

El desarrollo de las soluciones infantiles en la resolución de problemas aritméticos no estándar

Laura Jiménez* y Lieven Verschaffel**

*Universidad de Castilla-La Mancha, **Universidad de Leuven (Bélgica)

Resumen

En este estudio se ha investigado el desarrollo de las soluciones que dan los niños a cuatro tipos de problemas aritméticos no estándar. Se ha intentado ofrecer una evidencia indirecta de las creencias que los niños desarrollan sobre los problemas verbales a través de la inmersión en la cultura escolar tradicional de las matemáticas. Dichas creencias son: todo problema tiene solución, solo hay una respuesta numérica correcta, siempre es necesario realizar cálculos y todos los números deben ser usados para hallar la solución. Se solicitó a alumnos desde 1.º hasta 6.º de Educación Primaria (E.P.) que resolviesen cuatro problemas verbales contrarios a estas cuatro creencias. Los resultados generales revelaron, en primer lugar, que solo el 37.9% de respuestas de los niños eran correctas. En segundo lugar, el grado de dificultad que encontraban para resolver los distintos problemas verbales fue aumentando desde el denominado problema *irresoluble* (18.3%), seguido por el de *soluciones múltiples* (30.3%), el que tiene la *solución incluida* en el enunciado (45.7%), hasta el de *datos irrelevantes* (57.3%). En tercer lugar, se halló que las respuestas correctas de los niños aumentaron desde 1.º de E.P. (15.5%) hasta 6.º de E.P. (56%), pero no entre los tres cursos inferiores ni entre los tres cursos superiores. El artículo finaliza con la discusión de las implicaciones teóricas, metodológicas y educativas.

Palabras clave: Creencias, problemas no estándar, estrategias de resolución de problemas, educación matemática, cultura de las matemáticas.

Abstract

This study investigated the development of children's solutions of four types of non-standard arithmetic word problem, with a view to gather indirect evidence of the following beliefs about word problems that they develop through their immersion in the culture of traditional school mathematics: every word problem is solvable, there is only one numerical correct answer, it is always necessary to do calculations, and all numbers must be used in order to calculate the solution. Children from Grade 1 to 6 solved four word problems that violated these four beliefs. General results revealed, first, that only 37.9% of children's responses were correct. Second, the difficulty was increasing, starting with the *unsolvable* problem (18.3%), and followed by the *multiple solutions* (30.3%), the *given solution* (45.7%) and the *irrelevant data* problem (57.3%). Third, children's correct responses increased from Grade 1 (15.5%) to Grade 6 (56%), but not within the three lower and the three upper grades. The article ends with a discussion of the theoretical, methodological, and educational implications.

Keywords: Beliefs, non-standard problems, problem solving strategies, mathematics education, mathematics culture.

Correspondencia: Laura Jiménez, Departamento de Psicología, Universidad de Castilla-La Mancha, Campus Universitario s/n, 16071, Cuenca, España. E-mail: laura.jimenez@uclm.es

Introducción

Los problemas estándar versus los problemas no estándar

Los problemas verbales constituyen una parte importante del currículo de matemáticas en Educación Primaria. En la resolución de problemas verbales, se espera que los alumnos empleen de forma correcta los conceptos y destrezas matemáticas que han adquirido durante la enseñanza de las matemáticas. Esto requiere no solo de un buen conocimiento de los hechos numéricos, reglas, principios y operaciones es decir, la sintáctica de las matemáticas (Ilani y Margolin, 2010), sino también de que comprendan el enunciado del problema y de que razonen sobre cómo dicha sintáctica de las matemáticas debe ser usada en función de la situación descrita en el problema es decir, la semántica de las matemáticas (Gerofsky, 1996; Verschaffel y De Corte, 1997).

Una de las principales razones para la inclusión de los problemas verbales en el currículo de matemáticas es que estos permiten la práctica con situaciones cotidianas en las que los alumnos necesitarán aplicar lo que han aprendido en sus clases de aritmética, geometría o álgebra (es decir, la llamada función de aplicación de los problemas verbales, ver Verschaffel, Greer, y De Corte, 2000).

La mayoría de los autores consideran que a la solución competente de un problema se llega mediante

un proceso complejo de *modelado* multi-fase, basado principalmente en: (1) la construcción de un modelo interno de la situación descrita en el problema que debe reflejar que se ha producido una comprensión de los elementos y las relaciones que se describen en la historia del problema, y (2) la transformación de este modelo interno en un modelo matemático que recoja los elementos y las relaciones que son esenciales para la solución. Estos dos pasos son seguidos por: (3) el trabajo con dicho modelo matemático para conseguir obtener un resultado matemático, (4) la interpretación de los resultados de los cálculos, (5) la evaluación de si la interpretación del resultado matemático es computacionalmente correcto y razonable, y (6) la comunicación de la solución obtenida (p. e., Verschaffel et al., 2000; Verschaffel y De Corte, 1997).

En la literatura, los problemas verbales han sido clasificados de varias formas. Una primera distinción importante es la realizada entre los problemas estándar y los problemas no estándar (Verschaffel et al., 2000). Los problemas verbales estándar se *modelan* de forma correcta e inequívoca y se resuelven mediante la aplicación directa de una operación aritmética con los números dados, o la combinación de dos o más operaciones. En algunos casos, la operación aritmética correcta se extrae fácilmente a partir de una o más palabras clave incluidas en el enunciado del problema

(p. e., la presencia de las palabras «conseguir» o «recibir» significa que la operación requerida será la adición, mientras que las palabras «dar» o «perder» sugieren que debe realizarse una sustracción), pero en otros casos la identificación de la solución aritmética correcta es menos evidente (p. e., cuando el problema contiene una palabra clave que conduce a la operación incorrecta, cuando la situación descrita en el enunciado no es familiar para el alumno o cuando el problema requiere realizar varios pasos de cálculo). No obstante, una característica común a todos los problemas estándar es que se ajustan perfectamente a la descripción de un problema verbal realizada por Gerofsky (1996; ver también Verschaffel et al., 2000), que considera los problemas verbales como textos con una estructura tripartita con los siguientes componentes:

- El componente «contexto» en el que se establecen los personajes y la localización de la historia (sin embargo, de acuerdo con Gerofsky, este componente no es realmente esencial).
- El componente «información» en el que se ofrece la información necesaria para resolver el problema (Gerofsky [1996, p. 37] indica que algunas veces se añade información extraña que actúa «como un señuelo para los confiados»).
- La pregunta que puede ser resuelta mediante la aplicación de

una o más operaciones aritméticas con los datos numéricos proporcionados en el segundo componente.

