EKAIA (2026), artikulua prentsan/article in press.
https://doi.org/10.1387/ekaia.28549
Behin-behineko bertsioa (euskara orrazketaren zain).

ekaia
ZIENTZIA eta TEKNOLOGIA ALDIZKARIA

ISSN: 0214-9001
e-ISSN: 2444-3255
©EHU Press

Idazkariaren problema: Matematika esperimentalen bidezko ekarpen batzuk

Secretary Problem: Some Contributions Through Experimental Mathematics

Yosu Yurramendi Mendizabal

Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala Saileko lankide ohia

Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU)

LABURPENA: Idazkariaren problemaren soluzio klasikoa konbinatorian edota probabilitateen kalkuluan dago oinarrituta. Idazlan honetan matematika esperimentaletan oinarritutako zenbait soluziobide eskaintzen dira, eta horietako bakoitzaren ezaugarriak adierazten dira. Simulazioaren bidez, soluzio klasikoak hautematen dira gutxi gorabehera. Soluzio zehatzak bilatzeko formula errekurtsibo berri bat induzitzen da, eta soluzio klasikoarekin baliokidetzen da. Eredu linealen bidez, oso modu eraginkorrean zenbatesten dira soluzioak.

HITZ GAKOAK: idazkariaren problema, geldiune hoberenaren problema, kontrol teoria, matematika esperimentalak, errekurtsibitatea, simulazioa.

ABSTRACT: The classical solution to the Secretary Problem is based on the combinatorics, or on probability calculus. This paper offers several solutions based on experimental mathematics, indicating the characteristics of each of them. Through simulation, classical solutions are observed more or less. A new recursive formula for the search for exact solutions is induced, and validated with the classical solutions. By linear models, solutions are estimated very efficiently.

KEYWORDS: Secretary Problem, optimal stopping theory, control theory, experimental mathematics, recursion, simulation.

***Harremanetan jartzeko/ Corresponding author**: Yosu Yurramendi Mendizabal. Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala Saila, Euskal Herriko Unibertsitatea ehu https://orcid.org/ 0000-0002-4399-600X, yosu.yurramendi@ehu.eus

Nola aipatu / How to cite: Yurramendi Mendizabal, Yosu .(2026). <<Idazkariaren problema: Matematika esperimentalen bidezko ekarpen batzuk>>, Ekaia, 50, xx-xx. (https://doi.org/10.1387/ekaia.28549).

Jasoa: apirilak 29, 2026; Onartua: azaroak 5, 2026

ISSN 0214-9001-eISSN 2444-3225 / © 2026 UPV/EHU

Obra *Creative Commons Atribución 4.0 Internacional*-en lizentziapean dago

1. SARRERA

Idazlan honetan azalduko den gaiari *idazkariaren problema* ("*secretary problem*") esaten zaio gehienetan, idazkari baten hautaketaren inguruko problema enuntziatzen delako (ikusi [1]). Beste izen batzuk ere erabiltzen dira: *geldiune hoberenaren problema*, *aukera hoberena*rena, *ezkontza*rena edo *dotea*rena. *Kontrol teoria*n maiz aipatzen den adibide bat da.

Adibide klasikoaren arabera erakunde batek pertsona berri bat kontratatu nahi du, eta hautagaiak asko dira. Erakundeak erabaki behar du nor kontratatu, kontuan hartuta erakundearen nahia hautagairik hoberena kontratatzea dela. Erabakitzaileak hautagairen gaitasunak baloratzen ditu, demagun elkarrizketa baten ondoren. Hautagaiak zerrenda batean ordenatuta daude, zorizko ordenaren arabera, eta banan-banan elkarrizketatuko dira. Behin hautagai bat elkarrizketatuz gero, erabakitzaileak baloratu eta erabakiko du pertsona hori kontratatu ala ez. Ezetza bada, gero ez du aukerarik izango atzera egin eta hura kontratatzeko. Baietza bada, aldiz, hortxe gelditzen da hautatze-prozesua, gainontzekoak elkarrizketatu gabe.

Badira bizitza errealeko beste adibide batzuk problema honen enuntziatuari gutxi gorabehera erantzuten diotenak: pertsona batek lan hobeago bat bilatzea (idazkariaren alderantzizko problema), kale bateko dendarik merkeena topatzea atzera eta aurrera ibili gabe, bizileku baten bila ibiltzea, autoa aparkatzerakoan helmugatik hurbilen dagoen lekua hautatzea, ondasun bat saltzerakoan eskaintza jakin bat onartzea ala hobeagoren baten zain egotea, eta abar.

Argi dago lehendabiziko hautagaia aukeratzea erabakitzen bada, besterik gabe, ziur asko ez dela handiena izango (hoberena hautatzeko probabilitatea $\frac{1}{n}$da, hautagai kopurua n izanda). Azkena aukeratzeak probabilitate berdina du. Tartekoren bat behar da izan, baina ez da zoriz aukeratu behar ezta modu deterministan ere (esaterako, '4.a'), aipatutako bi muturreko kasuen baliokide izango bailirateke. Hautagai zerrenda batean hoberena aukeratu nahi izateak estrategia egoki bat eskatzen du, eta horrek dakar ezagutu diren aurreneko hautagaiek ematen duten informazioa kontuan hartzea. Erabakitzaileak goizegi hautatzen badu hoberena ezkutuan gera daiteke, eta beranduegi egiten badu, aldiz, bazterrean. Erabakitzaileak oreka-puntu bat bilatu behar du goizegi eta beranduegi artean.

Problema formalizatzeko bidean, hautagaien kopuruari n deitzen zaio. Kutxa batean n txartel desberdin sartzen dira (hautagaiak), bakoitza zenbaki batekin (hautagaiaren balorazioa). Haien balorazioak zenbaki hutsak eta bakarrak dira, eta ez dago berdinketarik. Erabakitzaileak ez daki zein diren zenbaki horiek. Beraz, zenbaki-ordenak hartuko ditu kontuan. Horrela, idatzitako zenbakien

arabera, *n* txartelak ordenatuta daude *1*-etik *n*-ra. Txartelak zori hutsez dira atereak, banan-banan. Helburua zenbakirik handien duen txartela hautatzea da; hau da, *n* ordena-zenbakiari dagokion txartela hautatzea.

Ateratze aldi bakoitzean erabakitzaileak txartela hautatzen du ala baztertzen. Ateratze aldi berriaren txartel-zenbakia txikiagoa bada aurretik ateratakoenak baino, baztertu egingo du, baina handiagoa bada erabaki beharko du hautatu ala baztertu. Bide batez, esan beharra dago erabakitzaileak aski duela txartel berriaren zenbakia ateratako txartel-zenbakirik handienarekin alderatzea. Txartel atera berria baztertzekotan, problema bera izango du beste txartel-zenbaki bat ateratzean, hautatu ala baztertu. Gehienez *n* txartel-zenbakiak aterako dira. Kasu horretan txartel-zerrenda oso bat osatuko litzateke; hau da, ordena-zenbakiak izanik axola duen bakarra, ordena-zenbakiak erabiliz, *{1,2,3,...,n}* multzoaren permutazio bat.

Erabakitzaileak ahalik eta modurik egokienean gelditu behar du txartelak ateratzeko prozesua. Kutxan dauden *n* txarteletatik balorazio handiena duen txartela hautatzeko estrategia bat behar du. Hautatzeko estrategia bat izango da ateratako *k* txartel ($0 \leq k < n$) ikuskatzea eta baztertzea (nolabait, informazio pixka bat lortzea), eta *k* txartel horien zenbakiak baino handiagoa duen lehen txartela hautatzea. Horrelako estrategia bat *k* finkatzean datza, txartel-ateraldi prozesua hasi aurretik: txartel kopurua, *n*, ezagututa, *k* txartel baztertu ($0 \leq k < n$). $k=0$ lehenengo txartela hautatzea da, eta $k=n-1$ azken txartela hautatzea.

Adibidez, $n=7$ eta $k=3$ finkatuta, lau permutazio agertzen dira 1. taulan: '*' batez irudikatu da $k=3$ dena, azpimarratuta dago lehenengo *k* gaien artetik handiena dena, gorriz hautatua izan dena, eta tamaina larriz guztien artean handiena dena (*n*). Permutazio bakoitzean behatzen da handiena (*n*) hautatua izan den ala ez: 'arrakasta' ala 'porrota', hurrenez hurren.

1. taula. Adibideak $n=7$, $k=3$

	Handiena hautatua izan al da?
3 5 1 * 4 6 7 2	porrota
3 5 1 * 2 4 7 6	**arrakasta**
3 5 1 * 7 2 4 6	**arrakasta**
3 7 1 * 5 2 4 6	porrota

Lau permutazio horiek aztertzeaz gain beste permutazio guztiak aztertuak izan balira, $k=3$ geldiune edo estrategiarako 'arrakasten' proportzioa kalkulatuko litzateke. Erabakitzaileak ez daki zein ordenan etorriko zaizkion txartelak, baina jo dezake *{1,2,3,...,7}* multzoaren permutazio guztiak probabilitate

berdinekoak direla. Proportzioa probabilitatea da permutazio guztiak gertatzeko probabilitate berdina dutenean (permutazioen banaketa uniformea).

Oro har, geldiunerik hoberena bilatzeko *k* guztiak (*0≤k<n*) aztertzen dira, eta horretarako *{1,2,3,...,n}* multzoaren permutazio guztiak hartzen dira kontuan. Izan bedi$p_n(k)k$ estrategia edo geldiunea erabiliz 'arrakasta' izateko probabilitatea. Helburua, *n* zenbaki arrunt jakin baterako, 'arrakasta' izateko probabilitate maximoa,p_n^*, emango duen *k* geldiune hoberena,k_n^*, aurkitzea da: $p_n^* = max_{0\le k<n} p_n(k) \equiv p_n(k_n^*)$.

Esate baterako, *n=3* denean ordena-zenbakirik handiena **3** da. problemaren ebazpidea *{1,2,3}* multzoaren permutazioak enuntziatzean datza (guztira, 6), eta gero *k* geldiune bakoitzak (*0≤k<3*) permutazio horien gainean duen eragina aztertzean (ikusi 2. taula). Permutazio guztiak idazten dira, eta 1. taulan bezala, *k* geldiunearen arabera ('*' batez irudikatua) azpimarratzen da lehenengo *k* gaien artetik handiena, gorriz idazten hautatua dena, eta zenbatu zein den 'arrakasta' (**3**) duten permutazioen kopurua. Probabilitatea arrakasta kopuru horren arabera kalkulatzen da:

2. taula. *n=3, 0≤k<3*

k=0 (lehenengoa hautatu)	*k=1*	*k=2* (azkena hautatu)
* 1 2 3	1 * 2 3	1 2 * **3**
* 1 3 2	1 * **3** 2	1 3 * 2
* 2 1 3	2 * 1 **3**	2 1 * **3**
* 2 3 1	2 * **3** 1	2 3 * 1
* **3** 1 2	3 * 1 2	3 1 * 2
* **3** 2 1	3 * 2 1	3 2 * 1
2 aldiz **3**, (*2/6*)	3 aldiz **3**, (*3/6*)	2 aldiz **3**, (*2/6*)

Horrela:$p_3(0) = 0.33, p_3(1) = 0.50, p_3(2) = 0.33$. Geldiunerik hoberena, beraz,$k_3^* = 1$ da (6 permutazioetatik 3 aldiz **3**); hau da, lehenengo txartela baztertu, eta bera baina hobeagoa de lehen txartela hautatu. Horren arabera, handiena (**3**) hautatzeko probabilitatea *3/6* edo *% 50* edo $p_3^* = 0.5$da.

Problema honetan eman beharreko erantzunak bi dira: probabilitate maximoa,p_n^*, eta dagokion geldiunerik hoberena,k_n^*. Senak dio geldiunerik hoberenak zerikusia duela hautagai edo txartel kopuruarekin: gero eta *n* handiagoa izan, orduan etak_n^*handiagoa. *n* txikia denean sakonki azter liteke

kasuistika osoa, 2. taulan egin bezala, eta ondoren kalkulatup_n^*, probabilitate maximoa, eta erabaki zein denk_n^*, geldiunerik aproposena. Horixe da 2. ataleko gaia. *n* handia denean, ezagunak dira idazlan klasikoetan 'arrakasta' izateko probabilitate maximoa,p_n^*, limitean$\frac{1}{e}$, (≈*0.3678794*) da, eta dagokion geldiunerik hoberenaren limitea, proportzionalki,$\frac{k_n^*}{n}$,$\frac{1}{e}$ da ere. Beraz, geldiunerik hoberena da, hautagaien herena (berdin dio zein den *n*) baino pixka bat gehiago (*% 37*a) pasatzen utzi eta horiek baino hobeago den lehenengoa hautatu. Estrategia honi 'arrakasta' izateko dagokion probabilitatea *% 37* da gutxi gorabehera (*n>3* denean, zorizko erabaki hutsez,$\frac{1}{n}$, baino dezente handiago). Harrigarri samarrak dira emaitza hauek.

Azken emaitza horiek aspalditik ezagutzen dira, baina idazkariaren problemaren jatorria iluna da. 1950ean Merrill Flood matematikariak biltzar batean aurkeztu omen zuen, baina ezaguna egin zen 1960an Martin Gardner-en bitartez *Scientific American* aldizkariko bere 'Jolas Matematikoak' atalean 'Googol jokoa'ri buruz idatzi zuenean (ikusi [2]). Ematen duen soluzioa Leo Moser eta J.R. Pounder matematikariei zor die. Bertan ere esaten du, Moser-ek esanda, Arthur Cayley matematikariak antzeko problema bat argitaratu zuela 1875ean (ikusi [3]). Ferguson-ek (ikusi [1]) problema honen jatorrian, Cayley-z gain, Johannes Kepler ere aipatzen du, 1612an alargundu zenean eta 11 emaztegairen artean aukeratu behar izan zuenean.

Orduz geroztik, problema honi buruzko lan asko daude, problemaren baldintzak eta helburuak zabalduz edota aldatuz gauzatzen direnak (ikusi [1]). Guztiek *kontrol teoria* matematikoaren *geldiune hoberena*ren problema deitutako adar bat osatzen dute. "Secretary problem" idatziz gero Interneterako bilatzaile batean, artikulu asko agertzen dira, besteak beste, gaur egungoak.

