein izanda ere. Hau da, partikula baten egoerak besteetan eragiten du haien arteko distantzia handia izan arren. Konexio kuantikoa mekanika kuantikoaren fenomeno orokor bat da, eta Diracen ekuazioak partikulen dinamika deskribatzen du. Beraz, kontzeptu desberdinak dira. Are gehiago, Diracen ekuazioak partikula askeen dinamika deskribatzeko ere balio du. Hau da, beste partikula batekin inoiz elkareraginik izan ez duen partikula batena. Eta konexio kuantikoa egoteko, gutxienez, bi partikula egon behar dira. Edozein kasutan, oso ekuazio ederra da, adierazpen erraz eta xume batek esanahi handia duelako eta partikulen fisikan eragin itzela izan duelako historian zehar.

Nahiz eta Diracen ekuazioa fisikatik datorren objektu bat den, artikulua honetan ikuspuntu matematiko batetik soilik jorratuko da.

2. OINARRIZKO DEFINIZIOAK ETA NOTAZIOA

Deribatu partzialetako ekuazio bat aldagai bat baino gehiago dituen funtzio ezezagun bat eta beraren deribatuak erlazionatzen dituen ekuazio bat da. Funtzioak aldagai bat baino gehiago dituzenez, funtzio horren deribatuak deribatu partzialak izango dira, hau da, aldagai konkretu batekiko deribatuak. Sarritan aldagai aske horiek denbora eta espazioa izango dira. Mota honetako ekuazioen aplikazioa benetan zabala da. Zientzia eta teknologiako fenomenoak aztertzeke erabiltzen dira normalean. Ingeniaritza, fisika, kimika, ekonomia zein biologia arloetan, besteak beste. Gehien bat eboluzio ereduak aztertzen dira, zeinetan denboran zehar kantitate edo aldagai zehatz baten dinamika deskribatzen den. Aldagai horrek askotariko fenomenoak adieraz ditzake, hala nola satellite espazial baten kokapena, partikula baten posizioa, zein populazioaren hazkundea. Hala ere, askotan

egoera egonkorrak edo orekan dauden egoerak deskribatzeko ere erabiltzen dira.

1. definizioa. *Deribatu partzialetako ekuazio bat $u(x)$ funtzioa ezezagun gisa duen eta*

$$F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) = 0$$

erlazioa betetzen duen ekuazio bat da, F ezaguna eta $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ izanik. $D^m u$ -k $m \in \mathbb{N}$ ordenako u -ren deribatu partzial guztiak adierazten ditu.

2. definizioa. *Deribatu partzialetako ekuazio edo sistema baten ordena bertan agertzen diren u -ren deribatuen ordenarik handiena da.*

1. adibidea. *Honako ekuazio hau,*

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio bat da, funtzio ezezaguna $u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$ eta $t > 0$ izanik. Ekuazio horri dimentsio bateko beroaren ekuazioa deritzen. Eta t aldiunean, x posizioan dagoen tenperatura adierazten du.

Ikuspuntu klasiko batetik begiratz gero, deribatu partzialetako ekuazioak ekuazio hiperboliko, paraboliko eta eliptikoetan sailkatzen dira. Sailkapen horretako ekuazio nagusiak uhinen ekuazioa, beroaren ekuazioa eta Laplaceren ekuazioa dira, hurrenez hurren. Baina badaude beste asko ez direnak sailkapen horretan sartzen: Schrödinger, Dirac, Klein-Gordon edo Korteweg-de Vries-en ekuazioak, besteak beste. Horiek ekuazio dispersibo gisa ikus daitezke: hau da, maiztasun desberdinak abiadura-talde desberdinetan hedatzen dira. Beste modu batera esanda, soluzioak sakabana-tzera jotzen du denboran zehar.