De acuerdo con Verschaffel, Greer y De Corte (2007), la mayoría de las investigaciones centradas en los problemas verbales han estado basadas en este tipo de problemas estándar, sobre todo en los contenidos curriculares de la aritmética elemental, pero también de la geometría y del álgebra. Esta investigación ha demostrado ampliamente que: (1) distintas variables relacionadas con las tareas influyen en la exactitud, representación, estrategias de resolución y errores de los aprendices, y (2) los diversos materiales y métodos de enseñanza tienen un gran impacto en los procesos y destrezas de resolución de problemas de los aprendices (para una revisión general ver p. e., Verschaffel et al., 2007).

Sin embargo, por diversas razones, los investigadores también han estudiado otro tipo de problemas verbales que se han denominado problemas no estándar. Contrariamente a la primera categoría de problemas que se ajustan a la mencionada estructura tripartita propuesta por Gerofsky (1996), y por tanto, por definición, provocan poca o ninguna discusión sobre lo que tiene que ser considerado como una respuesta correcta, los problemas no estándar comparten la característica general de que se desvían de una o más formas de dicha

estructura tripartita y de sus normas (para consultar ejemplos de los estudios realizados con problemas no estándar ver p. e., De Corte y Verschaffel, 1985; Jiménez, 2012; Jiménez y Ramos, 2011; Littlefield y Riesser, 1993; Puchalska y Semadeni, 1987; Reusser y Stebler, 1997; Selter, 1994; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994). Precisamente, en este trabajo se presenta un estudio en el que se ha pedido a niños de todos los niveles escolares de Educación Primaria que resuelvan varios tipos de problemas no estándar, en el contexto de una entrevista individual, con el objetivo de profundizar sobre el desarrollo de ciertas creencias (implícitas) sobre los problemas matemáticos y la forma de resolver dichos problemas en el contexto escolar. Pero antes de presentar la justificación, los objetivos, el diseño y los resultados de ese estudio, se revisará brevemente la investigación disponible sobre los problemas aritméticos verbales no estándar.

Las investigaciones previas realizadas con problemas verbales no estándar

Como se ha mencionado anteriormente, la mayor parte de la investigación realizada con problemas verbales se ha centrado en los problemas habituales. Después de todo, estos son los problemas que aparecen con mayor frecuencia en los libros tradicionales de matemáticas, en las clases y también en las evaluaciones (Reusser y Stebler, 1997;

Verschaffel et al., 2000). Sin embargo, uno de los problemas de estos trabajos de investigación es que solo explican parcialmente los procesos y componentes implicados en la habilidad de resolución de problemas, en particular, y de modelización matemática, en general. Durante las últimas décadas, el trabajo teórico y empírico realizado en distintos ámbitos de investigación, como la lingüística, la pragmática, la antropología y las etnomatemáticas han conducido a un aumento del interés en los problemas verbales, considerándolos como un peculiar «género textual» (Gerofsky, 1996, p. 37), «un peculiar dispositivo cultural» (Lave, 1992, p. 75), o «un juego específico» con sus propias intenciones, estructura, reglas y tácticas, que debe ser conocido y respetado por todas las partes involucradas (De Corte y Verschaffel, 1985, p. 7). Inspirados por estas ideas teóricas, muchos investigadores han empezado a indagar sobre este fenómeno de forma empírica. El principal método de investigación ha sido presentar a los alumnos problemas denominados no estándar que se desvían de la estructura típica de los problemas verbales. De ahora en adelante, se revisará brevemente la literatura sobre la investigación realizada sobre cuatro tipos diferentes de problemas no estándar. Por lo general, los resultados de estos estudios, y particularmente el bajo rendimiento de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas, se han utilizado para de-

mostrar la naturaleza problemática de los resultados de aprendizaje que se derivan de la enseñanza tradicional basada únicamente en problemas estándar.

Los problemas irresolubles. En algunas investigaciones se han empleado problemas que son irresolubles porque falta uno de los datos. Por ejemplo, De Corte y Verschaffel (1985) presentaron a niños de 1.º de Educación Primaria (E.P.) un problema que omite información relevante (p. e., «Pedro tenía algunas manzanas. Dio cuatro manzanas a Ana. ¿Cuántas manzanas tiene Pedro ahora?»), y hallaron que la mayoría de los niños no se daba cuenta de que el problema era imposible de resolver. Puchalska y Semadeni (1987) indicaron igualmente que un número significativo de niños de edades comprendidas entre los 7 y 12 años concluyó que un problema similar era irresoluble, pero curiosamente la mayoría de ellos también creía que un estudiante mejor o un profesor podrían resolverlo con total seguridad. En un estudio reciente, Jiménez y Ramos (2011) también concluyeron que el 80% de los alumnos de 2.º y 3.º de E.P. fallaba a la hora de detectar que necesitaban más información para resolver el siguiente problema que omite información relevante: «Mario está jugando con canicas en el parque. Mario tiene 17 canicas y su amigo Jorge le da 7. Cuántas canicas tiene Jorge ahora?».

Curiosamente, en la literatura se pueden también encontrar estu-

dios que han empleado problemas que son irresolubles porque la información que se ofrece en el problema no está relacionada con la pregunta, como sucede en el clásico e hilarante problema del capitán (p. e., «Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Cuántos años tiene el capitán?»), que fue resuelto erróneamente por el 88% de los niños de 1.º y 2.º de E.P. y el 38% de los niños de 3.º y 4.º (Baruk, 1985). De manera generalizada, los alumnos respondían que el capitán tenía 36 años sumando para ello el número de ovejas y de cabras (resultados similares pueden encontrarse en Reusser, 1988). Al contrario de Baruk, Radatz (1983) encontró que el porcentaje de niños que trataba de llegar a alguna solución, en vez de disminuir, aumentaba desde Educación Infantil (10%) hasta 4.º de E.P. (60%). Muchos autores han interpretado el sorprendente resultado de que los niños de Educación Primaria calculasen masivamente la edad del capitán sumando (restando, multiplicando o dividiendo) cabras y ovejas como una evidencia de su «falta de sentido común» (Baruk, 1985; ver también Verschaffel et al., 2000). Sin embargo, en algunos estudios posteriores, en los que se pedía a los niños que explicasen las soluciones que previamente habían dado al problema del capitán, se encontró que los niños justificaban dicha respuesta «absurda» creando «contextos mágicos» —es decir, elaboraciones personales—, tal y como se muestra en este ejemplo: *el*

capitán ha comprado un animal por cada año de su vida, así siempre sabrá la edad que tiene (Selter, 1994).