Edozein kasuan, gelditzeko estrategia hoberena bilatzea optimizazio-problema bat da. Lan honetan oinarrizko kasuaz arituko naiz. Soluzioa ezaguna denez, irakurleak galde diezadake zertarako den idazlan hau. Nire helburua soluzioa bide desberdinetik azaltzea da, bideen arteko loturak ezartzea eta gaian sakontzea. Zenbait bide azaltzen ditut:

1. Simulazio-prozesu bat da. Nolabait, gaiaren ikuspegi naif bat da. Probabilitateen kalkulua ezagutu gabe, baina problemaren gakoak ondo ulertzeko eta konputagailu batean programatzeko gaitasunarekin, nahi bezain erantzun zehatza eman dakioke planteatutako problemari modu praktikoan (2. atala).

2. Behaketa-prozesu bat da. *n* tamainako (*3≤n≤10*) permutazio guztiak sortzen dira, eta horietako bakoitzean *k* geldiune edo estrategia bakoitzerako arrakasta-kopurua zenbatzen da. Horrela, hautagai kopuruaren eta geldiune desberdinen arabera bi dimentsiotako taula bat eratzen da: (*n*,*k*), *3≤n≤10, 0≤k<n*. Oso txikia ez den *n*-rako ere, ezinbestekoak dira konputagailu bat eta programa informatiko egoki bat. (*n*,*k*)-taulari begira, problemari erantzuten dioten zenbakien arteko erlazio batzuk behatzen dira (3. atala).

3. Konbinatorian oinarritutako prozesu analitiko bat da. Testu klasikoetan agertzen den prozedurak probabilitateen kalkulua erabiltzen du eta formula bera lortzen da, behaketa-prozesuan lortutakoarekin erabat lotuta dagoena. Formulak aukera ematen du problemari zehaztasunez erantzuteko algoritmo azkar baten bitartez (4. atala).

4. Soluzio zehatzak ematen dira 5. atalean ohikoak ez diren bidetik, eta 6. atalean, aldiz, soluzioen zenbatespen aski onak ematen dira eredu linealak proposatuz.

Soluziobideak, prozesu analitikoarena izan ezik, matematika esperimentalei dagozkie. Horrekin esan nahi da konputagailu elektronikoaren erabilerari esker, eta emaitzen behaketaren bitartez (segidak, taulak, grafikoak, estatistikoak, ...), eredu edota erlazio berriak bilatzen direla problemaren objektu matematikoen artean (indukzioa), gero horien egokitasuna edo egia ukatzeko edo frogatzeko (dedukzioa) (ikusi [4] eta [5]).

7. atalean soluziobideei buruzko zenbait iruzkin azaltzen dira.

2. SIMULAZIO-PROZESUA

Problemaren simulazio bat da kutxatik txartelak banan-banan ateratzea, zoriz, eta $p_n(k), p_n^*$ eta k_n^* balioen zenbatespenak gauzatzea. Erabakitzailearen estrategia da *k* txartel (*0≤k<n*) automatikoki ateratzea, *k* txartel horiek baztertzea eta horien arteko zenbaki handiena erregistratzea (hausnarketarik ez), eta azken hau baino zenbaki handiagoa duen lehen txartela hautatzea (hausnarketa). Horrela, erabakitzailearen estrategia *k* geldiune horretan gauzatzen da.

Konputagailu bat eta R programazio-lengoaia (ikusi [6]) erabiliz, *n* jakin baterako *{1,2,...,n}* multzoaren permutazio bat zori hutsez sortu ondoren (permutazio guztiek gertatzeko probabilitate

berdina dutelarik), *k* geldiune bakoitzerako ($0 \leq k < n$) arrakasta ala porrota gertatzen den ebazten eta erregistratzen da, 2. taulan egin bezala.

Simulazio-prozesua hainbatetan eginaz ($N=200000$ permutazio simulatu, esate baterako), *n* eta *k* bakoitzerako ($0 \leq k < n$) arrakasten kopurua zenbatzen da. Arrakasten kopuruak *N*-rekin alderatuta (arrakasten maiztasun erlatiboa)$p_n(k)$zenbatesten du; hau da,$\widehat{p_n}(k)$.Gero,p_n^*zenbatesten da$\widehat{p_n}^* = max_{0 \leq k < n}(\widehat{p_n}(k),)$eta, azkenik, arrakasten maiztasun erlatibo maximoa ematen duen$\widehat{k_n}^*$geldiune hoberena zenbatesten da$\widehat{p_n}^* \equiv \widehat{p_n}(\widehat{k_n}^*)$.

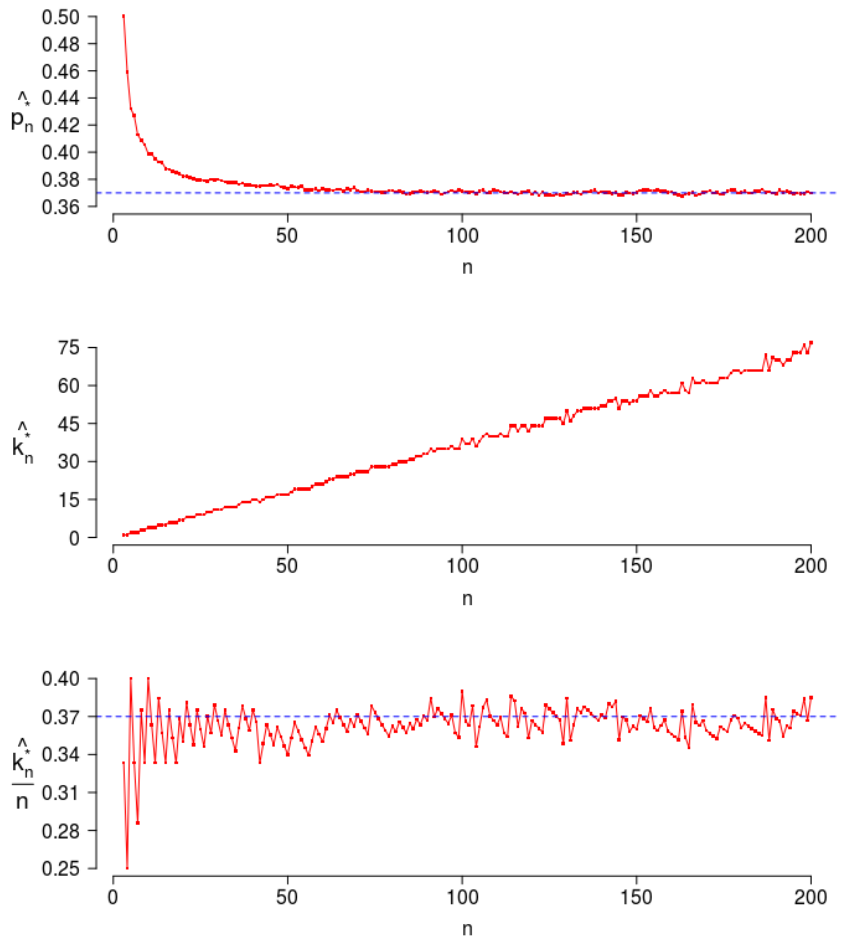
Simulazio-prozesua ($0 < n \leq 200$) tarte zabal bateko *n* bakoitzerako egiten bada, bi segida eratzen dira: geldiune hoberenena,$(\widehat{k_n}^*)_{0<n\leq 200}$,eta dagozkien maiztasun erlatibo maximoena,$(\widehat{p_n}^*)_{0<n\leq 200}$.Lortutako$\widehat{k_n}^*$zenbakiak berezko *n*-rekin proportzionalki lotzea bidezkoa dela ematen du:$\frac{\widehat{k_n}^*}{n}$.Izan ere, proportzio horrek *n* guztien emaitzak elkar alderatzen baititu. Dagozkion segida $\left(\frac{\widehat{k_n}^*}{n}\right)_{0<n\leq 200}$ da.

1. irudian, *n* handitzearekin lotutako hiru segiden jokabideak irudikatzen dituzten hiru grafikoak agertzen dira: $(\widehat{p_n}^*)_{0<n\leq 200}$, $(\widehat{k_n}^*)_{0<n\leq 200}$,eta $\left(\frac{\widehat{k_n}^*}{n}\right)_{0<n\leq 200}$.

$(\widehat{p_n}^*)_{0<n\leq 200}$segidaren jokaerak, oro har, beheranzko joera du, eta *0.37* balioaren inguruan kokatzen dela ematen du (ikusi 1. irudian goiko grafikoa). Baditu gorabeherak, eta horien berri aurreraxeago azalduko da.

$(\widehat{k_n}^*)_{0<n\leq 200}$segidaren jokaera, oro har, goranzkoa da (ikusi 1. irudian erdiko grafikoa), senak eskatzen duen legez. Dardartia da hau ere, eta horren zergatia aurreko segidarenarekin lotuta dago.

$\left(\frac{\widehat{k_n}^*}{n}\right)_{0<n\leq 200}$ segidaren jokaera (ikusi 1. irudian beheko grafikoa), agian *0.37* balioaren inguruan ere kokatzen dela behatzen da. Gorabehera handi xamarrak ditu, eta horien berri emango da berehala.



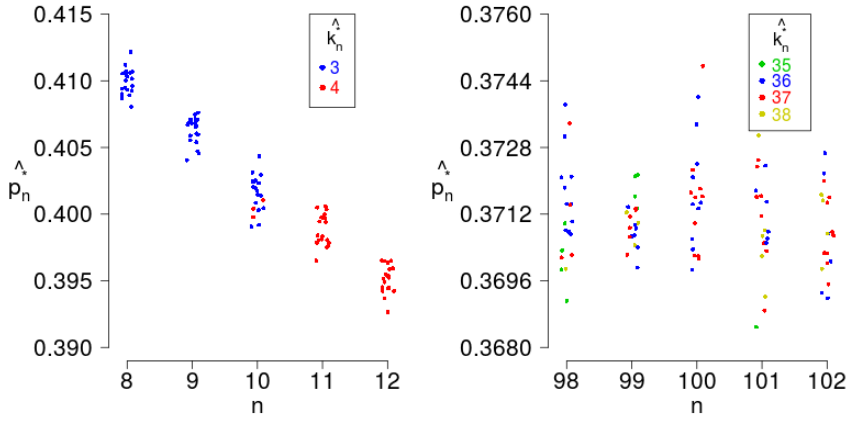
1. irudia. Simulazioaren emaitzak, *n* bakoitzeko (*3≤n≤200*) *N=200000* saio.

Gorabeherak zergatik eta nola gertatzen diren azaltzeko bi adibide alderatuko dira (*n=10* eta *n=100*):

- *n=10* . Permutazio-kopurua *10!*= 3628800 da, eta 200000 permutazio sortu izan dira zoriz. Beraz, ez dira permutazio guztiak aztertuak izan (izan ere, direnak baino 18 aldiz gutxiago); gainera, litekeena da permutazioren bat behin baino gehiagotan aztertua izana. 200000 permutazio zoriz 20 aldiz sortuz gero, emaitzak ez dira berberak izango (ikusi 2. irudian ezkerreko grafikoa), baina bai antzekoak; hau da, $\widehat{p_{10}}^*$guztiak *0.400*-en ingurukoak dira, eta dagozkien$\widehat{k_{10}}^*$balioak *3* edo *4* dira. Gauza bera egiten denean *n=9* eta *n=11* kasuetan, ikusten da$\widehat{p_9}^*$batzuetan txikiagoa izan daitekeela baino$\widehat{p_{10}}^*$,eta$\widehat{p_{11}}^*$batzuetan handiagoa$\widehat{p_{10}}^*$baino. Horregatik 1. irudian$\widehat{p_n}^*$probabilitate zenbatetsien kurbaren hasieran (*n=10*-ren inguruan)

koxkak agertzen dira. Geldiune hoberenari buruz ez du ematen ordena nahasten denik ($\widehat{k_9}^* = 3$aurretik eta$\widehat{k_{11}}^* = 4$atzetik).

- *n=100*. Permutazio-kopuru itzela da: 100! ≈ 9.332622·10^{157}. Bere inguruko *n=99 eta n=101* balioekin alderatzen direnean$\widehat{p_{100}}^*$eta$\widehat{k_{100}}^*$errepikatu egiten da *n=10* kasuaren egoera, baina aldakortasuna ez da berdina (ikusi 2. irudian eskuineko grafikoa; adi, eskalak ez dira berdinak):$\widehat{p_n}^*$probabilitate zenbatetsien ordenak nahasiagoak egon daitezke ordena naturalarekin alderatuta, baita$\widehat{k_n}^*$geldiune zenbatetsiek zehazten dituzten balioek ere. Koxkak maizago gerta daitezke eta handiagoak izan. Horren zergatia aurrerago azalduko da, *n*-ren ingurukop_n^*probabilitate maximoak oso berdintsuak baitira *n* handia denean.



2. irudia. Simulazioaren emaitzak, *n*-ren kasu batzuetarako. *N=200000* saio, 20 aldiz. Kasu bakoitzean koloreztatuta daude$\widehat{k_n}^*$balioen tamainak.

Dena dela, simulazio honek proposatzen duen soluzioa hauxe da: *n* jakin ez-txiki baterako, baztertu lehenengo *% 37*a, eta horiek baino hobea etorriko den lehena hautatu. Horrela jokatuz gero, arrakasta izateko probabilitatea *% 37*koa da gutxi gorabehera. Soluzio hori, probabilitateen kalkulua eta konbinatoria erabili gabe lortua, zuzena da praktikoki, baldin eta lehen aipatutako soluzio teorikoarekin alderatzen bada ($\lim_{n\to\infty} p_n^* = \frac{1}{e} \approx 0.3678794$).

3. BEHAKETA-PROZESUA

Atal honetan aurkezten diren erlazioek gaian sakontzen laguntzen dute. Horretarako, *n* bakoitzerako ($0<n\leq10$) permutazio guztiak sortzen dira ($n!$), eta horietako bakoitzean, *k* finkatuz gero, behatzen da balio handiena (*n*) harrapatua izan den ala ez (arrakasta ala porrota).

$0<n<5$ denean:

- $n=1$. 1 da permutazio bakarra, eta, beraz, geldiune bakarra *0* da ($k_1=0$ da hoberena) eta probabilitate maximoa *1* da.

- $n=2$. (1 2) eta (2 1) dira daitezkeen permutazioak, eta bi geldiune dira posibleak, *0* eta *1*, bakoitzak arrakasta izateko probabilitatea *0.5* duelarik ($k_2=0$ edo $k_2=1$ dira hoberenak).

- $n=3$. 2. taulan azaldu dudan bezala, 6 permutazioetatik $k=1$ denean 3tan hautatzen da handiena (**3**) (3/6 ≡ 0.50); beste bi kasuetan, $k=0$ eta $k=2$, 2 aldiz hautatzen da handiena (2/6 ≡ 0.33). Beraz, $k_3=1$ da hoberena.