Lan honetan deribatu partzialetako ekuazio konkretu baten zentratuko gara, Diracen ekuazioan, hain zuzen. Ekuazio hori lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio matrizial bat da. $\mathbb{R}^3$ espazioan ari garenean Diracen ekuazioak $-1/2$ -ko espina duten partikulen eboluzioa deskriba dezake ikuspuntu erlatibista batetik, adibidez, elektroi edo positroi partikulena. Partikula hori beste partikula batzuen edo beste indar batzuen menpe egon daitekeelarik. Bestalde, $\mathbb{R}^3$ -ko Ω eremu bornatu batean ari garenean, Diracen ekuazioak quarken hadroieta konfinamendua deskriba dezake. Eta bi dimentsioetan lan egiten dugunean, grafenoaren azterketarako ere balio du. Hau da, aukeratzen dugun espazio, eremu edo baldintzen arabera, Diracen ekuazioak aipatutako kasu bat edo beste deskribatuko du. Grafenoaren adibidea, bi dimentsioko ekuazioari dagokiona, gaur egun pil-pilean dagoen

gai bat da, material horren propietate bereziak direla eta. Grafenoaren es-
truktura bi dimentsioko ezti-orraze itxurakoa da. Gai hori ere interesgarria
izan arren, gu hiru dimentsiotako ekuazioan zentratuko gara, hau da, elek-
troien eboluzioa deskribatzen duen ereduan. Eta honako hau da hiru di-
mentsioko Diracen ekuazio askea, hau da, kanpoko indarren eraginik gabe-
koa:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (-i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi(t, x),$$

non $\nabla \mathbb{R}^3$ -ko gradiente bektorea den, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, α_k , $k = 1, 2, 3$, eta
 β balio konplexuak dituzten 4×4 -ko matrizeak, i unitate konplexua eta
 $\hbar$, c , m konstante fisikoak diren.

Aurrera jarraitu orduko, artikuluko honetarako beharrezkoak izango diren
kontzeptu batzuen definizioa emango dugu:

3. definizioa. *Izan bitez $f(x)$ funtzioa $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ iza-
nik eta $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ eremu bektoriala. Orduan, f -ren gradientea
 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ da. F eremu bektorialaren dibergentzia,*

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

izango da eta f funtzioaren laplacetarra

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Bestalde, aztertuko ditugun ekuazioak eta beraien soluzioak zein ere-
mutan dauden definituta finkatzea ezinbestekoa da. Horretarako Hilberten
espazioa zer den definitu behar dugu.

4. definizioa. *Izan bedi V espazio bektorial lineal bat. V gaineko $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-
derketa eskalarra $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ aplikazio bat da, non edozein $x, y, z \in V$, $a \in \mathbb{C}$
baliotarako honako hau betetzen den:*

- $\langle ax + y, z \rangle = a \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (lineala lehen sarreran),
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (simetriko konplexua),
- $\langle x, x \rangle \geq 0$, eta $\langle x, x \rangle = 0$ baldin eta soilik baldin $x = 0$ (positiboki
definitua).

Biderketa eskalarra duen edozein espazio bektorial lineal, V , aurrehilbert dela esaten da.

5. definizioa. *Izan bedi $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ aurrehilbert espazioa. Orduan, edozein $v \in V$ baliotarako defini dezagun*

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Orduan, $\|\cdot\|$ V gaineko norma bat da.

6. definizioa. *Izan bedi $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ aurrehilbert espazioa. Orduan, V Hilberten espazioa dela esango dugu V espazio osoa baldin bada. Hau da, V -ren Cauchyren segida guztiak konbergenteak badira biderketa eskalarrak sortutako norma.*

2. adibidea. *Izan bedi honako espazio hau:*

$$L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) := \left\{ \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Orduan, $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ espazioa Hilberten espazioa da. Espazio horretako ψ eta ϕ funtzioen arteko biderketa eskalarra honela definitzen da:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \overline{\phi(x)} dx,$$

eta norma:

$$\|\psi\|_{L^2} = \left(\langle \psi, \psi \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mekanika kuantikoan espazio ohikoenetako bat $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ Hilberten espazioa da. Eta espazio horren orokorpen bat izango da Diracen ekuazioaren espazio naturala.