Los problemas con soluciones múltiples. Otros investigadores han empleado problemas que pueden resolverse de múltiples maneras debido a la presencia de una o más ambigüedades en el enunciado. Puchalska y Semadeni (1987) solicitaron a alumnos de 1.º y 2.º de E.P. que resolviesen el siguiente problema: «Gapcio le puso a Dolly el siguiente problema: En un árbol hay gorriones. Yo he visto 5 gorriones y Dick ha visto 6 gorriones. ¿Cuántos gorriones hay en el árbol? ¿Qué le debe responder Dolly a Gapcio?». De nuevo, muchos niños consideraban que Dolly debía responder: *11 gorriones*. Del mismo modo, Verschaffel et al. (1994) presentaron a alumnos de Educación Primaria una serie de problemas no estándar (o, en palabras de los autores, «problemáticos»), en los que se introducía una relación ambigua o discutible entre, por un lado, el «contexto» del problema y, por otro, la estructura matemática subyacente, por lo menos si se considera seriamente que el problema describe una situación real, tal y como sucede en el problema de la distancia hasta la escuela: «Bruce y Alice van a la misma escuela. Bruce vive a 17 kilómetros de la escuela y Alice a 8 kilómetros. ¿A qué distancia viven Bruce y Alice una de la otra?». La gran mayoría de los alumnos resolvió este problema de la forma esperada, es decir, ofreciendo una

única respuesta, numérica y precisa, basada en la realización de una operación aritmética con los dos números dados (una adición o una sustracción). En realidad, el porcentaje de alumnos que contempló la posibilidad de que hubiese más de una solución fue dramáticamente bajo, es decir, de tan solo el 5%.

Los problemas con la solución incluida. Otras investigaciones han enfrentado a los niños a otro tipo de problemas no estándar que pueden ser resueltos ofreciendo como solución uno de los números incluidos en el problema. Así, Selter (1994) solicitó a niños de 3.º de E.P. que resolviesen una variante del problema del capitán, en el que se incluía, además de los dos datos irrelevantes, un tercer dato que indicaba la edad: «Un pastor de 27 años de edad tiene 19 ovejas y 10 cabras. ¿Qué edad tiene el pastor?». En este caso, el haber incluido de forma explícita la edad del pastor tampoco ayudó a los alumnos a solucionar con éxito el problema. En vez de responder que el pastor tenía 27 años, la mitad de los niños sumaba la edad del pastor a los otros dos números o realizaba dos operaciones aritméticas diferentes con los tres números dados. Van Dooren, De Bock, Hessel, Janssens y Verschaffel (2005) presentaron a niños de cursos comprendidos entre 2.º de E.P. y 2.º de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) distintos problemas de proporcionalidad y de falsa proporcionalidad en los que la solución se incluía en el texto, como el siguiente

«Un grupo de 5 músicos tocan una pieza de música en 10 min. Otro grupo de 35 músicos va a reproducir la misma pieza musical. ¿Cuánto tiempo le llevará a este grupo tocar la pieza?». En general, solo el 30.6% de los niños se dio cuenta de que la solución aparecía en el problema, con un incremento general desde 3.º de E.P. hasta 2.º de E.S.O., exceptuando los cursos intermedios en los que el rendimiento se mantuvo estable (5.º y 6.º de E.P.). Curiosamente, el número de respuestas erróneas basadas en la proporcionalidad aumentó desde 2.º hasta 6.º de E.P. Los autores llegaron a la conclusión de que, probablemente, el aumento de este tipo de errores en los estudiantes de quinto y sexto estaba relacionado con el tipo de problemas que habían sido tratados en el aula recientemente.

Los problemas con información extraña. Una última categoría incluye problemas no estándar que contienen información superflua en el enunciado. En otras palabras, además de los números que son necesarios para hallar la solución, el enunciado del problema también contiene uno o más números que son irrelevantes (p. e., Carpenter et al., 1988; Kouba et al., 1988; Littlefield y Riesser, 1993). Por ejemplo, Littlefield y Riesser (1993), con el objetivo de analizar la dificultad que suponía la inclusión de información irrelevante, seleccionaron a alumnos de 5.º de E.P. con mejor y peor rendimiento en matemáticas, y les presentaron problemas en los que se

incluía información relevante e irrelevante con diferentes niveles de similitud, como el siguiente problema con datos irrelevantes no similares: «En el primer día de la gran carrera, Anthony corrió 12 millas. El segundo día corrió 9 millas. Shelley vendió 15 litros de limonada durante la carrera. También dio 8 litros de agua fría. ¿Cuánta distancia corrió Anthony?». En el caso de los estudiantes con mejor rendimiento, el porcentaje de éxito se situó alrededor del 95%, mientras que para los de peor rendimiento matemático fue de aproximadamente el 65%. Además, por lo general, los niños detectaban más fácilmente que la información era superflua cuando dicha información no era similar a los datos relevantes. Los autores interpretaron estos resultados como una prueba más de que los niños con peor nivel en matemáticas realizan sin éxito un enfoque superficial basado en que «deben hacer algo con todos los números que figuran en el problema», prestando poca o ninguna atención a la función real que cumplen los números en la estructura del problema.

En conclusión, a pesar de las diferencias evidentes entre los diversos tipos de problemas, la investigación previa ha proporcionado evidencia empírica sobre el enfoque superficial, rutinario y no realista que los niños de Educación Primaria emplean para resolver distintos problemas no estándar, abordándolos como si fuesen problemas estándar. Estos resultados pueden in-

interpretarse como una prueba de que los estudiantes, en general, y los que tienen peor nivel en particular, tienden a abordar y resolver problemas con la fuerte expectativa de que son problemas estándar y sin la intención de construir un modelo situacional y matemático que sea apropiado. Esta expectativa se basa en creencias (implícitas) tales como: (a) todo problema que se presenta en clase de matemáticas tiene una solución, (b) solo hay una única respuesta correcta, numérica y precisa, para cada problema, (c) es necesario realizar cálculos para resolver un problema, y (d) todos los números que figuran en el enunciado deben utilizarse en los cálculos.