- $n=4$. 24 permutazio izan daitezke. $k=0$ denean 6 arrakasta lor daitezke, $k=1$ denean 11, $k=2$ denean 10, eta $k=3$ denean 6. Beraz, $k_4=1$ da hoberena.

$5\leq n\leq10$ denean ($5!=120$, $10!=3628800$) ezinbestekoak dira konputagailu bat eta programa informatiko egoki bat (hala ere, $n>10$ denean nekez egin daiteke jarraian datorrena).

Horrela eratzen da $A(n,k)$ izeneko taula (ikusi 3. taula). Adibidez, $n=4$ denerako, $A(4,0) = 6$, $A(4,1) = 11$, $A(4,2) = 10$, $A(4,3) = 6$.

Taulan, planteatutako galderei erantzuten laguntzen dieten zenbakien arteko erlazio batzuk beha daitezke:

- $A(n,0) = (n-1)!$, $n>0$. Ulerbidea: iristen den lehenengoa ($k=0$) aukeratuz gero, $(n-1)!$ permutazio dago zenbaki handienarekin (*n*) hasten direnak.

- $A(n,n-1) = (n-1)!$, $n>0$. Ulerbidea: azkena aukeratuz gero, $(n-1)!$ permutazio dago zenbaki handienarekin (*n*) bukatzen direnak. Beraz, $A(n,n-1) = A(n,0)$, $n>0$.

3. taula. *A(n,k)* arrakasta kopurua

n \ *k*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	*1*									
2	*1*	*1*								
3	*2*	*3*	*2*							
4	*6*	*11*	*10*	*6*						
5	*24*	*50*	*52*	*42*	*24*					
6	*120*	*274*	*308*	*282*	*216*	*120*				
7	*720*	*1764*	*2088*	*2052*	*1776*	*1320*	*720*			
8	*5040*	*13068*	*16056*	*16524*	*15312*	*12840*	*9360*	*5040*		
9	*40320*	*109584*	*138528*	*147312*	*142656*	*127920*	*105120*	*75600*	*40320*	
10	*362880*	*1026576*	*1327392*	*1446768*	*1445184*	*1352880*	*1188000*	*962640*	*685440*	*362880*

3. taulan erregulartasunen bat bilatzearren, eragiketa batzuk egin daitezke. Lehendabizikoa, hain zuzen, aipatutako *A(n,n-1) = (n-1)!* erlazioaren ondoren beste zutabeekin egin daitekeena: $B(n,k) = \frac{A(n,k)}{k!}$ (ikusi 4. taula).

4. taula. $B(n,k) = \frac{A(n,k)}{k!}$

n \ *k*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	*1*									
2	*1*	*1*								
3	*2*	*3*	*1*							
4	*6*	*11*	*5*	*1*						
5	*24*	*50*	*26*	*7*	*1*					
6	*120*	*274*	*154*	*47*	*9*	*1*				
7	*720*	*1764*	*1044*	*342*	*74*	*11*	*1*			
8	*5040*	*13068*	*8028*	*2754*	*638*	*107*	*13*	*1*		
9	*40320*	*109584*	*69264*	*24552*	*5944*	*1066*	*146*	*15*	*1*	
10	*362880*	*1026576*	*663696*	*241128*	*60216*	*11274*	*1650*	*191*	*17*	*1*

Bigarren eragiketa 4. taulako *B(n, n-2)* diagonala behatzeari dagokio (*2* unitateko aldea): $C(n,k) = B(n+1,k+1) - B(n,k)$(ikusi 5. taula).

5. taula. *C(n,k) = B(n+1,k+1) - B(n,k)*

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0								
2	2	0							
3	9	2	0						
4	44	15	2	0					
5	250	104	21	2	0				
6	1644	770	188	27	2	0			
7	12348	6264	1710	296	33	2	0		
8	104544	56196	16524	3190	428	39	2	0	
9	986256	554112	171864	35664	5330	584	45	2	0

Hirugarren eragiketa 5. taulako C*(n, n-3)* diagonala behatzeari dagokio (*6* unitateko aldea): $D(n,k) = \frac{C(n,k)}{(n-k)}$(ikusi 6. taula).

6. taula. $D(n,k) = \frac{C(n,k)}{(n-k)}$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0								
2	1	0							
3	3	1	0						
4	11	5	1	0					
5	50	26	7	1	0				
6	274	154	47	9	1	0			
7	1764	1044	342	74	11	1	0		
8	13068	8028	2754	638	107	13	1	0	
9	109584	62964	24552	5944	1066	146	15	1	0

6. taularen zenbakiak lerroka irakurrita Stirling-en zenbaki orokortuak dira (ikusi [7]). Gainera, 6. taula 3. taula lekualdatua da: *D(n,k) = B(n,k+1)*.

Beraz, atzetik aurrera egin daiteke 1. taulan erlazio bat aurkitu arte: $C(n,k) = (n-k) \cdot D(n,k), C(n,k) = (n-k) \cdot B(n,k+1)$, eta $B(n+1,k+1) - B(n,k) = (n-k) \cdot B(n,k+1)$. Azkenik: $\frac{A(n+1,k+1)}{(k+1)!} - \frac{A(n,k)}{k!} = (n-k) \cdot \frac{A(n,k+1)}{(k+1)!}$,edo formula errekurtsibo hau:

$$A(n+1, k+1) = (k+1)\cdot A(n, k) + (n-k)\cdot A(n, k+1),\ 0<k<n,\ A(n, 0) = (n-1)!\ ,\ n>0 \qquad (1)$$

Adibidez, $A(5,3) = (2+1)\cdot A(4,2) + (4-2)\cdot A(4,3) = 3\cdot 10+2\cdot 6 = 42$. Formula honek ulerbide bat merezi du. *{2, 3, 4, 5}* multzoaren permutazioak (handiena *5* izanik), eta *k=2* eta *k=3* kasuetan arrakasta ematen duten permutazioak kontuan hartuta (hurrenez hurren, *A(4, 2)* eta *A(4, 3)* kopuruak ematen dituztenak), *A(5, 3)* gerta dadin, **1** digitua (**berdez**) haietan txerta daitezkeen kasuak arrazoitu eta zenbatu ditut (ikusi 7. taula): *3* toki posibleetan **1** digitua *A(4,2)*-ko kasu bakoitzean, eta *2* toki posibleetan **1**-ekoa *A(4, 3)*-ko kasu bakoitzean.

7. taula. *A(5, 3) = 42*

A(4, 2) = 10	*A(4, 2) = 10*	*A(4, 3) = 6*	*A(4, 3) = 6*
Permutazio arrakastatsuak	Non txertatu **1** digitu berria	Permutazio arrakastatsuak	Non txertatu **1** digitu berria
2 3*5 4	**1** 2 **1** 3 **1***5 4	2 3 4*5	2 3 4*1 5 1
3 2*5 4	**1** 3 **1** 2 **1***5 4	2 4 3*5	2 4 3*1 5 1
2 4*5 3	**1** 2 **1** 4 **1***5 3	3 2 4*5	3 2 4*1 5 1
2 4*3 5	**1** 2 **1** 4 **1***3 5	3 4 2*5	3 4 2*1 5 1
4 2*5 3	**1** 4 **1** 2 **1***5 3	4 2 3*5	4 2 3*1 5 1
4 2*3 5	**1** 4 **1** 2 **1***3 5	4 3 2*5	4 3 2*1 5 1
3 4*5 2	**1** 3 **1** 4 **1***5 2		
3 4*2 5	**1** 3 **1** 4 **1***2 5		
4 3*5 2	**1** 4 **1** 3 **1***5 2		
4 3*2 5	**1** 4 **1** 3 **1***2 5		

Oro har, *n* eta *k* emanda, erabakitze arauari jarraiki, edozein permutazio bi zatitan bana daiteke, hasierako *k* luzerakoa alde batetik, eta bukaerako *(n-k)* luzerakoa bestetik. Permutazio arrakastatsuen kopurua zenbatzeko kontuan hartu behar da handiena ezin dela egon hasierako zatian, *(n-k)* luzerako zatian baizik.

(n+1) eta *(k+1)* kasuaren arrakasta-kopurua zenbatzeko, *{2, 3, 4, ... , n, n+1}* multzoko permutazio arrakastatsuei erreparatzen zaie, eta *A(n, k)* eta *A(n, k+1)* arrakasta kopuruak kalkulatzen. Zehazki, begiratu nola txertatu *n* digitu dituen *{2, 3, 4, ... , n, n+1}* multzoaren permutazio arrakastatsuetan *n* digitu horiek baino txikiagoa den digitu berri bat (**1**-ekoa):

- *A(n, k)* arrakasta-permutazio kasuen *k* luzerako zatian, *(k+1)* izan dadin txikiena txertatua izateko *(k+1)* zulo daude (hasierakoa, bukaerakoa eta tartekoak): *(k+1)*, guztira.

- *A(n, k+1)* arrakasta-permutazio kasuen *(n-(k+1))* luzerako zatian, txikiena txertatua izateko *((n-(k+1)+1)* zulo ditu (hasierakoa, bukaerakoa eta tartekoak): *(n-k)*, guztira.

Hortik (1) formula: $A(n+1, k+1) = (k+1)\cdot A(n, k) + (n-k)\cdot A(n, k+1)$.

(1) formula errekurtsiboak aukera ematen du 3. taula zabaltzeko, baina zabaltze handi bat nekez egin daiteke, hain justu, *A(n+1, k+1)* terminoaren aurreko terminoen balioak kalkulatu eta gorde egin behar direlako. Hori konputazionalki garestia da, eta hurrengo atalean 3. taula zabaltzeko beste formula bat azaltzen da, esplizitua dena eta, beraz, aurreko terminoen mende ez dagoena.

Helburua *n* zehatz bakoitzerako p_n^* kalkulatzea eta k_n^* bilatzea denez, *A(n,k)* zenbakiak bitartekoak izan daitezke horien kalkulua egiteko. *A(n,k)* bakoitza kalkulatzeko *n!* permutazio hartu direnez kontuan, arrakasta izateko probabilitatea $p_n(k) = \frac{A(n,k)}{n!}$ da. Horrela 3. taula 8. taula bihur daiteke.

8. taula. $p_n(k)$ arrakasta-probabilitateak. Gorriz *n* bakoitzerako probabilitate maximoa

k / *n*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	*1.0000000*									
2	*0.5000000*	*0.5000000*								
3	*0.3333333*	*0.5000000*	*0.3333333*							
4	*0.2500000*	*0.4583333*	*0.4166667*	*0.2500000*						
5	*0.2000000*	*0.4166667*	*0.4333333*	*0.3500000*	*0.2000000*					
6	*0.1666667*	*0.3805556*	*0.4277778*	*0.3916667*	*0.3000000*	*0.1666667*				
7	*0.1428571*	*0.3500000*	*0.4142857*	*0.4071429*	*0.3523810*	*0.2619048*	*0.1428571*			
8	*0.1250000*	*0.3241071*	*0.3982143*	*0.4098214*	*0.3797619*	*0.3184524*	*0.2321429*	*0.1250000*		
9	*0.1111111*	*0.3019841*	*0.3817460*	*0.4059524*	*0.3931217*	*0.3525132*	*0.2896825*	*0.2083333*	*0.1111111*	
10	*0.1000000*	*0.2828968*	*0.3657937*	*0.3986905*	*0.3982540*	*0.3728175*	*0.3273810*	*0.2652778*	*0.1888889*	*0.1000000*

(1) formularen bitartez: $\frac{A(n+1,k+1)}{(n+1)!} = \frac{k+1}{n+1}\frac{A(n,k)}{n!} + \frac{n-k}{n+1}\frac{A(n,k+1)}{n!}$ edo

$$p_{n+1}(k+1) = \frac{k+1}{n+1}p_n(k) + \frac{n-k}{n+1}p_n(k+1), n > 0, 0 \le k < (n-1), p_n(0) = p_n(n-1) = \frac{1}{n}$$

(2)

Beraz, kontuan hartuta *(n-k)* ≡ *(n+1)-(k+1)* dela, probabilitate bakoitza ($p_{n+1}(k+1)$) aurreko lerroko bi ondoko probabilitateen ($p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$) *batezbesteko haztatua* da.

Probabilitateen kalkuluaren ikuspuntutik ere badago (2) formula ulertzeko modu bat. Horretarako, alde batetik, *1* digitua hartzen da kontuan, eta, bestetik, *{2, 3, ... ,n, n+1}* multzoaren permutazio arrakastatsuak. Formula ulertzeko, *1* digitua permutazio arrakastatsu horietan nola txerta daitekeen

aztertu behar da. Bi modu daude: *1* digitua permutazio arrakastatsu baten lehen *(k+1)* digituen artean txertatu$\frac{k+1}{n+1}$probabilitatearekin, edo permutazio arrakastatsu horren gainerako *((n+1)-(k+1))* digituen artean txertatu$\frac{(n+1)-(k+1)}{n+1}$probabilitatearekin (ikusi 7. taula).

Horrez gain, 8. taulan honako hauek beha daitezke:

- Lerro bakoitzean zenbaki gorritan adierazten diren probabilitate maximoek,p_n^*,taularen *gailurra* osatzen dute. Zenbaki gorri bati dagokion zutabeak adierazten du zein denk_n^*balioa.

- *Gailurra*ren segida beheranzkoa da, kasu batean izan ezik: *n=2* eta *n=3* kasuen arteko segida ez da erabat beheranzkoa.

- Lerro bakoitzeko probabilitate-segida (*n>0*) goranzkoa da probabilitate maximo gorriraino, eta gero beheranzkoa, kasu batean izan ezik. Izan ere, *n=2* kasuaren probabilitate maximoa,$p_2^* = 0.5$, bi *k* desberdinetarako lortzen da:$k_2^* = 0$eta$k_2^* = 1$.

- Zutabe bakoitzeko probabilitate-segida (*k≥0*) goranzkoa da lerro bateko probabilitate maximo gorriraino, eta gero beheranzkoa.

4. BIDE ANALITIKOA

Badago beste bide bat problemaren soluzioa bilatzeko, eta hori ere arrazoiketa konbinatorioan oinarritzen da; nolabait esateko, analitikoa da. Jo dezagun *A(7,2)* kalkulatu nahi dela, hau da, 7*!* (≡ *5040*) permutazioetatik lehenengo *2* osagaiak baztertuz gero (*k=2*), arrakastatsuak zenbat diren adierazten duena.

Adibidea: (5 2 * 4 1 7 3 6) permutazioa; 7a da handiena, bosgarren kokalekuan dago eta arrakasta lortuko da; ezaugarri hori duten permutazio kopurua zenbatzen da. Aurrerago, 7a beste kokaleku batzuetan dagoenerako kalkuluak egiten dira, eta denak batzen dira.