3. MEKANIKA KUANTIKO ERLATIBISTA

XX. mendearen hasieran *Fisika klasikoaren* paradigma nagusi zen arren, esperimentu batzuek eredu horien mugak nabarmendu zituzten. Alde batetik, Einsteinek, 1905. urtean argitaratutako efektu fotoelektrikoari buruzko lanean, argi-izpiak argiaren partikulez osaturik daudela esan zuen. Gaur egun, argi partikula horiei fotoi deritze. Aldi berean, de Broglie-k

materiaren uhin-eredu bat proposatu zuen. Uhin partikula dualitate honek eramane zuen fisika berri bat sortzera: *fisika kuantikoa* deiturikoa. Ideia hori naturako fenomenoaren interpretazio probabilistikoa oinarritzen da.

Fisika kuantikoaren lehen postulatuak dio sistema kuantiko bateko t aldiuneko egoera ψ uhin-funtzio baten bidez deskribatzen dela. Uhin-funtzio hori Hilberten espazio bateko funtzio baten bidez adierazten da (askotan $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$), non $t \in \mathbb{R}$ guztietarako

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t, x)|^2 dx = 1$$

den. Testuinguru horretan, $|\psi(t, x)|^2$ kantitatea honela interpretatzen da: t aldiunean partikula x posizioan egoteko probabilitate-dentsitatea. Eta egoera kuantiko horien denborarekiko eboluzioa Schrödingerren ekuazioaren bidez deskribatzen dela postulatu dute.

Mekanika kuantikoa mekanika klasikoak aztertu ezin zituen problemak azaltzeko sortua izan zen. Atomoak eta partikula subatomikoen propietate fisikoak deskribatzeko besteak beste. Schrödingerren ekuazioaren soluzioaren (uhin-funtzioaren, $\psi(t, x)$) interpretazioetako bat honako hau da: partikulak t aldiunean posizio konkretu baten egoteko probabilitatearekin erlazionatuta dagoen balio bat ematen du, eta halako balioak konplexuak izan daitezke.

Mekanika klasikoak eskala mikroskopikoko problemak deskribatzeko arazoak zituen modu berean mekanika kuantikoak, eta, konkretuki, Schrödingerren ekuazioak arazoak izan zituen arin mugitzen ziren partikulekin. Horren harira galdera praktikoa bat sortu zen: nola deskriba ditzakegu argiaren abiaduratik hurbil mugitzen diren partikulen propietate fisikoak? Ikertzaileak erlatibitatearekin bat zetorren mekanika kuantikoaren teoria bat sortzen saiatu ziren. Baina behin eta berriz arazo teknikoei topo egiten zuten. Konkretuki beraien saiakeretan probabilitate negatiboak aurkitzen zituzten, eta hori ezinezkoa da, probabilitatearen ohiko definizioagatik balioek $[0, 1]$ tartean egon behar baitute. Beraz, zeintzuk dira elektroiak modu egoki baten deskribatzen dituzten uhin-funtzioak? Nolako izan behar du uhin-funtzio horien dinamikak deskribatzen dituen ekuazioak?

Horrelako galderei eman zien erantzuna Paul Dirac fisikariak 1928. urtean argitaratu zituen bi artikuluetan [1, 2]. Erlatibitatearen eskakizunak kontuan hartu ahal izateko Diracek honako proposamen harrigarri hau egin zuen: uhin-funtzioak ez du funtzio (balio) bakar bat izan behar, baizik eta 4 balio dituen bektore bat.

Ikus dezagun, modu sinplifikatu batean, nola heldu zen ideia horretara. Arestian aipatutako Schrödingerren ekuazioa Newtonen legeen berrinter-

pretazio gisa ikus daiteke, non balio asko uhin-funtzioan eraginez lortzen diren. Normalean, uhin-funtzioari deribatu eragilea aplikatuz. Gogora dezagun Schrödingerren ekuazioa dimentsio batean energia potentzialik gabe, hau da, kanpoko indarren eraginik gabe:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t).$$

Bere garaian Schrödingerrek eta beste fisikari batzuek oinarri gisa hartu zuten ekuazioa guztiok ezagutzen dugun honako ekuazio hau da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

non E energia zinetikoa den, m masa eta v abiadura. Hau da, energia zinetikoa masaren eta abiaduraren bitartez nola kalkulatu daitekeen esaten duen ekuazioa. Bestalde, momentu lineala, p , masa bider abiadura eginez kalkula daiteke, hau da,

$$p = mv.$$

Beraz, energia zinetikoa momentu linealaren eta masaren bitartez honela adieraz daiteke:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}p^2. \quad (1)$$