¿De dónde proceden las dificultades de los alumnos para resolver los problemas no estándar?

La interpretación anterior nos lleva a la siguiente pregunta: ¿cómo se desarrollan dichas estrategias superficiales y creencias sobre la resolución de problemas aritméticos escolares? Se supone que el desarrollo de las estrategias de los estudiantes y sus concepciones sobre la resolución de problemas se produce implícitamente, poco a poco, y tácitamente durante la inmersión en la cultura de la clase de matemáticas. En otras palabras, las estrategias y las creencias de los estudiantes se desarrollan a partir de sus percepciones e interpretaciones del contrato didáctico (Brousseau, 1997)

o de las normas socio-matemáticas (Yackel y Cobb, 1996) que determinan, en cierta medida de manera explícita, pero principalmente de forma implícita, cómo se deben comportar en clase de matemáticas, qué problemas se pueden esperar, cuál es la forma de resolverlos y discutirlos con el profesor, y así sucesivamente. En concreto, esta enculturación parece ser causada principalmente por dos aspectos que se derivan de la práctica educativa actual: (1) la naturaleza de los problemas que se presentan en clase, y (2) la forma en la que estos problemas son concebidos y tratados por los profesores (p. e., Freudental, 1991; Gerofsky, 1996; Orrantia, González, y Vicente, 2005; Reusser y Stebler, 1997; Schoenfeld, 1991; Wyndhamn y Säljö, 1997).

En primer lugar, vamos a detenernos en el primer factor explicativo. En un intento de resumir las características de los problemas verbales tradicionales que aparecen en las aulas y en los libros de texto y que, como se ha mencionado anteriormente, se encuentran en la base de las estrategias inadecuadas y las creencias de los estudiantes sobre cómo resolver los problemas, Reusser y Stebler (1997) afirmaron que:

La mayoría de los problemas aritméticos que se utilizan en la enseñanza de las matemáticas se formulan como si fuesen viñetas verbales semánticamente empobrecidas. Los estudiantes no solo saben por su experiencia escolar con las matemáticas que todos los problemas

son indudablemente resolubles, sino también que todos los datos incluidos en un problema son relevantes para poder resolverlo, y todo lo que pueda ser necesario está incluido en el enunciado del problema. Siguiendo este guión, muchos de los enunciados de los problemas degeneran en ecuaciones mal disfrazadas (p. 323).

Si la gran mayoría de los problemas incluidos en los libros de texto y en las evaluaciones presentan estas características, no debería ser una sorpresa que muchos alumnos desarrollen gradualmente, e inevitablemente, estrategias superficiales y creencias erróneas sobre la resolución de problemas. En relación con esto último, podemos puntualizar que se han analizado qué tipos de problemas de estructura aditiva se incluyen en los libros de texto de tres importantes editoriales españolas —Santillana, SM y Anaya— usadas en Educación Primaria. Dichos análisis han puesto de manifiesto que, considerando todos los niveles escolares conjuntamente, solo un total del 3.1, 1.6 y 0.6% de los problemas, respectivamente para cada editorial, omitían datos relevantes o contenían información superflua (Orrantía et al., 2005). Del mismo modo, Schoenfeld (1991) encontró que la gran mayoría de los problemas incluidos en algunos libros de texto de Estados Unidos (en algunos casos hasta el 90% de los problemas) se podían solucionar por medio de estrategias basadas en palabras clave. Es evi-

dente que, tras ser expuestos frecuentemente a problemas estándar, pueda esperarse que los alumnos los aborden mediante estrategias superficiales relacionadas con creencias incorrectas, en lugar de modelarlos matemáticamente de una forma más auténtica y profunda acompañada de creencias más abiertas y productivas (Freudental, 1991; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1991; Verschaffel et al., 2000; Wyndham y Säljö, 1997).

Un segundo factor explicativo plausible para el desarrollo de dichas estrategias y creencias sobre la resolución de problemas es la forma en la que estos problemas se conciben y se tratan en la actualidad por los profesores en clase de matemáticas. En términos generales, los profesores no hacen comentarios explícitos ni reflexionan sobre el género peculiar de los problemas que plantean en clase de matemáticas (Gerofsky, 1996). Basándose en un análisis en profundidad de las interacciones que se producen entre maestros y alumnos de dos clases de 5.º de E.P. en torno a los problemas, Depaepe, De Corte y Verschaffel (2010) concluyeron que los comentarios espontáneos de dichos alumnos sobre la naturaleza ambigua y problemática de los problemas o las sugerencias para dar interpretaciones o soluciones alternativas, rara vez se consideraban o se valoraban en clase. Análogamente, Verschaffel, De Corte y Borghart (1997) pidieron a (futuros) profesores de Educación Primaria que, en primer

lugar, resolviesen una serie de problemas que pueden ser considerados como problemáticos desde un punto de vista realista (como el mencionado problema de la distancia hasta la escuela). En segundo lugar, los futuros maestros debían evaluar cuatro respuestas alternativas de (imaginarios) alumnos a dichos problemas mediante una de estas tres opciones: «respuesta absolutamente correcta», «respuesta parcialmente correcta y parcialmente incorrecta» o «respuesta totalmente incorrecta». Para cada problema, las cuatro soluciones alternativas siempre incluían la respuesta no realista estándar y la respuesta realista más razonable —además de otras dos respuestas incorrectas—. Los resultados mostraron que solo la mitad de las soluciones ofrecidas por los futuros docentes en la primera prueba pudieron ser consideradas como respuestas realistas, y, en la segunda prueba, las evaluaciones que hicieron de las típicas respuestas no realistas de los alumnos ¡fueron mucho más positivas que cuando los alumnos realizaban consideraciones realistas que les conducían a respuestas sensiblemente más sensatas!

En suma, la evidencia disponible sugiere que las creencias y las estrategias de los alumnos sobre la resolución de problemas no se desarrollan como resultado de la enseñanza directa, sino que surgen de la propia naturaleza de los problemas incluidos en los libros de texto y las evaluaciones con las que se enfrentan habitualmente, así como de

la interacción permanente profesor-alumno en torno a estos problemas como parte de una práctica y cultura tradicionales.