Emandako adibidean, 7aren aurretik lau osagai daude (5a, 2a, 4a, eta 1a), eta atzetik bi (3a eta 6a). Azterketa konbinatorio honetan bi zatiak bereizten dira:

- Bi dira atzeko osagaiak (3a eta 6a) eta bion edozein ordena da onargarri: beraz, *2!*. Baina 7a bosgarren kokalekuan egonda atzekoak 3a eta 6a izan ordez *6* zenbakien (1, 2, 3, 4, 5, 6) arteko edozein *2*ko aldaketa edo bariazio (*V*) izan daiteke. Guztira: *V(6,2) = 6!/(6-2)!* modu (*30* modu).

- Behin 7aren atzeko zenbakiak erabaki ondoren (3a eta 6a), 7a bosgarren kokalekuan egonda, aurrekoak ere erabakitzen dira (5a, 2a, 4a, 1a). Aurrekoen artean egin daitezkeen permutazioak ez dira

lau elementuen permutazio guztiak; izan ere, 5a (1, 2, 4 eta 5en artean handiena dena) hirugarren edo laugarren kokalekuan ezarriz gero (*k=2*), porrota izango litzateke. Beraz, 5ak (lau horien artean handiena denak) lehenengo bi kokalekuetako batean (*k=2*) egon behar du, eta beste hirurak edozein ordenan egonda ere arrakasta lortuko da: *2·3!* modu (*12* modu).

- Beraz, 7a bosgarren kokalekuan duten eta arrakasta duten permutazioak, bere aurrekoen eta atzekoen permutazioak bereiziz *(6!/(6-2)!)·(2·3!)* permutazio dira (*360* modu).

Arrakasta lortzearren 7a edozein kokalekuan egon daiteke, lehenengo bi kokalekuetan ezik, arestian esan bezala. Aurreko arrazoibide berbera erabil daiteke 7a edozein kokalekuan dagoenean:

3.ean: *(6!/(6-4)!)·(2·1!)* = *720*,
4.ean: *(6!/(6-3)!)·(2·2!)* = *480*,
5.ean: *(6!/(6-2)!)·(2·3!)* = *360*,
6.ean: *(6!/(6-1)!)·(2·4!)* = *288*, eta
7.ean: *(6!/(6-0)!)·(2·5!)* = *240*.
Guztira: *A(7,2)* = *2088* permutazio.

Orokorrean, permutazioa *n* tamainakoa da, permutazioaren lehenengo *k* osagaiak baztertu egiten dira, eta osagai handienaren *i.* kokalekua da; arrakasta kopurua honako hau da:

$$\frac{(n-1)!}{((n-1)-(n-i))!}\cdot(k\cdot(i-2)!)=\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\cdot(k\cdot(i-2)!)=k\cdot\frac{(n-1)!}{(i-1)}.$$

Kokaleku guztietakoak (*i>k*) batuz gero: $A(n,k)=(n-1)!\cdot k\cdot\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-1}$.

Kontuan hartuta $\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{n-1}=\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}$dela, *A(n,k)* beste era honetan adieraz daiteke:

$$A(n,k)=(n-1)!\cdot k\cdot\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i},n>0,0<k<n,A(n,0)=(n-1)!.\ (3)$$

Formula esplizitu honekin ere 3. ataleko 3. taula osa daiteke.

Probabilitateen ikuspuntutik,$p_n(k)=\frac{A(n,k)}{n!}$. Beraz: $p_n(k)=\frac{(n-1)!}{n!}\cdot k\cdot\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}$edo

$$p_n(k)=\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i},n>0,0<k<n,p_n(0)=\frac{1}{n}.\ (4)$$

Formula esplizitu horrekin 8. taula ere osa daiteke, baita askoz zabalagoa ere. Are gehiago, esplizitua izateagatik konputazionalki merkeagoa da (2) formula errekurtsiboa baino. Formula

errekurtsiboaren kasuan aurreko termino guztiak gogoratu behar dira, baina esplizituan ez, kasuaren balioa zuzenean ematen baita beste edozein terminori deitu gabe. Bestela esanda, formula esplizitua denbora jakin batean errekurtsiboa baino urrutiago doa (*n*-ren balio handiagoetara heltzen da, alegia); hau da, azkarragoa da eta, gainera, konputagailuaren memoria gutxiago behar du.

(4) formula geldiune hoberenaren problemari buruzko testu ia guztietan azaltzen dena da. Konbinatoriaren bidetik aurkeztu baino probabilitateen kalkuluaren bitartez aurkeztu ohi da *probabilitate osoaren teorema* edo araua erabiliz. *{1, 2, ... , n}* multzoa emanda, permutazio guztiak eta *k* geldiunea ($0 \leq k < n$) hartzen dira kontuan. Elementu handienaren (*n* zenbakia) kokaleku desberdinak bereizten dira ($i=1,2,...,n$), eta bakoitzaren baitan arrakasta lortzen den ala ez aztertzen da. Notazio aldetik, bedi $H_i \equiv$ "Elementu handienaren kokalekua *i*.a izatea" ($i=1,2,...,n$). Horrela, $\{H_1,H_2,...,H_n\}$ gertaera familiak permutazio guztien multzoaren (Ω) partiketa bat osatzen du:$H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$eta$H_i \cap H_j = \emptyset, \forall i \neq j$.Bedi $A \equiv$ "Arrakasta lortzea":

$p_n(k) \equiv Pr(A) = Pr(\Omega \cap A) = Pr\big((H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) \cap A\big) = \sum_{i=1}^{n} Pr(H_i \cap A)$,
orduan:$p_n(k) = \sum_{i=1}^{n} Pr(H_i) \cdot Pr(A \mid H_i)$.

Handiena *i.* kokaleku jakin batean gertatzeko probabilitatea, $Pr(H_i)$,$\frac{1}{n}$da. Handiena *i.*ean baldin badago eta $i \leq k$ bada, porrota izango da: $Pr(A|H_i) = 0$. Bestela ($i>k$), arrakasta izango da aurreko $(i-1)$ kokalekuen arteko handiena lehenengo *k* elementuen artean dagoenean: $Pr(A|H_i) = \frac{k}{i-1}$.

Bi gai horiek biderkatuz eta *i* guztientzat batuz gero: $p_n(k) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{i-1}$.Hau da, (4) formula bera: $p_n(k) = \frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}, p_n(0) = \frac{1}{n}, n > 0$gehitzen bazaio.

(4) formula bi bidetatik lortu da, konbinatoriarena eta probabilitateen kalkuluarena. Bigarrena motzagoa da, baina probabilitate osoaren teorema ezagutu behar da.

4.1. Bi probabilitate-formulen arteko baliokidetasuna

Bi bide desberdinetatik ondorioztatuko (2) eta (4) formulak baliokideak dira, bata bestearen ondorio delako. Gogoratu:

(2):$p_{n+1}(k+1)=\frac{k+1}{n+1}p_n(k)+\frac{n-k}{n+1}p_n(k+1), n>0, 0\le k<(n-1), p_n(0)=p_n(n-1)=\frac{1}{n}$

(4):$p_n(k)=\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}, n>0, 0<k<n, p_n(0)=\frac{1}{n}$

- (4) ⇒ (2). Horretarako nahikoa da kontuan hartzea (4) formularen araberako $p_{n+1}(k+1)$ probabilitatea, eta aljebraikoki garatzea (2) formularen araberako $p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$ probabilitateak uztartzeko:

$$p_{n+1}(k+1)=\frac{k+1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{k+1}{n+1}\left\{\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n}\right\}=\frac{k+1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{k+1}{n+1}\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{k+1}{n+1}\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{k+1}{n+1}\frac{k}{n}\frac{1}{k}=$$
$$=\frac{k+1}{n+1}\frac{k}{n}\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{k+1}{n+1}\frac{n-k}{n}\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{k+1}{n+1}\frac{k}{n}\frac{1}{k}=$$
$$=\frac{k+1}{n+1}\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{n-k}{n+1}\frac{k+1}{n}\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{1}{i}=\frac{k+1}{n+1}p_n(k)+\frac{n-k}{n+1}p_n(k+1)$$

Gainera, (4) formularen arabera $p_n(0)=\frac{1}{n}$eta $p_n(n-1)=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$.

- (2) ⇒ (4). (2) formula erabiliz (4) formula indukzio matematikoz lor daiteke. Definizioz $p_1(0)=1$ eta $p_2(0)=\frac{1}{2}$ dira, eta $p_2(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}$berdintzak (4) formula betetzen du. $p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$ egiazkotzat hartuta ($0<k<(n-1)$), nahikoa da (2) formularen araberako $p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$ probabilitateak ezartzea, (2) formularen arabera batzea, eta aljebraikoki uztartzea (4) formulara iristeko. Azken finean, aurreko bidearen alderantzizkoa da.

$$p_n(k)=\frac{k}{n}p_{n-1}(k-1)+\frac{n-k}{n}p_{n-1}(k)=\frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}\sum_{i=k-1}^{n-2}\frac{1}{i}+\frac{n-k}{n}\frac{k}{n-1}\sum_{i=k}^{n-2}\frac{1}{i}=$$
$$=\frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}\left(\sum_{i=k}^{n-2}\frac{1}{i}+\frac{1}{k-1}\right)+\frac{n-k}{n}\frac{k}{n-1}\sum_{i=k}^{n-2}\frac{1}{i}=\frac{k}{n}\left(\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n-1}\right)\sum_{i=k}^{n-2}\frac{1}{i}+\frac{k}{n}\frac{1}{n-1}=$$
$$=\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-2}\frac{1}{i}+\frac{1}{n-1}=\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i}, n>1, 0<k<(n-1).$$

$k=0$ denean,$p_n(0)=\frac{1}{n}$(2) formulak dioen legez.

k=*n-1* denean,$p_n(n-1) = \frac{1}{n}$(2) formulak dioen legez; beraz, (4) formularekin bat dator: $p_n(n-1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$.

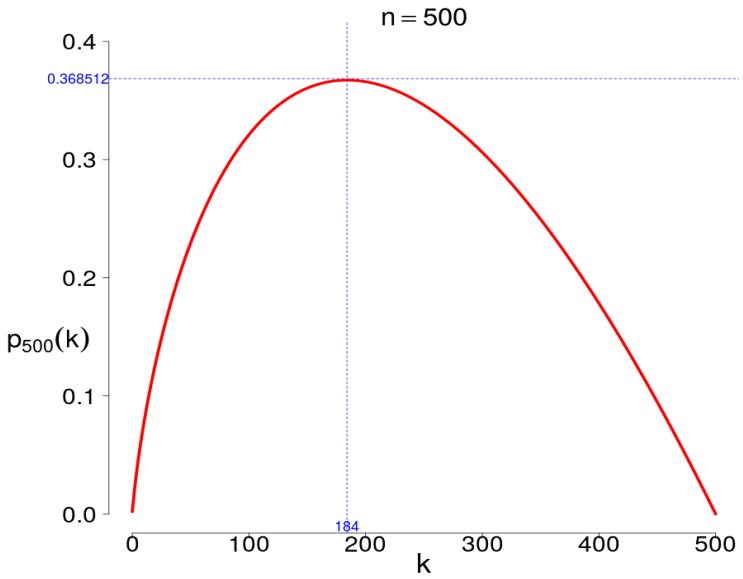
5. SOLUZIOA. BALIO ZEHATZAK

Esan bezala, bi galdera ebatzi behar dira: *n* bakoitzerako zein den arrakasta lortzeko probabilitaterik maximoa,p_n^*,eta dagokion geldiune hoberena,k_n^*.

8. taulan gorriz adierazten da *n* bakoitzerako erantzuna (*0<n≤10*). Programazio-lengoaia informatiko baten bitartez (4) formulak probabilitateen 8. taula zabaltzea ahalbideratzen du. Esan nahi da, probabilitateen kalkulua *n≤10*-era arte mugatu beharrean, probabilitateak 'nahi edo ahal den' *n*-ra arte kalkula daitezkeela, eta, beraz, probabilitate maximoak eta geldiune hoberenak ere bai. Baina, aurrerago azalduko den bezala, badago bide azkarrago bat probabilitate maximoak eta geldiune hoberenak erabakitzeko.

3. irudian ikus daiteke *n=500* kasurako (antzekoa beste edozein *n*-rako) nolako jokabidea duten probabilitateek *k*-ren arabera (itxuraz jarraitua da, baina ez, puntuz-puntu dago marraztatuta). Kasu honetan,$k_{500}^* = 184$balioak ematen du probabilitate maximoa *bakarra*:$p_{500}^* = 0.368512205$.

Balio horren ingurukoak oso antzekoak dira (*k=175*-tik *k=195*-era gertatzen diren probabilitateak ez dira *0.36805* baino txikiagoak). 8. taulan ere behatzen da $p_{10}(3)$ eta $p_{10}(4)$ oso antzekoak direla. Bide batez, hausnarketa bat egin daiteke 2. ataleko simulazioan lortutako emaitzei buruz: baliteke maiztasun erlatibo maximoak_n^*balioaren inguruko beste *k* batean gertatzea. Ondorioz, 1. eta 2. irudietako 'irregulartasunak' gertatzen dira.



3. irudia. $p_{500}(k)$ probabilitatearen jokaera, $0 \leq k < 500$.

$n=500$ kasuan gertatutakoa, lehenengo goranzkoa eta gero beheranzkoa, maximo bakarrarekin, orokorrean aztertu behar da. Horretarako ohar daiteke (4) formulan $p_n(k)$-k bi biderkatzaile dituela: $\frac{k}{n}$ eta $\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$. Lehenengoa, $\frac{k}{n}$ proportzio bat da, $0<k<n$ baita, eta n finkatuz gero goranzkoa da k balioaren handitzearekin batera. Bigarrena, $\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$, ordea, beheranzkoa da k-balioaren handitzearekin batera. Aztertu beharko da bien biderkadurak nolako jokaera duen.

3. irudian ikus daitekeenez $p_{500}(k)$ funtzioak maximo bakarra du: $p_{500}(184)=0.368512205$; nolabait esateko, *184*ra arte gailentzen zaio $\frac{k}{n}$ biderkatzailea $\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$ biderkatzaileari, eta gero alderantziz. Maximoaren bakartasun hori orokorra da, eta hori frogatzeko oinarritzat hartuko da *serie harmonikoa*: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$(ikusi [8]).