Korrespondentziaren printzipioak energia zinetikoa eta momentua denborarekiko eta espazioarekiko deribatuekin erlazionatzen ditu:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \\ p &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Beraz, adierazpide kuantiko berrian Schrödingerren ekuazioak erlazionatzen digu uhin-funtzioaren denborarekiko deribatu bat, energia zinetikoa ordezkatzeko duena, uhin-funtzioaren espazioarekiko bigarren deribatuarekin, hau da, momentua karratura ordezkatzeko duena,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t).$$

Ekuazio horrek fenomeno fisiko ugari deskribatzen ditu, horien artean partikulekin erlazonatutakoak. Ekuazioak, orobat, partikula baten dinamika deskribatzeko balio du hutsean, hau da, kanpoko indarren eraginik gabe. Aldiz, partikula desberdinen arteko interakzioa ere deskriba dezake V energia potentzial bat gehitzen baldin badugu,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V\psi(x,t).$$

Ekuazioari gehitutako potentzialak elektrikoak, magnetikoak edo bes-telakoak izan daitezke. Eta potentzialdun ekuazioak aztertzea da gaur egun interesgarriena. Hala ere, ekuazio hori ez dator bat Einsteinen erlatibitate bereziaren oinarritzko ideiarekin, non denbora eta espazioa modu pareka-garri batean sartu behar diren ekuazioan. Hau da, aldagai biek egon behar dute deribatu bakarrarekin edo biek bi deribaturekin. Eta ez, batek deribatu batekin eta besteak birekin, Schrödingerren ekuazioan agertzen den bezala.

Beraz, bi teoria horiek bat egiteko arazo batekin topo egin dugu. Einstein bera izan zen arazo horri aurre egiteko lehen oinarria jarri zuena. Konturatu zen ordura arte erabilitako ekuazio famatua, (1), osatu gabea zegoela. Eta ekuazio berri hau proposatu zuen energia erlatibista deskribatzeko:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4.$$

Ohartu Einsteinek proposatutako ekuazio berria geldu dauden objektuei aplikatuz gero, hau da, abiadura nulua eta ondorioz momentu linela, p , zero den kasuari aplikatuz gero, (1) erlazioa errekuiperatzen dela. Orain, berriz ere korrespondentziaren printzipioa erabiliz, Einsteinen ekuazio berria honela berriidatz daiteke:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,t) = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + m^2 c^4 \psi(x,t).$$

Klein-Gordon-en ekuazioa deritzo horri. Eta ekuazio horretan bi alda-gaiekiko deribatua bigarren ordenakoak dira. Aldiz, ekuazioa ez da egokia probabilitate-funtzio bat deskribatzeko, hori egiten saiatuz gero probabili-tate negatiboak agertzen baitira. Eta badakigu hori ez dagoela ondo defini-tuta. Diracek uste zuen arazo hori energia karratura hartzetik zetorrela. Be-raz, bere erro karratua hartzea pentsatu zuen, hau da,

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \quad (2)$$

Edo, baliokideki, Klein-Gordonen ekuazioaren erro karratua,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \sqrt{-c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^4} \psi(x,t).$$

Aldagai espazialarekiko bigarren deribatuaren erro karratua ondo defini daiteke Fourierren transformatuaren bidez. Baina Diracek ezin zuen aurkitu modurik potentzial elektromagnetikoak erlatibistikoki aldaezina zen era batean gehitzeko. Hau da, ezin zuen Schrödingerren ekuazioko V terminoaren baliokidea dena gehitu. Beraz, ekuazio berri bat beharrezkoa zen.