Objetivos y preguntas de investigación

El objetivo del presente estudio ha sido triple. El primer objetivo fue analizar el impacto que las cuatro creencias expuestas anteriormente sobre la resolución de problemas tienen en el pensamiento de los niños. Para ello van a emplearse cuatro tipos de problemas no estándar que directamente contradicen dichas creencias: (1) un problema *irresoluble*, (2) un problema con *soluciones múltiples*, (3) un problema con la *solución incluida* en el enunciado, y (4) un problema que contiene información relevante y *datos irrelevantes*. Al comparar los resultados de los alumnos en la resolución de problemas que contradicen sus creencias, esperamos recabar información acerca de la fuerza de cada una de ellas. No se ha realizado ninguna predicción sobre la fuerza relativa de estas diferentes creencias, excepto que se prevé que el problema con información irrelevante será el más sencillo porque viola solo mínimamente la estructura típica de los problemas estándar (descrita por Gerofsky, 1996).

El segundo objetivo fue examinar la evolución del rendimiento de los niños en la resolución de problemas no estándar a lo largo de todo el periodo de Educación Primaria.

Diversos estudios previos habían puesto de manifiesto las dificultades experimentadas por los alumnos procedentes de distintos niveles educativos, pero tan solo en algunos se han descrito desde una perspectiva evolutiva (p. e., Baruk, 1985; Radatz, 1983; Reusser, 1988; Van Dooren et al., 2005), y no se conoce ningún estudio que haya involucrado a niños de todos los niveles de Educación Primaria comparando al mismo tiempo los cuatro tipos de problemas no estándar anteriormente revisados. En el presente estudio se ha pretendido evaluar si el rendimiento de los niños mejora en los niveles educativos superiores. De nuevo, no ha sido sencillo realizar predicciones al respecto. Por un lado, se podría argumentar que, teniendo en cuenta que los niños experimentan un importante desarrollo general en el pensamiento y en las habilidades de razonamiento desde 1.º hasta 6.º de E.P. (p. e., Inhelder y Piaget, 1958; Montangero, 1996), y en particular, en diversos aspectos relacionados con el pensamiento matemático (para una revisión ver p. e., Nunes, Bryant, Sylva, y Barros, 2009; Schliemann y Carraher, 2002), se podría prever un aumento en el nivel de éxito obtenido en la resolución de los cuatro problemas no estándar ligado al aumento del nivel escolar desde 1.º hasta 6.º de E.P. Por otro lado, considerando que algunos investigadores han encontrado previamente solo una mejora marginal relacionada con la edad en la resolución de problemas no es-

tándar (Baruk, 1985; Reusser, 1988; Van Dooren et al., 2005), y en algunos casos incluso una disminución en el rendimiento a medida que el nivel escolar de los niños aumenta (ver Radatz, 1983; Van Dooren et al., 2005), se podría igualmente argumentar que no se espera un fuerte efecto positivo del nivel escolar de los alumnos.

El tercer objetivo fue analizar los posibles cambios en la naturaleza de los errores en relación con el tipo de problema y el nivel escolar de los alumnos. En la mayoría de los estudios anteriores, el análisis había estado centrado en el porcentaje de respuestas correctas. En el presente estudio el objetivo ha sido incorporar también una categorización más minuciosa y sistemática del análisis de los errores. Mediante un análisis más detallado de los errores, se espera hallar más evidencias acerca de la naturaleza de las creencias de los alumnos y cómo han afectado al proceso de resolución de problemas. En este sentido, cabe preguntarse si el contacto gradual de los alumnos con las cuatro operaciones aritméticas sumado a un dominio superior de dichas operaciones podría influir en la naturaleza de las soluciones erróneas. Por ejemplo, una de las predicciones del contrato didáctico es que los alumnos que resuelven los problemas verbales de forma superficial tienden a aplicar de forma rutinaria la última operación aritmética estudiada o aquella que han practicado en mayor medida (Sowder,

1988). Por ello, la predicción es que los niños de primer ciclo de Educación Primaria estarán más inclinados a confiar en la operación de adición para encontrar la solución a los problemas no estándar, mientras que los alumnos de niveles educativos superiores tenderán a aplicar erróneamente las cuatro operaciones aritméticas (o distintas combinaciones de estas).

Método

Participantes

En este estudio han participado 300 estudiantes desde 1.º hasta 6.º de Educación Primaria. Se seleccionaron 50 alumnos de cada nivel escolar (edades comprendidas entre 6 y 12 años) provenientes de un colegio público español de nivel socio-cultural medio (niños = 51%, niñas = 49%). Todos los participantes fueron seleccionados al azar de las dos clases existentes en cada curso escolar, siempre y cuando los niños tuviesen un nivel normal de rendimiento matemático. Si algún niño estaba recibiendo algún tipo de apoyo especial, independientemente del tipo de materia, fue excluido de la muestra.

Material

El material presentado consistió en un cuadernillo compuesto de seis problemas: cuatro problemas no estándar y dos problemas distractores estándar que podían resolverse fá-

cilmente realizando una sustracción con los dos números que figuraban en el problema (p. e., «Lucía tiene 20 euros en su hucha y compra un anillo que cuesta 7 euros. ¿Cuánto dinero tiene Lucía ahora?»). Como se ha indicado anteriormente, los problemas no estándar fueron formulados para violar las cuatro creencias bien documentadas sobre la resolución de problemas verbales, esto es: (a) un problema *irresoluble* (que viola la creencia de que cada problema tiene una solución numérica), (b) un problema con *soluciones múltiples* (contrario a la creencia de que solo hay una única respuesta numérica para cada problema), (c) un problema en el que está *la solución incluida* en el enunciado (opuesto a la creencia de que es siempre necesario realizar una operación aritmética), y (d) un problema con *datos irrelevantes* (que desafía la creencia de que la solución a un problema se obtiene mediante la realización de una o varias operaciones aritméticas usando todos los números que figuran en el enunciado). Los cuatro problemas no estándar pueden consultarse en el Cuadro 1.

Para evitar los posibles efectos del orden de presentación de los problemas, se empleó un diseño de cuadrado latino. Por tanto, se crearon cuatro versiones del cuadernillo en las que se varió el orden de presentación de los cuatro problemas no estándar. En todos ellos, los dos problemas distractores se situaron en la tercera y quinta posición.