Serie harmonikoa dibergentea da; hau da, batura infinituaren limitea infinitua da. Izan bitez $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, n > 0$serie harmonikoaren batura partzialak; *zenbaki harmonikoak* esaten zaie: $(H_n)_{n>0}$(ikusi [7, 8]). Definizioan ikusten denez, $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}, H_1 = 1, n > 0$. Segida honen lehen gaiak ($0<n\leq 10^6$) kalkulatzea erraza da konputagailu batean, eta azkar egin daiteke. Ondorioz, baldin $n'>n$ bada, orduan $H_{n'} > H_n$,berezki $H_n > H_k, 0 < k < n$;beraz, $(H_n)_{n>0}$segida goranzkoa da. Gainera, goranzko jokabide hori logaritmikoa da. Izan ere, n handia denean $H_n \approx ln(n) + \gamma$, non $\gamma =$

$\lim_{n\to\infty}\left(H_n - ln(n)\right)$ *Euler-en konstantea* den,$\gamma \approx 0.577216$;zehatzago izanda, $H_n = ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\epsilon_n}{120n^4}, 0 < \epsilon_n < 1$(ikusi [8] eta [9]). Kontuan hartu behar da$H_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}, n > 0$eta $ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x}dx, n > 1$direla, eta kalkulu horiek burutzeko kalkulu integrala erabiltzen dela.

Aztergai diren probabilitateak horrela adierazten dira zenbaki harmonikoen bitartez, kontuan hartuta $\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i} = (H_{n-1} - H_{k-1}), n > 2, 1 < k < n$dela:

$$p_n(k) = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1}), n > 2, 1 < k < n, p_n(1) = \frac{1}{n}H_{n-1}, n > 1, p_n(0) = \frac{1}{n!}, n > 0. (5)$$

Formula honetan$\frac{k}{n}$biderkatzailea goranzkoa da eta$(H_{n-1} - H_{k-1})$biderkatzailea beheranzkoa, *k* balioaren handitzearen arabera.

Arestian esan bezala, 8. taulan eta 3. irudian beha daitekeenez,p_n^*etak_n^*bakarrak dira *n* bakoitzerako, baina emaitza hau orokorrean frogatu behar da. Lerro bakoitza (*0<n≤10*) goranzkoa da probabilitate maximoraino eta gero beheranzkoa, *n=1* eta *n=2* kasuetan izan ezik (*n=1* denean $p_1(0)=1$ da balio bakarra, eta *n=2* denean $p_2(0)=p_2(1)=0.5$ bi balio besterik ez dira). *n=3* denean (*0≤k<3*) goranzkoa da hasieran eta beheranzkoa bukaeran:

$$p_3(0) - p_3(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}H_2 = -\frac{1}{3}(H_2 - 1) = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - 1\right) < 0,$$
$$p_3(1) - p_3(2) = \frac{1}{3}H_2 - \frac{2}{3}(H_2 - H_1) = \frac{1}{3}\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} > 0.$$

Hortaz, $p_3^* = p_3(1)$da probabilitate maximoa, eta$k_3^* = 1$geldiune hoberena.

Oro har (*n>3*), (*0≤k<n*) balio-tartearen bi muturretan goranzko jokabidea eta beheranzkoa gertatzen dira, hurrenez-hurren:

- *k=0* denean goranzkoa da: $p_n(0) - p_n(1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}H_{n-1} = -\frac{1}{n}(H_{n-1} - 1) < 0, n > 3.$

- *k=n-1* denean beheranzkoa da:

$$p_n(n-2)-p_n(n-1)=\frac{n-2}{n}(H_{n-1}-H_{n-3})-\frac{1}{n}=\frac{n-2}{n}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right)-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}>0, n>3.$$

Goranzko eta beheranzko joerak daudenez (*n*>*3*), gutxienez probabilitate bat dago,p_n^*, k_n^*geldiune jakin bati dagokiona, eta$p_n(k_n^*-1)<p_n(k_n^*)$eta$p_n(k_n^*)>p_n(k_n^*+1)$desberdintzak ematen dituena (ezin da berdintzarik egon (6) formulan ikusiko den bezala). Bi desberdintza horiek zehatzago islatzeko, ondoz ondoko bi probabilitateren arteko aldea modu erosoagoan ezar daiteke:

$$p_n(k+1)=\frac{k+1}{n}(H_{n-1}-H_k)=\frac{k}{n}\left(H_{n-1}-H_{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n}(H_{n-1}-H_k)=$$
$$=p_n(k)-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(H_{n-1}-H_k)=p_n(k)+\frac{1}{n}(H_{n-1}-H_k-1).$$

$$p_n(k+1)-p_n(k)=\tfrac{1}{n}(H_{n-1}-H_k-1), n>3, 0<k<(n-1). \quad (6)$$

Formula honek geldiune hoberenak,k_n^*, bete behar dituen ezinbesteko bi desberdintzak zehazteko balio du:

- k_n^*balioaren aurretik probabilitatea goranzkoa izan dadin$\left(p_n(k_n^*-1)<p_n(k_n^*)\right)$:

$0>p_n(k_n^*-1)-p_n(k_n^*)=-\left(p_n(k_n^*)-p_n(k_n^*-1)\right)=-\frac{1}{n}\left(H_{n-1}-H_{k_n^*-1}-1\right)$;hau da, $H_{k_n^*-1}<H_{n-1}-1$.

- k_n^*balioaren atzetik probabilitatea beheranzkoa izan dadin ($\left(p_n(k_n^*)>p_n(k_n^*+1)\right)$:

$0<p_n(k_n^*+1)-p_n(k_n^*)=\frac{1}{n}\left(H_{n-1}-H_{k_n^*}-1\right)<0$;hau da,$H_{k_n^*}>H_{n-1}-1$.

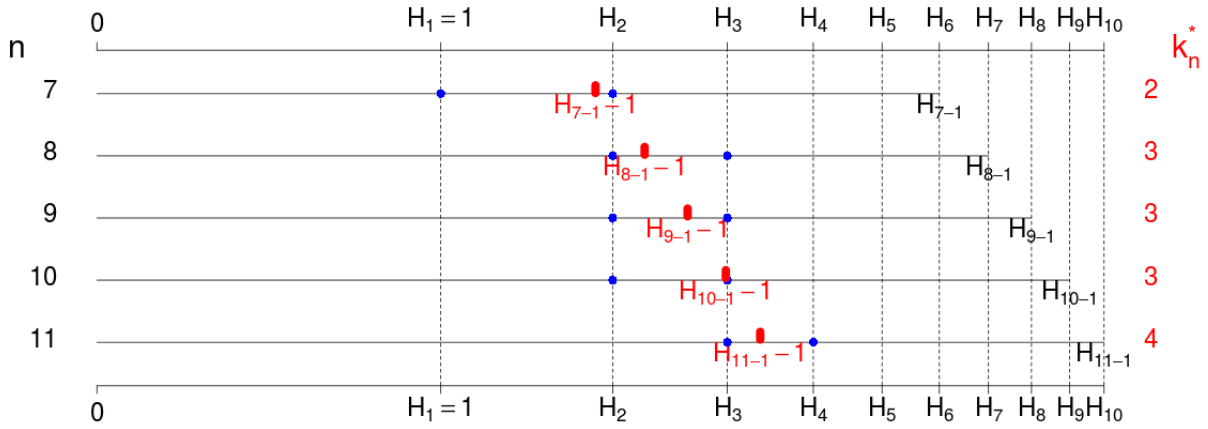
Bi desberdintzak elkartuta,k_n^*geldiune hoberena izateko baldintza soilagoak lortzen dira:

$$H_{k_n^*-1}<(H_{n-1}-1)<H_{k_n^*}, n>3, 1<k_n^*<n. \quad (7)$$

Geldiune hoberena,k_n^*,bakarra da, (7) formulan ezin baita sartu$(H_n)_{n>0}$segidako beste terminorik:$H_{k_n^*-1}<(H_{n-1}-1)<H_{k_n^*-1}+\frac{1}{k_n^*}, 1<k_n^*<n.$

8. taulan $1 \le n \le 10$ kasuetarako $(k_n^*)_{n>0}$ segidako hasierako balioak agertzen dira: $k_n^* = 0,0 edo 1,1,1,2,2,2,3,3,3$. Hasierako 10^3 terminoak esplizituki ezagutu daitezke (ikusi [7]). $(k_n^*)_{n>0}$ segidako balio gehiago zehaztu daitezke (7) formularen bidez ($0<n\le10^5$ artikulu honen kasuan).

4. irudiak (7) formularen jokaera erakusten du kasu jakin batzuetan.



4. irudia. k_n^* finkatzeko prozedura: $H_{k_n^*-1} < (H_{n-1} - 1) < H_{k_n^*}$.

(7) formulak $(k_n^*)_{n>0}$ segida osatzeko algoritmo azkar bat iradokitzen du: mugitu (H_{n-1}-1)-ren marratxo gorria n-rekin batera, eta ohartu $(H_n)_{n>0}$ segidako zein termino den marratxoaren eskuinean geratzen den lehena; horren azpiindizea da k_n^* balioa. 1. algoritmoan azaltzen da R lengoaian (ikusi [6]) idatzitako programa bat.

1. algoritmoa. k_n^* (`k.hoberena`) kalkulatzeko programa

```
N <- 10^6
harmonikoa <- c(1/1, 1/1 + 1/2)
k.hoberena   <- c(0,1)
k.hoberena.0 <- k.hoberena[2]
for(n in 3:N){
  harmonikoa[n] <- harmonikoa[n-1] + 1/n
  if((harmonikoa[n-1]-1) > harmonikoa[k.hoberena.0])
                k.hoberena.0 <- k.hoberena.0 + 1
  k.hoberena <- c(k.hoberena, k.hoberena.0)
  }
k.hoberena
```

(7) formulatik beste bi desberdintza hauek ondoriozta daitezke k_n^* erabakitzeko: $H_{n-1} - H_{k_n^*-1} > 1$ eta $H_{n-1} - H_{k_n^*} < 1$, edo $\sum_{i=k_n^*}^{n-1} \frac{1}{i} > 1$ eta $\sum_{i=k_n^*+1}^{n-1} \frac{1}{i} < 1$.

10. taulan agertzen dira serie harmonikoaren batugaiak, eta beraien eragina$(k_n^*)_{n>0}$segidaren osaketan:

- H_{8-1}-H_2=H_{7-1}-H_2+1/7=0.950+1/7=1.093 > 1. Unitate bakarreko jauzia dago$k_7^* = 2$baliotik$k_8^* = 3$baliora igarotzean.

- H_{11-1}-H_3=H_{8-1}-H_3+1/8+1/9+1/10=1.096 > 1. H_{8-1}-H_3=0.760 (< 1) balioari *3* batugai gehitu behar zaizkio *1* balioa gainditua izan dadin, eta unitate bakarreko jauzia gerta dadin. Beste modu bat hori bera adierazteko hauxe da: 1/8+1/9+1/10 > 0.240 (≡1-(H_{8-1}-H_3)). Beraz,$k_9^* = 3, k_{10}^* = 3$eta$k_{11}^* = 4$.

- H_{13-1}-H_4=H_{11-1}-H_4+1/11+1/12=1.020. H_{11-1}-H_4=0.846 balioari *2* batugai gehitu behar zaizkio *1* baino handiagoa izan dadin, edo: 1/11+1/12 > 0.154 (≡1-(H_{11-1}-H_4)). Beraz,$k_{12}^* = 4$eta$k_{13}^* = 5$.

Hurrengo atalean zehatzago azalduko da jauzi horien zergatia.

9. taula.k_n^*erabakitzeko$H_n$terminoen analisia

n	H_{n-1}-H_k	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	∑	$\mathbf{k_n^*}$
7	H_{7-1}-H_1	+	+	+	+	+							***1.450***	
	H_{7-1}-H_2		+	+	+	+							***0.950***	***2***
8	H_{8-1}-H_2		+	+	+	+	+						***1.093***	
	H_{8-1}-H_3			+	+	+	+						***0.760***	***3***
9	H_{9-1}-H_2		+	+	+	+	+	+					***1.218***	
	H_{9-1}-H_3			+	+	+	+	+					***0.885***	***3***
10	H_{10-1}-H_2		+	+	+	+	+	+	+				***1.329***	
	H_{10-1}-H_3			+	+	+	+	+	+				***0.996***	***3***
11	H_{11-1}-H_3			+	+	+	+	+	+	+			***1.096***	
	H_{11-1}-H_4				+	+	+	+	+	+			***0.846***	***4***
12	H_{12-1}-H_3			+	+	+	+	+	+	+	+		***1.187***	
	H_{12-1}-H_4				+	+	+	+	+	+	+		***0.937***	***4***
13	H_{13-1}-H_4				+	+	+	+	+	+	+	+	***1.020***	
	H_{13-1}-H_5					+	+	+	+	+	+	+	***0.820***	***5***

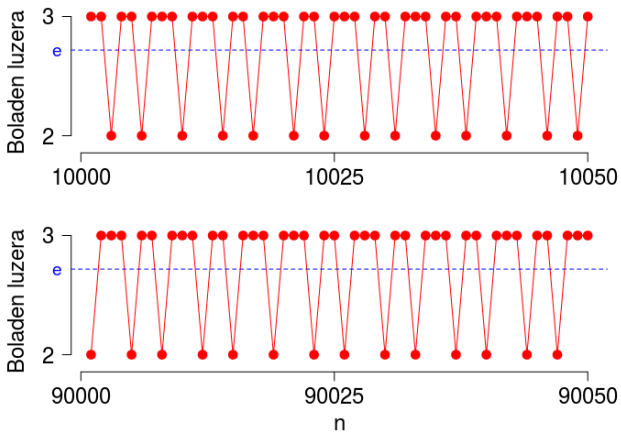
Jauziak,$(k_n^*)_{n>0}$segidaren hasieran, kokaleku hauetan gertatzen dira: *2 edo 3, 5, 8, 11, 13, 16, 19, 21, 24, 27, 30, 32, 35, 38, 40*. Segida berri horren lehenengo diferentziak kalkulatzean *2* edo *3*-ko bolada-

luzerak gertatzen dira (*n>2,* ikusi 10. taula). Bolada-luzeren segida luza daiteke *n*-ren handitzearekin batera ($3 \leq n \leq 10^5$).

10. taula. Boladen jokaera.

n	: 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	...
k_n^*	: 1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13	14	14	15	15	...
luzera-boladak	:				3			3			2			3			3			2			3			3			2			3			3			2			...

Bolada-luzeren segidak *2*tik *3*ra egiten du jauzi etengabe, eta alderantziz (ikusi 5. irudia).



5. irudia.$(k_n^*)_{n>0}$-ren boladen jokaera.