Gainera, ekuazio berri horrek elektroien barne-estruktura deskribatzeko gai izan behar zuen, hau da, espina deskribatzeko gai. Klein-Gordonen ekuazioa uhin-funtzio eskalar batekin ez zen horretarako gai. Horrez gain, mekanika kuantikoko eboluzio-ekuazio batek lehen ordenako denborarekiko deribatua izan beharko zuen. Beraz, energia-momentu erlazioa kontsideratu zuen, (2), baina mekanika kuantikoko hizkuntzara itzuli aurretik linealizatu egin zuen. Hau da, honako berdintza hau idatzi zuen:

$$E = \alpha p + \beta m,$$

α eta β balio batzuetarako. Aurrerantzean $c = 1$ hartuko da kontuak sinplifikatzeko. Hau da, pauso analogoak egin daitezke c orokor batentzat, baina ondorioa ez da aldatuko. Diracek honako galdera hau planteatu zuen. Posiblea al da α eta β balioak aurkitzea Einsteinen erlatibitate bereziaren formularekin bat egiteko? Hau da,

$$\exists \alpha, \beta : E = \alpha p + \beta m \Rightarrow E^2 = p^2 + m^2.$$

Ikus dezagun zer gertatzen den E -ren adierazpen berriaren karratua egiten dugunean:

$$E^2 = (\alpha p + \beta m)^2 = \alpha^2 p^2 + \beta^2 m^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha)mp.$$

Beraz, azken adierazpen hori $p^2 + m^2$ adierazpenaren berdina izateko gertatu beharrezkoa honako hau da:

$$\alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta + \beta\alpha = 0.$$

Hiru berdintza horiek aztertzen baditugu zerbait arraroa gertatzen ari dela konturatzen gara. Baldin eta

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

bada, orduan hirugarren baldintzatik honako hau ondorioztatzen da

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ edo } \beta = 0.$$

Eta hori ez dator bat $\alpha^2 = 1$ eta $\beta^2 = 1$ baldintzak betetzearekin.

Orduan, zer ari da gertatzen? Erabili dugun hipotesia ($\alpha\beta = \beta\alpha$) ez al da beti egia? Ba, zenbaki erreale edo konplexuetan pentsatzen badugu, bai, hori beti da horrela. Zenbaki errealek eta konplexuek beren artean konmutatzen dutelako; hau da, $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$ betetzen dute. Aldiz, α eta β matrizeak bada, orduan $\alpha\beta = \beta\alpha$ berdintza ez da beti betetzen. Eta horrek Diracen ideia harrigarri eta berritzaile garamatza. Zenbaki eta funtzio eskalarretara mugatu beharrean, Schrödingerren ekuazioan egiten den bezala, matrize- eta bektore-funtzioen terminoetan pentsatzea. Beraz, Diracek ikusi zuen bai existitzen dela berak bilatzen zuen ekuazioa, eta hori, lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazio matrizial bat da bektoreetan eragiten duena.

Hau da Diracek asmatutako ekuazioa, arestian aipatutako arazo guztiak konpontzen dituen:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (-i\alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi(t, x),$$

non hiru dimentsioko ekuaziorako $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bektore matriziala, α_k , $k = 1, 2, 3$, eta β 4×4 -ko matrizeak eta $\psi(t, x)$ 4 osagaiko bektorea diren. Ekuazio horri potentzial elektromagnetikoak gehitzen ahal zaizkio beharrezkoak diren propietate fisikoak mantenduz.

4. DIRACEN EKUAZIOA

Azter dezagun orain zehatzago Diracen ekuazioa, $\mathbb{R}^3$ -n honela definitzen dena:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = H_0 \psi(t, x), \quad (3)$$

non $\psi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$. H_0 eragileari hamiltondarra deritzo eta honela definitzen da:

$$H_0 = -i\alpha \cdot \nabla + \beta m,$$

non $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ hiru osagaiko bektore matriziala den eta α_k , $\beta \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3$. Matrize horiei Diracen matrizeak deritze eta honela definitzen dira:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$$

non $\mathbb{I}_2$ 2×2 -ko identitate-matrizea den eta $\sigma_k \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3$, Pauliren matrizeak diren honako era honetan definituak:

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

H_0 eragilearen lehen terminoa lehen ordenako eragile diferentzial matritziala da. Zehazki

$$\alpha \cdot \nabla = \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3$$

non ∂_{x_i} aldagaiarekiko deribatu partziala, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, adierazteko modu laburtua den. Beraz, H_0 esplizituki adierazita honako eragile hau izango da:

$$H_0 = \begin{pmatrix} m\mathbb{I}_2 & -i\sigma \cdot \nabla \\ -i\sigma \cdot \nabla & -m\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ 0 & m & \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \\ \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 & -m & 0 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 & 0 & -m \end{pmatrix}.$$

Diracen matrizeek aurreko ataleko baldintzak betetzen dituzte. Konkre-
tuki

$$\alpha_l \alpha_k + \alpha_k \alpha_l = 2\delta_{kl} \mathbb{I}_4, j, k = 1, 2, 3,$$

$$\beta \alpha_k + \alpha_k \beta = 0, k = 1, 2, 3,$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}_4,$$

non δ_{kl} Kronecker-en delta den, hau da, 1 balioa hartzen du $j = k$ denean eta 0 gainontzekoetan. Horrez gain, m konstante positibo eta erreal bat izango da, partikularen masa deskribatzen duena. Masa nulua den kasuan, $m = 0$, H_0 -ri masarik gabeko Diracen eragilea deritzo eta masaduna baldin eta $m > 0$ bada.

Matrizeek betetzen dituzten konmutazio-erregelen ondorio garrantzi-
tsuetako bat honako hau da:

$$H_0^2 = (-\Delta + m^2) \mathbb{I}_4.$$

Identitate horrek Diracen eragilearen eta laplacetarraren arteko erlazioa erakusten du. Horrez gain, $i\partial_t - H_0$ bere konjokatuarekin biderkatzean Klein-Gordonen eragilea lortzen da,

$$(i\partial_t + H_0)(i\partial_t - H_0) = (-\partial_t^2 + \Delta - m^2)\mathbb{I}_4. \quad (4)$$

H_0 eragilearekin egiten diren eragiketak ondo definituta egoteko beharrezkoa da ψ funtzioa $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ espazioan egotea. Espazio hori, arestian aipatutako $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ Hilberten espazioaren orokorpena da. Ohartu H_0 4×4 -ko eragile matritzial bat dela eta, ondorioz, lau osagaiko bektoreetan eragiten duela. Hau da, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ non $\psi_i \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ espazioko biderketa eskalarra honela definitzen da

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)} = \int_{\mathbb{R}^3} (\psi_1(x)\overline{\phi_1(x)} + \psi_2(x)\overline{\phi_2(x)} + \psi_3(x)\overline{\phi_3(x)} + \psi_4(x)\overline{\phi_4(x)}) dx,$$

eta norma

$$|\psi|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} (|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + |\psi_3(x)|^2 + |\psi_4(x)|^2) dx.$$

Horren inguruan gehiago sakontzeko ikus [4] eta [5].

Paul Diracek sortutako ekuazioarenkin eta zehazki ψ -k lau osagai iza-tearekin erlazionatuta honako ideia hau sortu zen: ekuazioaren soluzio guztiek, non elektroiek energia positiboa zuten, bazeukaten beren baliokidea energia negatiboarekin. Hortik sortu zen positroiaren ideia. 1932. urtean Andersonek positroia aurkitu zuenean, Dirac betikotu egin zen, 1933. urtean Schrödingerrekin Fisikako Nobel saria partekatzean.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DIRAC P. A.M. 1928. «The quantum theory of the electron». *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **117**, 610-624.
- [2] DIRAC P. A.M. 1928. «The quantum theory of the electron. Part II.». *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **118**, 351-361.
- [3] FREIRE, N. 2024. «La ecuación de Dirac: cuando mecánica cuántica, relatividad y belleza se encuentran». *National Geographic España*, https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/ecuacion-dirac-mecanica-cuantica-relatividad-belleza-encuentran_21555
- [4] HISLOP, P. D. eta SIGAL, I. M. 1955. *Introduction to spectral theory: with applications to Schrödinger*. Springer-Verlag, New York.
- [5] THALLER, B.. 1992. *The Dirac Equation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.