Cuadro 1

Los Cuatro Tipos de Problemas No Estándar Usados en el Estudio

Irresoluble	María ha ido al circo con su amiga Ana. María tiene 13 euros y su amiga Ana le deja 7 euros para pagar la entrada. ¿Cuánto dinero tiene Ana ahora?
Soluciones múltiples	Lucía ha comprado una bolsa de 14 chicles de varios sabores. Como le han puesto pocos de menta y son sus favoritos, Lucía pide después 8 chicles de menta. ¿Cuántos chicles de menta tiene ahora Lucía?
Solución incluida	Un pastor tiene 17 ovejas en su granja. Como quiere ampliar la granja compra 8 cabras. ¿Cuántas ovejas tiene ahora el pastor en la granja?
Datos irrelevantes	Lorena ha comprado una caja de 12 pinturas para clase de Plástica. Su amiga Silvia le regala otra caja que contiene 3 bolígrafos y 9 pinturas. ¿Cuántas pinturas tiene ahora Lorena?

Nota. Los problemas se presentaron en español.

Para evitar posibles dificultades relacionadas con otros factores relacionados con la tarea, todos los problemas se formularon con la misma estructura semántica, es decir, con una estructura de cambio y con la incógnita situada en el resultado. Además, todos los problemas se formularon de tal manera que la solución errónea basada en un modelado superficial del problema derivara en la adición de (todos) los números ofrecidos en el problema. También, para evitar que posibles dificultades relacionadas con los cálculos pudiesen jugar un papel decisivo, se emplearon números pequeños (es decir, en todos los casos por debajo del 20), con el primer sumando comprendido entre 10 y 19 y el segundo sumando inferior a 10.

Procedimiento

A todos los niños, independientemente del nivel escolar, se les suministró de forma individual una de las cuatro versiones del cuadernillo de problemas durante el horario escolar. Las entrevistas tuvieron una duración aproximada de 20 minutos. Se decidió optar por este procedimiento de recogida de los datos porque se esperaba que la entrevista individual, en comparación con una prueba de aplicación colectiva, produciría un mayor número de respuestas que ayudasen a explicar las creencias de los alumnos sobre (cómo abordar y resolver) los problemas verbales (Verschaffel y De Corte, 1997; Wyndham y Säljö, 1997).

Los problemas se presentaron por escrito en hojas distintas y fueron leídos en voz alta por el entre-

vistador. En el caso de que los niños necesitasen una segunda lectura, podían pedirle al entrevistador que leyese el problema de nuevo o (re) leer ellos mismos el problema todas las veces que quisiesen. En todos los problemas, a los niños se les pedía primero que ofreciesen una solución y, después, que la explicasen; o si no podían resolver el problema, que expresasen sus dudas o cuáles eran las dificultades que no les permitían dar una respuesta. Si los niños no sabían cómo resolver el problema y/o pedían ayuda, el entrevistador simplemente volvía a leer el problema y, si después seguían sin responder o no querían hacerlo, el entrevistador les preguntaba cuáles eran los motivos por los que no podían dar una respuesta o por qué tenían dificultades.

Categorización de las respuestas

Todas las respuestas de los niños fueron transcritas durante las entrevistas. Se diferenciaron cinco categorías de respuesta: una categoría de respuestas correctas y cuatro categorías de respuestas incorrectas. En cada problema, los niños recibían 1 punto (si habían dado la respuesta correcta) o 0 puntos (si su respuesta consistía en una de las cuatro categorías de errores), por lo que finalmente podían obtener una puntuación total que oscilaba entre 4 y 0 puntos. El procedimiento para asignar las soluciones a una de las cinco categorías de respuesta se basó en una combi-

nación de: (a) el análisis de la respuesta del niño (p. e., la respuesta numérica o la afirmación del niño de que el problema era irresoluble, de que había más de una solución posible, etc.), (b) el análisis de las explicaciones que ofrecían los niños para justificar el uso de una o varias operaciones aritméticas, o la explicación de que no habían necesitado hacer ningún cálculo para hallar la solución (ver el Apéndice para una explicación más detallada del esquema de categorización). Teniendo en cuenta los objetivos del estudio, los errores de cálculo no se consideraron relevantes para categorizar las respuestas en ninguna de las cinco siguientes categorías de respuesta:

1. Respuesta correcta: la respuesta correcta (numérica o no) debía estar seguida de una explicación adecuada de las demandas del problema, es decir, los niños necesitaban mencionar de forma explícita, dependiendo del tipo de problema, que no era posible encontrar una solución porque faltaba información numérica (problema *irresoluble*), que era posible ofrecer más de una solución en función del valor que se asignase al término «pocos» (problema con *soluciones múltiples*), que no era necesario hacer una operación aritmética debido a que la solución se ofrecía en el propio problema (problema en el que está la *solución incluida*), o que algún dato no era necesario

- para resolver el problema (problema con *datos irrelevantes*).
2. Respuesta incorrecta de adición: la solución está basada en la adición de todos los números que se incluyen en el enunciado del problema, es decir, los dos datos que figuran en el problema *irresoluble*, el que tiene *soluciones múltiples* y en el que está la *solución incluida*, y los tres datos en el problema con *datos irrelevantes*.
 3. Errores basados en otras operaciones incorrectas: son respuestas basadas en la realización de una o más operaciones aritméticas *diferentes* con los números que aparecen en el enunciado (p. e., una sustracción, una multiplicación, una división o la combinación de dos o más de las cuatro operaciones aritméticas).
 4. Ausencia de respuesta: si el niño no ofrecía ninguna respuesta o decía que no podía resolver el problema y, además, era incapaz de ofrecer una explicación sobre los motivos por los que no había sido capaz.
 5. Otras respuestas: se recogen en esta categoría todas las soluciones distintas a las anteriores que no han podido ser codificadas en ninguna de las cuatro categorías previas.

Todas las respuestas de los niños fueron codificadas por la primera autora. De todas ellas, se seleccionó al azar una muestra del 10% de las respuestas de los niños

de todos los niveles escolares que fueron categorizadas independientemente por un segundo evaluador. La fiabilidad entre ambos evaluadores fue del 0.96, es decir, un nivel de acuerdo casi perfecto (coeficiente kappa ponderado, Cohen, 1968).

Resultados

Los resultados se dividen en dos secciones. En primer lugar, se presentan los resultados del análisis cuantitativo del impacto de las variables independientes sobre el número de respuestas correctas y, a continuación, se describen los resultados procedentes del análisis cualitativo de los errores de los alumnos.