Baina, bolada-luzeren segidan ez da erregulartasunik edo patroirik aurkitu bi luzera moten artean. Bada, ordea, ñabardura bat: gehiagotan dira *3* luzerakoak *2*-koak baino. Izan ere,k_1^*etak_2^*kasuak kenduta (anbiguotasuna dagok_2^*kasuan) *36789* bolada gertatzen dira $(k_n^*)_{3\leq n\leq 10^5}$segidan (proportzioan, *0.36789*, hau da,$\frac{1}{e}$gutxi gorabehera); horietatik *10363* (*% 28.17*) *2* luzerako boladei dagozkie eta *26423* (*% 71.83*) *3* luzerako boladei. Bataz bestean *2.718068* luzerako boladak gertatzen dira; hau da, *e* luzerakoak: (*10363·2 + 26423·3)/* 36789 = *2.718068* ≈ *e* (adi, ez da segidaren limitea).

Ñabardura horri beste bat gehi dakioke: boladen segida egonkorra da, nolabait ere, behar bezain luzea den edozein tartetan. Adibidez, (10000<*n*≤20000) eta (*60000<n≤70000*) tarteetan, *3679* bolada dago (proportzioan, *% 36.79*), horietatik *1037* dira *2* luzerakoak eta *2642* dira *3* luzerakoak; bataz bestean *2.71813* luzerakoa gertatzen da.

Ohartzekoa da, bestalde, *e*-tik bi muturretara (*2*-ra eta *3*-ra) dauden distantziek zehazten dituztela aurkitutako bi ehunekoak: *|e-2|+|e-3| = (e-2)+(3-e) = 0.2817182+0.7182818 = 1.*

Gainera, ikus daiteke *2* luzerako boladak bakarka gertatzen direla, eta *3* luzerakoak binaka edo hirunaka. Jokaera horrek bolada-luzeren bolada-luzerak aztertzea eskatzen du, baina bide horretatik ez da ezer aipagarririk aurkitu.

Behin *n* jakin baterakok_n^*balioa ezagutuz gero,p_n^*bakarraren kalkulua egiteko nahikoa da (4) formula erabiltzea:

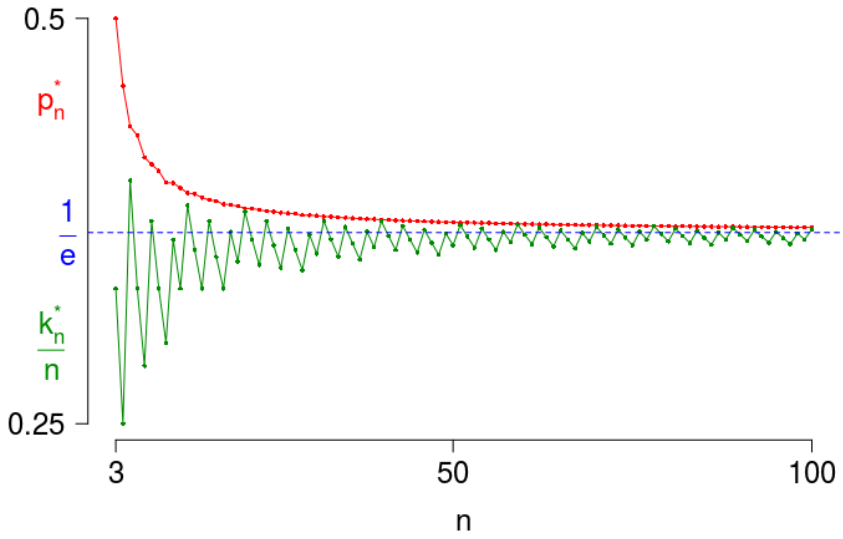
$$p_n^* = \frac{k_n^*}{n}\left(H_{n-1} - H_{k_n^*-1}\right), n > 4. \quad (8)$$

Gainera, (7) formulatik abiatuta p_n^*eta k_n^*balioen arteko erlazio bat lor daiteke:

$$H_{k_n^*-1} < (H_{n-1} - 1) < H_{k_n^*-1} + \frac{1}{k_n^*}, 0 < \left(H_{n-1} - H_{k_n^*-1} - 1\right) < \frac{1}{k_n^*}, 0 < \frac{k_n^*}{n}\left(H_{n-1} - H_{k_n^*-1} - 1\right) < \frac{1}{n}.$$

$$\text{Hortaz: } 0 < p_n^* - \frac{k_n^*}{n} < \frac{1}{n}, n > 2. \quad (9)$$

Ondorioz,$(p_n^*)_{n>0}$segida$\left(\frac{k_n^*}{n}\right)_{n>0}$segidaren gainetik dago:$p_n^* > \frac{k_n^*}{n}$(ikusi 6. irudia). Gainera, bi segiden arteko aldea gero eta txikiagoa da *n*-ren handitzearekin:$p_n^* < \frac{k_n^*}{n} + \frac{1}{n}$.Hortaz, bi segidek limite bera dute,$\frac{1}{e} \approx 0.3678794$,nahiz eta balio horretara oso modu desberdinean hurbildu. Hurrengo atalean limitearena aztertuko da.



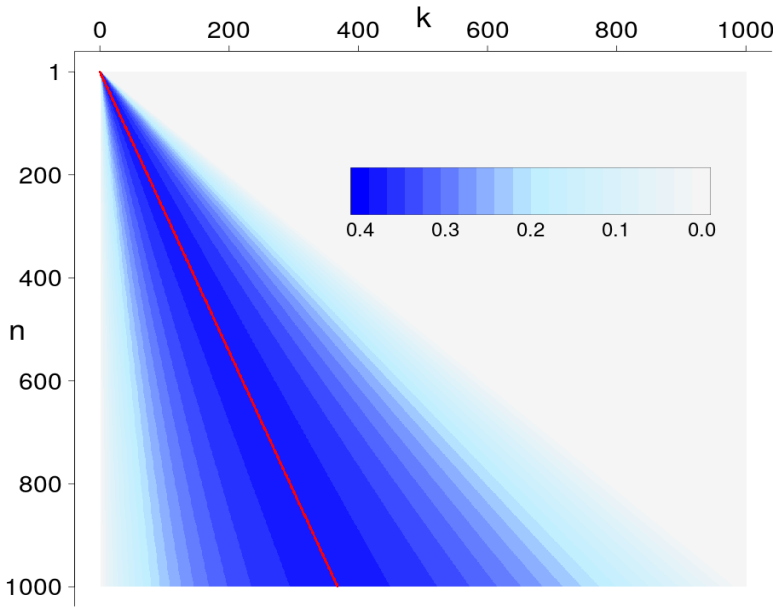
6. irudia.p_n^* $\frac{k_n^*}{n}$baino handiagoa.

6. SOLUZIOA. BALIO ZENBATETSIAK

(7) formulak balio du$(k_n^*)_{n>0}$geldiune hoberenen segida eraikitzeko modu azkarrean, eta (8) formulak$(p_n^*)_{n>0}$probabilitate maximoen segida eratzeko. Interesgarria litzateke *n* jakin baterako zein den p_n^* eta zein k_n^* modu zuzenago batean, segida *n*-raino kalkulatu edo datu-basean kontsultatu behar izan gabe.

6.1. Probabilitate maximoak

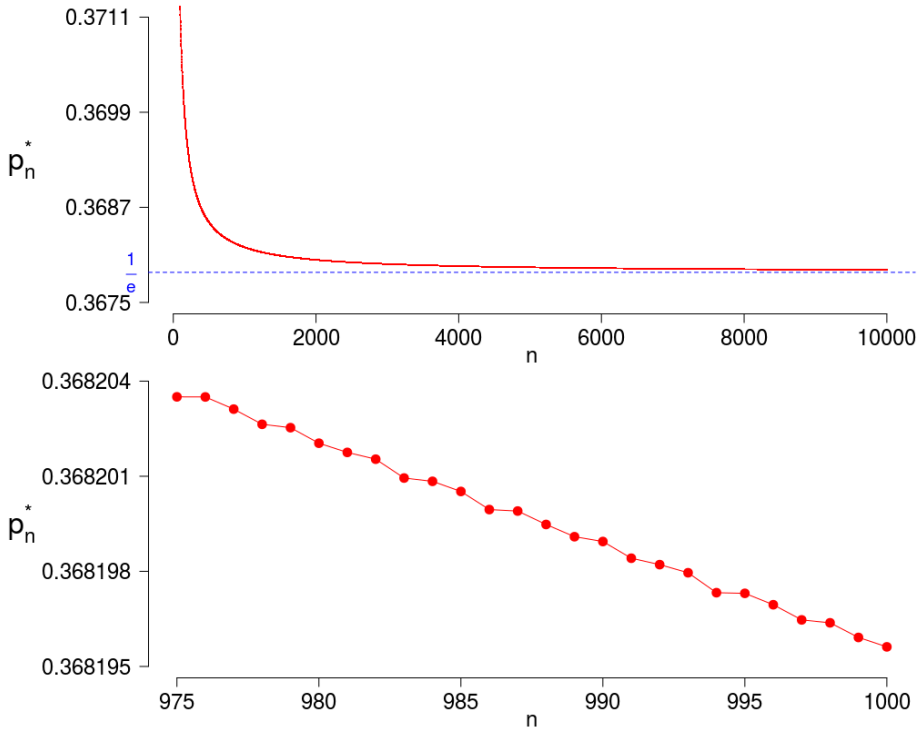
(4) formula konputagailuan eraginda, $p_n(k)$ balioari dagokion 8. taula *zabaldua* azaltzen da koloreztatuta 7. irudian. Urdinaren indarra $p_n(k)$ balioen araberakoa da, eta puntu gorriz adierazita daude lerro bakoitzekop_n^*balioak ($0<n\leq1000$), taularen *gailurra* alegia.



7. irudia. $p_n(k)$ probabilitateen jokaera. Gorriz,$(p_n^*)_{0<n\leq 1000}$probabilitate maximoak.

7. irudian gorriz adierazitako gailurra osatzen duen$(p_n^*)_{n>0}$segida *n*-rekiko planoan irudikatuz gero (ikusi 8. irudiko goiko grafikoa), ikusten da$(p_n^*)_{n>0}$segidaren joera beheranzkoa dela, eta bere itxura grafikoa, *n* handia denean, continuum batena dela (simulazioko 1. irudian ere ikus daiteke hori). Horrek beheranzko funtzio jarraitu baten bidez adieraztea iradokitzen du.

Baina, berez,$(p_n^*)_{n>0}$ez da jarraitua, eta puntuak marra zuzenez lotuz gero, mailaka lineala gertatzen da (8. irudiko beheko grafikoa), eta ez du erregulartasunik azaltzen. Limitea, itxuraz, $\frac{1}{e}$ (≈ *0.3678794*) da; adibidez,$p_{50000}^* = 0.3678858$da.



8. irudia. $(p_n^*)_{n>0}$ segidaren jokaera.

$(p_n^*)_{n>0}$segida beheranzkoa dela frogatzeko nahikoa da ohartzea $p_{n+1}(k+1)$ probabilitatea ($n>2$), (2) formularen arabera, $p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$ probabilitateen *batezbesteko haztatua* dela. Beraz, $(n+1)$-rako probabilitate maximoa,$p_{n+1}(k_{n+1}^*)(\equiv p_{n+1}^*)$,ondorengo bietako bat izango da:$p_n(k_n^*)(\equiv p_n^*)$eta$p_n(k_n^*+1)$probabilitateen batezbesteko haztatua$\left(p_n(k_n^*) > p_n(k_n^*+1)\right)$,ala $p_n(k_n^*)(\equiv p_n^*)$eta$p_n(k_n^*-1)$probabilitateena$\left(p_n(k_n^*) > p_n(k_n^*-1)\right)$.Edozein kasuan, p_n^*balioaren tamaina murriztu egiten da n-ren tamainaren handitzearekin batera.

Gaur egun, konputagailuen indarrak aukera ematen du konbergentzia hori nolakoa den zehazteko; hau da, nola hurbiltzen den$\frac{1}{e}$baliora (ikusi 11. taula). Izan bedi n_ε^*,$p_n^* - \frac{1}{e} < \varepsilon$lortzen duen n-rik txikiena ($n>0$):

11. taula. $p_n^* - \frac{1}{e} < \varepsilon$.

ε :	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
n_ε^*:	4	32	317	3161	31607

Gutxi gorabehera n eta p_n^* tamainen arteko erlazio matematikoa honelakoa da: $p_n^* \simeq \frac{1}{e} + \frac{a}{n}$. n handirako ($n \geq 10^5$) erabat zehaztu ez den erlazio matematikoan $a=0.31607$ da. Jakin badakigu erlazioa ez dela $\frac{1}{n}$ balioarekiko zehazki lineala (ikusi 8. irudia); beraz, emandako formulak oso modu zehatzean zenbatesten du, n handirako, p_n^* balioa.

a koefizientearen izaera e zenbakiarekin lotzea eskatzen du senak; begiz jota, kalkulu batzuk egin ondoren, erlazio hau egiaztatzen da: $a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.316060279\ldots$. Beraz, proposatutako formula honako hau da:

$$p_n^* \simeq \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{n}. \quad (10)$$

Ikus daitekeenez, (10) formula, (8) formula ez bezala, ez dago ez k_n^* balioaren mende ez zenbaki harmonikoen mende. Gainera, hurbilketa aski ona da, $n>47$ denean benetako p_n^* balioarekiko duen aldea 10^{-4} baino txikiagoa baita, $n>150$ denean txikiagoa 10^{-5} baino, $n>487$ denean txikiagoa 10^{-6} baino, eta $n>1550$ denean txikiagoa 10^{-7} baino.

(10) formula idaztean, partzialki erabiltzen da n-ren limitea infiniturantz, e zenbakia zehazteko. Oro har:

$$\lim_{n\to\infty} p_n^* = \frac{1}{e}. \quad (11)$$

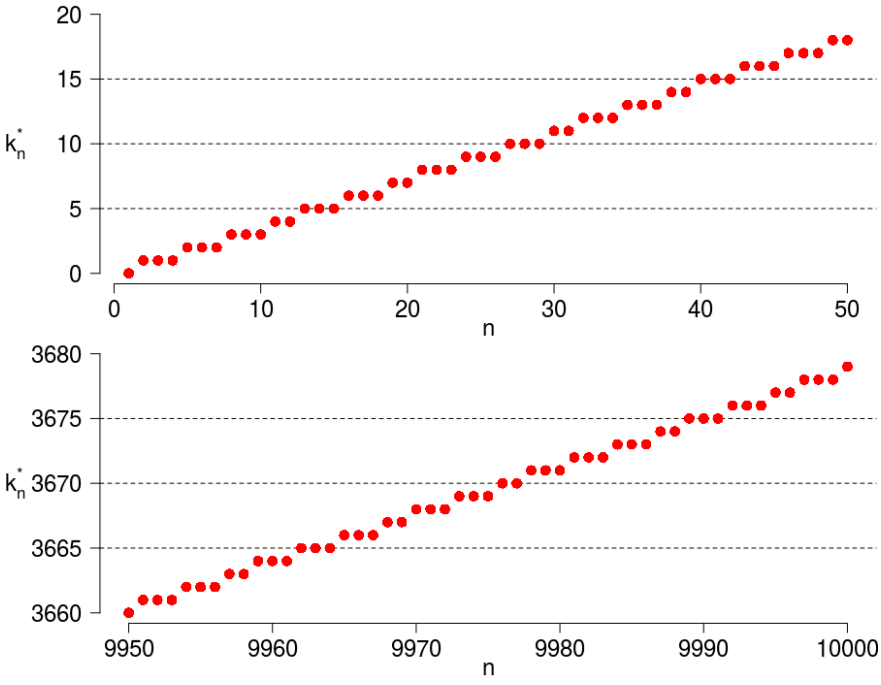
Testu klasikoetan, limitearen soluzio hori kalkulu integralaren bitartez ematen da (ikusi [1]). Izan ere, $(H_{n-1} - H_{k-1}) \equiv \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$ biderkatzailea $\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ integralaren *Riemann-en batura* bat da. *Riemann-en batura* integral mugatu baten balioa hurbiltzeko erabiltzen da. Kasu honetan, alderantziz, integral mugatu ezagun bat erabiltzen da batura baten balioa hurbiltzeko.

Bestalde, aipatzekoa da, $(p_n^*)_{n>0}$ beheranzkoa denez, p_n^* probabilitate maximoa beti dela $\frac{1}{e}$ baino handiagoa: $p_n^* > \frac{1}{e}, n > 0$. Horixe bera islatzen da (10) formulan.

6.2. Geldiune hoberenak

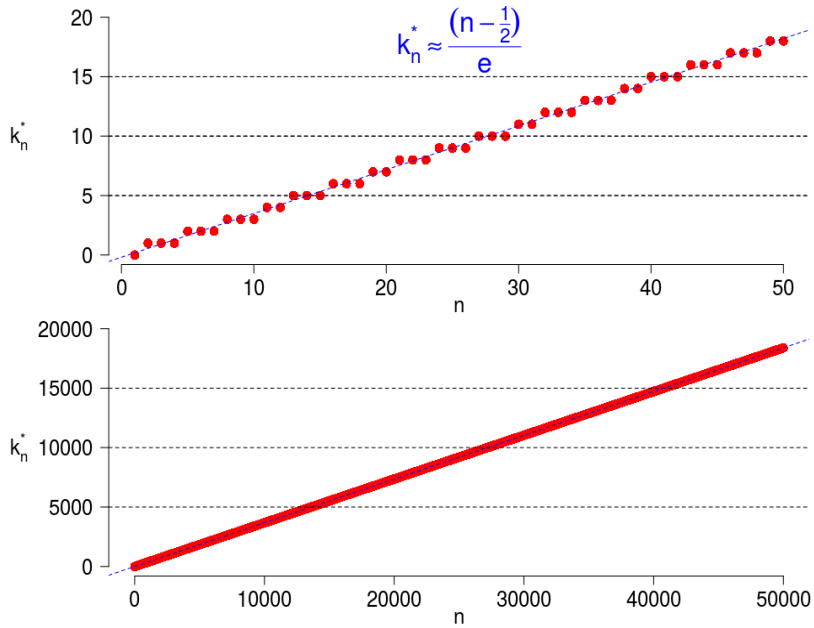
Interesgarria da$(k_n^*)_{n>0}$segidako balioak modu zuzenagoan ematen saiatzea, gutxi gorabehera bada ere,$(p_n^*)_{n>0}$segidarekin egin den bezala, *n* jakin baterainoko sekuentzia kalkulatu beharrik gabe, zenbaki harmonikoetan oinarritutako (7) formularen eta 1. algoritmoaren bidez.

Arestian esan bezala,$(k_n^*)_{n>0}$segidak jokaera bitxi hau du: balio bakoitza 2 edo 3 aldiz errepikatzen da (ikusi 9. irudia); hortaz, hurrenez hurreneko terminoak unitate bakar batean gehitzen dira ala errepikatu egiten dira: $k_{n+1}^* = k_n^* + 1$ ala $k_{n+1}^* = k_n^*$.Horren arrazoia $(p_n^*)_{n>0}$ segidaren osaketan bilatu behar da. Izan ere, p_{n+1}^*ondorengo bietako bat da: p_n^* eta $p_n(k_n^* + 1)$probabilitateen batezbesteko haztatua, ala p_n^*eta$p_n(k_n^* - 1)$probabilitateena. Lehenengoa bada,$k_{n+1}^* = k_n^* + 1$, eta bigarrena bada, $k_{n+1}^* = k_n^*$.



9. irudia.$(k_n^*)_{n>0}$segidaren jokaera.

9. irudiakk_n^*eta *n*-ren arteko erlazio zuzena iradokitzen du, eta 10. irudiak erakusten du erabat lineala ez bada ere, hurbilketa ona izan daitekeela.



10. irudia. *n*-rekikok_n^*balioaren erregresio lineala.

Karratu minimoen zuzena egokituz gero ($0<n\leq10^5$), hau da, *n*-rekikok_n^*balioaren erregresio lineala,k_n^*zenbatesteko ekuazio hau gertatzen da:$k_n^* \approx -0.1839411 + 0.3678794 \cdot n$(ikusi 10. irudia). Korrelazio lineal koefizientearen balioa *0.9999999999630551084* da, hau da, *1* praktikoki. Zuzenaren malda, *0.3678794*, $\frac{1}{e}$ bera dela ematen du, eta jatorriko koordenatuak, *-0.1839411*-k, maldaren erdiaren antza du $\frac{-1}{2e}$. Hala balitz, *n*-rekikok_n^*balioaren ekuazioa hauxe izango litzateke:

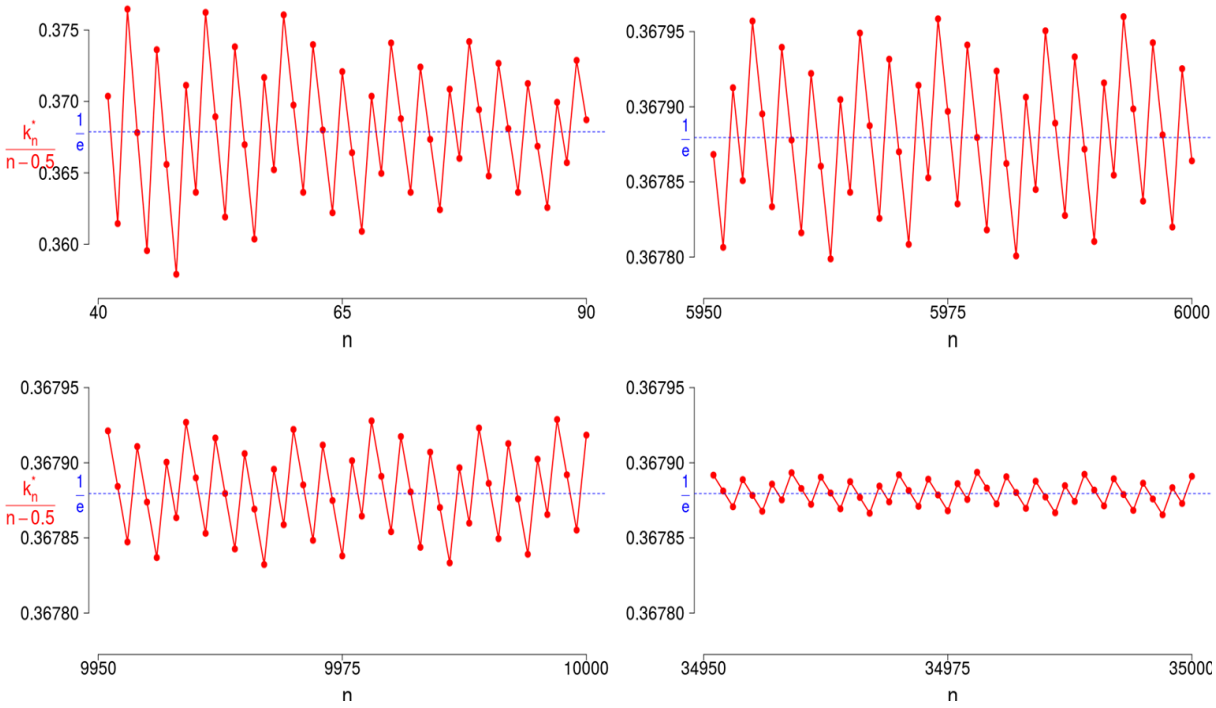
$$k_n^* \simeq \frac{n-\frac{1}{2}}{e}, n > 0. \quad (12)$$

e zenbakia azaltzeko *n*-ren infinitutasuneranzko limitea erabili da neurri batean. Ikus daitekeenez, (12) formula, (10) formula bezala, ez dago *zenbaki harmoniko*en mende. Zenbaki osoetara hurbiltzen duen 'biribildu' funtzioa erabiliz ($\left\lfloor \frac{n-0.5}{e} \right\rceil$), (12) formulak ($3\leq n\leq10^5$) tartean ematen dituen balio osoko biribilduak 1. algoritmoak ematen dituenk_n^*errealekin alderatzen badira, huts egiten duten identifikatzaile bakarrak *n*=97 eta *n=24586* dira: $k_{97}^* = 35$vs. $\left\lfloor \frac{97-0.5}{e} \right\rceil$=*36*, eta $k_{24586}^* = 9044$vs. $\left\lfloor \frac{24586-0.5}{e} \right\rceil$=*9045*.

Bestalde, (9) formularen arabera $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n^*}{n} = \frac{1}{e}$.Adibidez, egiazta daiteke $k^*_{10^5} = 36788$ dela; beraz, $\frac{k^*_{10^5}}{10^5} = 0.36788 \cong \frac{1}{e}$.

Ondorioz: $$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n^*}{n-0.5} = \frac{1}{e}.(13)$$

11. irudiko lau grafikoetan, $\frac{1}{e}$ marrarekiko $\frac{k_n^*}{n-0.5}$ balioen gorabeherak erakusten dira. Goiko biak itxuraz berdintsuak dira, baina ordenatuen eskalak ez dira berdinak. Goiko eskuinekoak eta beheko biek eskala berbera dute, eta erakusten dute gorabeherak nola estutzen diren $\frac{1}{e}$ marraren inguruan, *n*-ren handitzearen arabera.



11. irudia. $\frac{k_n^*}{n-0.5}$ segidaren jokaera.

Testu klasikoetan, kalkulu integralaren bidez, $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n^*}{n} = \frac{1}{e}$ ematen da, eta *n* handietarako, k_n^* balioa zenbatesten da: $k_n^* \simeq \frac{n}{e}$ ("hautagaien heren bat baino gehixeago (*% 37*a) pasatzen utzi, eta horiek baino hobeago den lehenengoa hautatu").

Zatiki hori zenbaki natural bihurtzeko funtzio hauek erabil daitezke: $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rceil$ (balio biribildua), $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor$ (balioaren zorua) eta $\left\lceil \frac{n}{e} \right\rceil$ (balioaren sabaia). Hiru funtzioek arestian proposatutako soluzioa baino askoz ere akats gehiago egiten dute. Hain juxtu, $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rceil$-ek (ikusi [7]) ematen dituen balioek unitate batengatik huts egiten dute benetako k_n^* ($3<n\leq10^5$) tartearen *18394* posizioetan. Ez dute emaitza hori hobetzen $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor$-ek, ezta $\left\lceil \frac{n}{e} \right\rceil$-ek ere.

Esan bezala, $(k_n^*)_{n>0}$ segidak jokaera hau du: balio bakoitza 2 edo 3 aldiz errepikatzen da (ikusi 7. irudia). Segida honetako balioen arteko diferentzien azterketak interesgarria dirudi ($3\leq n\leq10^5$), *0*-k eta *1*-ek osatutako segida berri bat eraikiz (ikusi 12. taula).

12. taula. $(k_{n+1}^* - k_n^*)$aldeen jokaera.

n	: 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	...
k_n^*	: 1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13	14	14	15	15	...
$k_{(n+1)}^* - k_n^*$	: 0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	...	

Ez du ematen erregulartasun edo patroirik dagoenik, baina *63211* aldiz gertatzen da *0*-a eta *36788* aldiz *1*-ekoa; hortaz, batezbesteko diferentzia *0.36788* da, $\frac{1}{e}$-ren berdintsua:

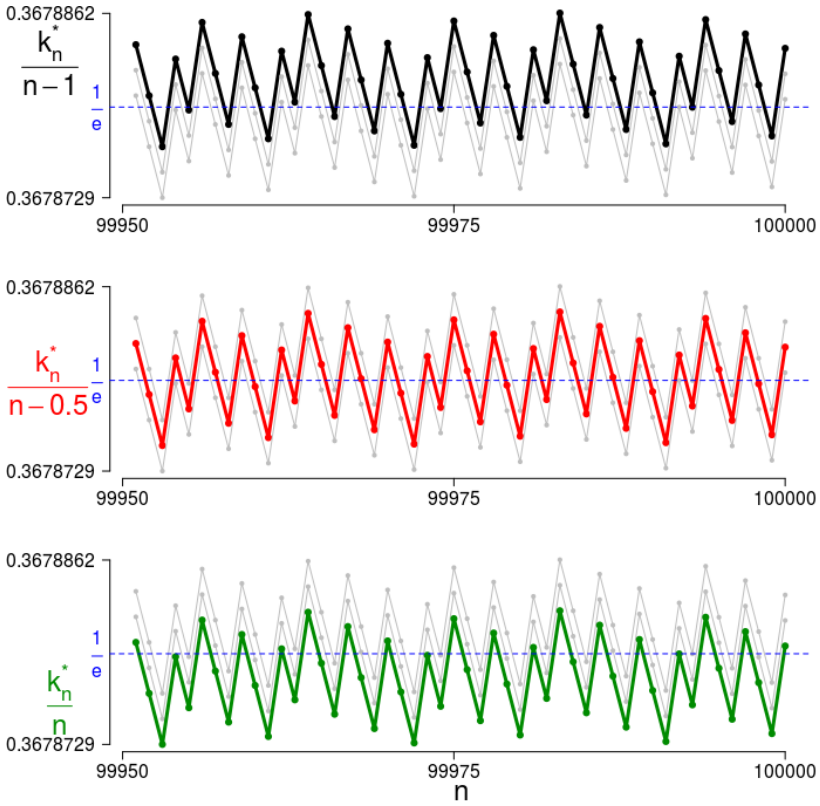
$\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(k_{i+1}^*-k_i^*)}{n-1} = \frac{k_n^*-k_1^*}{n-1} = \frac{k_n^*}{n-1} \approx \frac{1}{e}$edo

$$k_n^* \simeq \frac{n-1}{e}, n > 0. \quad (14)$$

Zenbatesteko formula honek formula klasikoak bezainbeste huts egiten ditu benetako k_n^*-ekin alderatzen direnean.