Análisis cuantitativo

En la Tabla 1 se muestran los porcentajes y las desviaciones típicas de las respuestas correctas a los cuatro problemas no estándar en los seis niveles escolares. El análisis de los datos se ha realizado mediante un ANOVA mixto 6 (Nivel escolar: 1.º vs. 2.º vs. 3.º vs. 4.º vs. 5.º vs. 6.º de E.P.), como factor intersujeto \times 4 (Tipo de problema: *irresoluble* vs. *soluciones múltiples* vs. *solución incluida* vs. *datos irrelevantes*), como factor intragrupo, con medidas repetidas en el último factor.

El primer resultado destacable es que tan solo el 37.9% de las respuestas globales pudieron ser consideradas correctas. Este porcentaje indica las grandes dificultades que

Tabla 1

Porcentaje de Respuestas Correctas (y Desviaciones Típicas) a los Cuatro Tipos de Problema en Función del Nivel Escolar

	Irresoluble	Soluciones múltiples	Solución incluida	Datos irrelevantes	Media
1.º E.P.	2 (.14)	8 (.27)	18 (.39)	34 (.48)	15.5 (.32)
2.º E.P.	4 (.20)	10 (.30)	26 (.44)	32 (.47)	18 (.35)
3.º E.P.	18 (.39)	30 (.46)	36 (.49)	48 (.51)	33 (.46)
4.º E.P.	30 (.46)	36 (.49)	62 (.49)	70 (.46)	49.5 (.48)
5.º E.P.	22 (.42)	50 (.51)	72 (.45)	78 (.42)	55.5 (.45)
6.º E.P.	34 (.48)	48 (.51)	60 (.50)	82 (.39)	56 (.47)
Media	18.3 (.39)	30.3 (.46)	45.7 (.50)	57.3 (.50)	

encontraron los niños para resolver los cuatro problemas no estándar, en consonancia con nuestra primera predicción, y con los resultados precedentes de varios estudios previos, en los que se había encontrado un número alarmantemente alto de respuestas incorrectas en la resolución de diferentes tipos de problemas no estándar (ver también Baruk, 1985; Jiménez y Ramos, 2011; Littlefield y Riesser, 1993; Radatz, 1983; Reusser, 1988; Selter, 1994; Van Dooren et al., 2005; Verschaffel et al., 1994). En general, el bajo nivel de éxito a la hora de resolver este tipo de problemas confirma que los niños presentan una serie de creencias incorrectas sobre los problemas verbales y la forma de resolverlos

en clase de matemáticas. Centrándonos ahora en el análisis de este porcentaje global desde una perspectiva individual, se ha encontrado igualmente que un elevado porcentaje de alumnos fue incapaz de considerar adecuadamente las demandas específicas de cada tipo de problema, ya que el 34.7% de los niños no resolvió correctamente ninguno de los cuatro problemas no estándar, y solo el 12% de los participantes resolvió correctamente los cuatro problemas.

En segundo lugar, los resultados del ANOVA revelaron un efecto significativo del Tipo de Problema, $F(3,882) = 73.18$, $p < .01$, $\eta_p^2 = .199$. Específicamente, se ha encontrado un incremento de la di-

ficultad de los problemas, comenzando por el problema *irresoluble* (18.3%), seguido por el que tiene *soluciones múltiples* (30.3%), el que tiene la *solución incluida* (45.7%) y, finalmente, el problema con *datos irrelevantes* que resultó ser el más sencillo (57.3%) (ver Tabla 1). El análisis de las comparaciones múltiples mostró que las diferencias en el aumento del nivel general de dificultad de los problemas fueron significativas (prueba de Bonferroni, $p < .01$). Si asumimos que las mencionadas diferencias en el nivel de éxito en cada tipo de problema son un reflejo de la fuerza de las distintas creencias erróneas, este segundo hallazgo demuestra, como se esperaba, que ciertas creencias están más arraigadas que otras en el pensamiento de los niños.

En tercer lugar, el efecto del Nivel escolar fue también significativo, $F(5,294) = 17.57$, $p < .01$, $\eta_p^2 = .230$. La prueba de comparaciones múltiples mostró que eran significativas las diferencias encontradas entre, por un lado, los tres primeros niveles escolares y, por otro, los tres niveles superiores (prueba de Bonferroni, $p < .01$), pero no se hallaron diferencias significativas entre los tres primeros cursos (15.5 vs. 18 vs. 33%, respectivamente, para 1.º, 2.º y 3.º de E.P.) ni entre los tres últimos cursos (49.5 vs. 55.5 vs. 56%, respectivamente, para 4.º, 5.º y 6.º de E.P.) (ver Tabla 1). Así, a pesar de que se ha encontrado un aumento del nivel

de éxito parejo al nivel educativo de los alumnos durante la Educación Primaria, ha sido bastante sorprendente encontrar un rendimiento tan bajo en los tres últimos cursos de Educación Primaria e, incluso, que no se produjese un progreso significativo entre ellos. Como se muestra en la Tabla 1, los niños de 4.º, 5.º y 6.º de E.P. han alcanzado un porcentaje máximo de respuestas correctas que se sitúa en torno al 50%.

Finalmente, la interacción entre el Tipo de Problema y el Nivel escolar fue también significativa, $F(15,882) = 1.71$, $p < .05$, $\eta_p^2 = .028$. Como se muestra en la Figura 1, el patrón de desarrollo del rendimiento de los niños fue muy similar en cada uno de los cuatro problemas no estándar debido a que el nivel de éxito de los niños siempre aumentó a medida que lo hacía el nivel escolar, exceptuando dos ocasiones: una en la que el grado de éxito se mantuvo estable (p. e., en 5.º y 6.º de E.P. en la resolución del problema con *soluciones múltiples*) y una segunda ocasión en la que la tasa de éxito incluso disminuyó (p. e., los alumnos de 5.º de E.P. en el problema *irresoluble* y los de 6.º de E.P. en el problema en el que está la *solución incluida* en el enunciado) (ver también Tabla 1). Como resultado de la consistencia en el patrón de desarrollo en todos los tipos de problema, el orden global de dificultad de los mismos se mantuvo en todos los niveles escolares (ver Figura 1).