Beraz, k_n^*erabiliz $\frac{1}{e}$balioaren inguruko hiru modu azaldu dira: $\frac{k_n^*}{n-1}$, $\frac{k_n^*}{n-0.5}$eta $\frac{k_n^*}{n}$.Hiru moduetan 10^5 terminoetako azken 50ek $\frac{1}{e}$-rekiko dituzten aldeak kalkulatzen badira (ikusi 12. irudia), (12) formulatik eratorritako $\frac{k_n^*}{n-0.5}$formulak ditu alde positibo eta negatibo orekatuenak, eta $\frac{1}{e}$balioarekiko aldeek batezbesteko eta mediana txikienak. Hiru moduren artean, $\frac{k_n^*}{n-0.5} \approx \frac{1}{e}$izan daiteke k_n^*zenbatesteko aproposena:

$$k_n^* = \left\lfloor \frac{n-0.5}{e} \right\rceil. \quad (15)$$



12. irudia. $\frac{k_n^*}{n-1}$, $\frac{k_n^*}{n-0.5}$eta$\frac{k_n^*}{n}$ segiden jokaerak,$\frac{1}{e}$balioaren inguruan.

(15) formulak 9. taulan (eta orokorrean) gertatzen diren jauziak azaltzeko aukera ematen du, ($3<n\leq10^5$) tarteko n=97 eta $n=24586$ identifikatzaileetan izan ezik. Izan ere, k_n^*eta k_{n+1}^*balioen arteko aldea $\frac{1}{e} \approx 0.3678794$balioan oinarritzen da: batzuetan halako *2* behar dira unitate bakarreko jauzia egiteko, eta beste batzuetan *3* (ikusi 13. taula).

13. taula. *2* edo *3*-ko boladak.$\frac{1}{e} \approx 0.3678794$balioaren eragina.

n	$\left\lfloor \frac{n-0.5}{e} \right\rceil$	$\mathbf{k_n^*}$
7	$\lfloor 2.391216 \rceil$	*2*
8	$\lfloor 2.391216+1 \cdot 0.3678794 \rceil = \lfloor 2.759096 \rceil$	*3*
9	$\lfloor 2.391216+2 \cdot 0.3678794 \rceil = \lfloor 3.126975 \rceil$	*3*
10	$\lfloor 2.391216+3 \cdot 0.3678794 \rceil = \lfloor 3.494855 \rceil$	*3*
11	$\lfloor 3.494855+1 \cdot 0.3678794 \rceil = \lfloor 3.862734 \rceil$	*4*
12	$\lfloor 3.494855+2 \cdot 0.3678794 \rceil = \lfloor 4.230614 \rceil$	*4*
13	$\lfloor 4.230614+1 \cdot 0.3678794 \rceil = \lfloor 4.598493 \rceil$	*5*

($3<n\leq 10^5$) tarteko $n=97$ eta $n=24586$ identifikatzaileek ez dutek_n^*bete-betean jotzen, nahiz eta hori gertatzeko 'oso gertu' egon:

- $\left\lfloor \frac{97-0.5}{e} \right\rceil = \lfloor 35.500366 \rceil = 36$ eta$k_{97}^* = 35$.
- $\left\lfloor \frac{24586-0.5}{e} \right\rceil = \lfloor 9044.500001 \rceil = 9045$ eta$k_{24586}^* = 9044$.

7. ONDORIOAK ETA IRUZKINAK

Idazlan honetan, idazkariaren problema formalizatu ondoren, matematika esperimentalen bidea aukeratu da nagusiki problemari erantzuna bilatzeko. Badira problema aztertzeko hain klasikoak ez diren beste bide batzuk, hala nola programazio linealarena (ikusi [10]) eta programazio dinamikoa (ikusi [11]).

Erabili den lehen bide esperimentala simulaziorena izan da (2. atala). Esperimentazio gisa simulazioaren teknika konputagailuan oinarritzen da, eta estatistikaren bitartez problemaren funtzionamendua ezagutzeko balio du; beraz, indartsua da. Izan ere, simulazioaren emaitzak bat datoz, gutxi gorabehera, idazlan klasikoetanp_n^*etak_n^*balioei emandakoekin. 5. atalean azaldu dira simulazioan gertatutako gorabeheren zergatiak.

3. atalean ‘baratze’ bat eratu da konputagailuaren bitartez (ikusi 8. taula), eta behaketa zoli baten bidez agertzen diren erlazioak formalizatu eta gero (2) formula errekurtsiboa induzitu da. Ondoren, bere konbinatoria- eta probabilitate-ulerbideak eman dira.

Aipatzekoa da (2) formula bera agertzen dela probabilitateak kalkulatzeko itxuraz desberdina den beste problema batean, *Polya-ren kutxa-eredua* izenekoan (ikusi [12]). Eredu honen kasurik sinpleenean, kutxan bi koloretako hainbat bola dago (esate baterako, gorriak eta urdinak), eta hortik bola bat ateratzen da zoriz. Bolaren koloreari erreparatu eta kutxara itzultzen da, baita kolore bereko beste bat ere. Prozesu hori n aldiz errepikatzen da. Izan bedi $p_n(k)$ n ateraldi egin ondoren kutxan k bola gorri egoteko probabilitatea. (2) formulak $p_{n+1}(k+1)$ probabilitatearen kalkulua ematen du, $p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$ probabilitateak kontuan hartuta eta $(n+1)$. ateraldian bola gorria ala urdina izan daitekeena, hurrenez hurren. $p_{n+1}(k+1)$ probabilitatea $p_n(k)$ eta $p_n(k+1)$ probabilitateen batezbesteko haztatua da. Formula bera bi testuingurutan agertu da, baina ez da argitu zein den idazlan honen eta *Polya-ren kutxa-eredua*ren objektu matematikoen arteko elkarrekikotasuna.

4. atalean (2) formula errekurtsiboa bide analitiko klasikotik lortutako (4) formula esplizituarekin uztartu egin da, bi formulen baliokidetasuna matematikoki frogatuz.

5. atalean matematikoki lortu da geldiune hoberenaren baldintzak adierazten dituen (7) formula. Formula hori *zenbaki harmoniko*en arteko desberdintzetan gauzatzen da. Bitxia izan da, nolabait esateko, geldiune hoberenaren baldintzen formula hori aurkitzea probabilitate maximoaren bakartasuna frogatzeko bidean. Gero, (7) eta (4) formulen bidez probabilitate maximo bakarra kalkulatu ahal izan da. Nolanahi ere, agerian geratu da problemaren muina *zenbaki harmoniko*en segidaren ezagutzan datzala.

(7) formula eraldatua den (9) formulak erakusten du $(p_n^*)_{n>0}$ segida $\left(\frac{k_n^*}{n}\right)_{n>0}$ segidaren gainetik dagoela, eta bi segiden arteko aldea gero eta txikiagoa dela n-ren handitzearekin. Bien limiteak, beraz, berdinak dira, $\frac{1}{e}$ hain justu.

$(k_n^*)_{n>0}$ segidaren boladei erreparatuta, erregulartasun finkorik azaltzen ez den arren, zenbait aieru egin dira, frogatu gabeak, tartean boladen batezbesteko luzerak e balio duela segidaren edozein tarte finitu aski zabaletan.

6. atalean funtzio linealen bitartez zenbatesten dirap_n^*etak_n^*balioak. Zenbatespen-formulak *n*-ren mende daude soilik, *zenbaki harmoniko*ak saihestuz.

(2) formula errekurtsiboak$(p_n^*)_{n>0}$segida beheranzkoa dela eta$(k_n^*)_{n>0}$segidako balioak errepikatzen edo unitate bakar batean handitzen direla frogatzeko balio izan du.

$p_n^* \simeq \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{n}$formula$\frac{1}{n}$-rekiko lineala da. Koefiziente horiek zehazteko nolabaiteko zorroztasuna eta zolitasuna behar izan da. Formula linealak ematen dituen balioak benetako$(p_n^*)_{n>0}$balioetatik 'oso gertu' daude, gero eta 'gertuago' *n*-ren handitzearekin. Metodo estatistiko klasikoen ikuspuntutik begiratuta,p_n^*aldagaiaren $\frac{1}{n}$ aldagaiarekiko erregresio lineala kalkulatuz gero (karratu minimoen metodoa erabiliz), $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ balioaren oso antzekoa gertatzen da $n>10^4$ denerako. Areago, erregresio koadratikoak $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ balioa bera ia bete-betean ematen du $n>10^3$ denerako, etap_n^*balioaren hurbilketa pittin bat hobea da (ikusi 14. taula).

14. taula. p_n^*balioaren $\frac{1}{n}$balioarekiko erregresio lineal eta koadratikoaren erroreak.

$\left\|\left(p_n^* - \left(\frac{1}{e} + 0.3160602 \cdot \frac{1}{n}\right)\right)\right\|$	$\left\|\left(p_n^* - \left(\frac{1}{e} + 0.3160602 \cdot \frac{1}{n} + 0.1289802 \cdot \frac{1}{n^2}\right)\right)\right\|$	errorea
$n > 47$ $n > 150$ $n > 487$ $n > 1550$	$n > 40$ $n > 128$ $n > 435$ $n > 1448$	$< 10^{-4}$ $< 10^{-5}$ $< 10^{-6}$ $< 10^{-7}$

(12) formula biribilduz$k_n^* \simeq \left\lfloor \frac{n-0.5}{e} \right\rceil$formula lortzeko metodo estatistiko bat erabili da, hain zuzen karratu minimoen metodoaren bitarteko erregresio lineala. Formula hori, nolabait, $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rceil$, $\left\lceil \frac{n}{e} \right\rceil$ formula klasikoak baino egokiagoa dela erakutsi da. Formula horretan agertzen den biribiltzeari buruzko iruzkin bat egin daiteke: Gilbert eta Mosteller-ek 1966an (ikusi [13]) arrazoibide matematiko (konbinatorio, ez estatistiko) baten bitartez proposatu zutenk_n^*baliorako tarte estu bat: $k_n^* \simeq$

$\left\lfloor \frac{n-0.5}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Artikulu horretan aipatzen da formula horrek bete-betean jotzen dituela k_n^* balioak *(0<n≤10³)* tartean, *n=97* kasuan izan ezik ($k_n^* \simeq \left\lfloor \frac{n-0.5}{e} \right\rceil$ formularen kasuan bezala). Izan ere, bi formulak baliokideak dira, zenbatespen-emaitzak berdinak direlako. Adibidez, *n=500* denean, $\left\lfloor \frac{500-0.5}{e} \right\rceil = \lfloor 183.7558 \rceil = 184$ da eta $\left\lfloor \frac{500-0.5}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 184.2558 \rfloor = 184$.

Gainera, esan beharra dago proposatutako formulak $(k_n^*)_{n>0}$ segidaren boladen luzerak nolakoak diren ulertzen laguntzen duela.

Bukatzeko, esker onak adierazi nahi dizkiet Ander Murua, Joseba Makazaga eta Itziar Irigoien lagun eta lankide ohiei orrazkera eta iruzkinak egiteagatik, baita Ekaia aldizkariko arduradunek izendatutako bi ebaluatzaileei ere.

8. BIBLIOGRAFIA

[1] FERGUSON T. S. 1989, «Who Solved the Secretary Problem?,» *Statistical Science,* **4** (3), 282–289. https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-4/issue-3/Who-Solved-the-Secretary-Problem/10.1214/ss/1177012493.full

[2] GARDNER M. 1960, «The Game of Googol,» *Scientific American*, March Volume 202, Issue 3. Hemen jasota ere: GARDNER M. 1995, «New Mathematical Diversions (Revised Edition),» 1995, *The Mathematical Association of America*, 34-36 eta 41-43 orr.
https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner03.pdf

[3] MOSER L. 1956, «On a problem of Cayley,» *Scripta Mathematica* 11, 289-292.

[4] BAKER A. 2008, «Experimental Mathematics,» *Erkenntnis*, May Volume 68, No. 3, Towards a New Epistemology of Mathematics, 331-344 orr., Springer Nature.
https://www.academia.edu/58166957/Experimental_Mathematics

[5] BAILEY D. H., BORWEIN J. M. 2012, *Exploratory Experimentation in Mathematics: Selected Works*, Perfectly Scientific Press, Portland, Oregon.

[6] **R** Core Team 2026. ***R****: A language and environment for statistical computing.* ***R*** *Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. https://www.R-project.org/

[7] SLOANE N. J. A. (arg.) 2026. *The On-Line Encycopedia of Integer Sequences (OEIS)* (founded in 1964):
Stirling-en zenbaki orokortuak: https://oeis.org/A06717.
Zenbaki harmonikoen zenbakitzaileak: https://oeis.org/A001008.
Zenbaki harmonikoen izendatzaileak: https://oeis.org/A002805.
Geldiune hoberenak: https://oeis.org/A054404.
$\left\lceil \frac{n}{e} \right\rceil$: https://oeis.org/A225593.
$\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor$: https://oeis.org/A032634 .

[8] GRAHAM R. L., KNUTH D. E., and PATASHNIK O. 1988, «Harmonic Numbers,» and «Harmonic Summation,» *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd ed., Addison-Wesley, 258-264.

[9] GOURDON, X., PASCAL, S. 2004, *"The Euler constant: γ" . scipp.ucsc.edu. Retrieved 2024-10-27.* https://scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/euler.pdf

[10] BUCHBINDER, N., JAIN , K., SINGH, M. 2010, «Secretary Problems via Linear Programming,» *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, 163-176 orr., Lecture Notes in Computer Science 60680, Springer.
https://www2.isye.gatech.edu/~msingh94/publications/sec-ipco-final.pdf

[11] BECKMANN, M.J., 1990, «Dynamic Programming and the Secretary Problem,» Computers Math. Applic. Vol. 19, No. II, pp. 25-28.

[12] JOHNSON, N.L., KOTZ, S., 1977, «Urn Models and Their Application. An Approach to Modern Probabilty Theory,» 283 orr., John Wiley and Sons.

[13] GILBERT, J.P., MOSTELLER, F., 1966, «Recognizing the Maximum of a Sequence,» *Journal of the American Statistical Association*, 61, 35-73 orr.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-387-44956-2_22