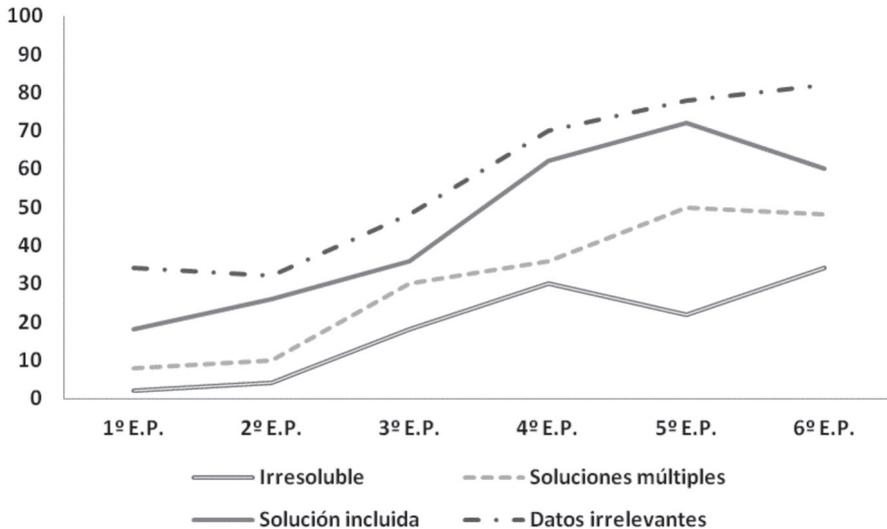


Figura 1. Porcentajes del nivel de éxito en cada tipo de problema en función del nivel escolar.

La diferencia de medias entre el rendimiento de los alumnos de 4.º y 5.º de E.P. en el problema *irresoluble* ($M = .30$ vs. $M = .22$, respectivamente) y 5.º y 6.º de E.P. en el problema con la *solución incluida* ($M = .72$ vs. $M = .60$, respectivamente) fue calculada mediante la prueba t de Student para muestras independientes. Los resultados muestran que la diferencia de medias es únicamente significativa en el último caso ($p < .05$).

Análisis cualitativo de los errores

En esta sección se presenta primero la distribución global de las cuatro categorías de errores. A continuación se muestran los resultados

del análisis cualitativo de los errores en función del tipo de problema y, por último, en relación con el nivel escolar. Teniendo en cuenta que el porcentaje global de errores en cada tipo de problema y en cada nivel escolar fue distinto (ver Tabla 1), se ha calculado el porcentaje de respuestas incorrectas en relación con el número total de errores cometidos.

El análisis global de los errores mostró que, en todos los Tipos de problema, la mayoría eran respuestas incorrectas de adición (64.5%), seguidas por errores basados en otras operaciones incorrectas (21.1%), otras respuestas (11.5%) y, finalmente, ausencia de respuesta (2.8%). Tal y como se esperaba, la apariencia similar de estos proble-

mas con los problemas estándar de adición, provocó que la mayoría de los errores se produjesen debido a un análisis superficial, produciendo como resultado la adición de todos los números incluidos en el enunciado, independientemente de las demandas reales del problema. Un elevado porcentaje de errores provino de la aplicación de otra operación aritmética incorrecta con los números dados, es decir, la resta, la multiplicación, la división, o la combinación de dos o más de las cuatro operaciones aritméticas. La tercera categoría de errores, denominada otras respuestas, ha agrupado una variedad de errores numéricos que se describirán más adelante. Por último, solo el 2.8% del total de las respuestas incorrectas se produjo debido a que los niños no ofrecían ninguna solución (ver Tabla 2). En este último caso, lo más probable es que este porcentaje de respuestas haya sido tan bajo porque la naturaleza de estos problemas no estándar

evocaba fuertemente la estrategia de resolución basada en «sumar todos los números». Pero, además, el hecho de que los niños hayan sido evaluados de forma individual, en vez de colectivamente, puede haber provocado igualmente que muy pocos errores provengan de la ausencia de respuesta.

Además, el patrón de distribución de los errores en los cuatro tipos de problema fue diferente (ver también Tabla 2). La frecuencia de respuestas incorrectas basadas en la adición de todos los números aumentaba progresivamente a medida que la dificultad del problema disminuía, desde un 39.6% en el problema más difícil, es decir, el problema *irresoluble*, hasta un 82.7% en el más fácil, esto es, el problema con *datos irrelevantes*. Por el contrario, los errores basados en otras operaciones aritméticas incorrectas y las otras respuestas tendían a aumentar a medida que lo hacía el nivel de dificultad del problema.

Tabla 2

Porcentaje de Respuestas Incorrectas, en Relación con el Porcentaje Total de Errores, en cada Tipo de Problema

	Irresoluble	Soluciones múltiples	Solución incluida	Datos irrelevantes	Media
Respuesta incorrecta de adición	39.6	60.2	79.2	82.7	65.4
Errores basados en otras operaciones incorrectas	37.1	21.1	15.2	11.0	21.1
Ausencia de respuesta	2.1	4.7	1.9	0	2.8
Otras respuestas	21.2	14.0	3.7	6.3	11.3

Nota. El porcentaje total de errores en cada tipo de problema fue el siguiente: *irresoluble* = 81.7%, *soluciones múltiples* = 69.7%, *solución incluida* = 54.3% y *datos irrelevantes* = 42.7%.

En este punto, vamos a pasar a realizar un análisis más detallado de estos errores, basándonos en la distribución de las tres principales categorías de errores y la naturaleza precisa de dichos errores en cada problema. Como se indicó anteriormente, el problema *irresoluble*, que violaba la creencia de que «todo problema tiene una solución», fue el más complejo. Sorprendentemente, en este tipo de problema se encontró que la distribución de las tres principales categorías de errores fue la más similar. Así, el 39.6% de todos los errores se produjeron debido que los niños sumaban todos los números incluidos en el problema, el 37.1% provenían de la aplicación incorrecta de una o más operaciones aritméticas diferentes y el 21.2% de ellos fueron categorizados como otras respuestas. Una revisión más minuciosa de los errores incluidos en la categoría de otras respuestas reveló que podían diferenciarse tres tipos. En primer lugar, el 15.9 del 21.2% de la categoría otras respuestas se produjeron debido a que los niños se daban cuenta de que faltaba un dato numérico, por lo que lo añadían ellos mismos para hacer el problema resoluble (p. e., *Ana tiene ahora 0 euros, porque antes tenía 7 euros y le dio 7 a María, así que ya no tiene más dinero. Se supone que ella tenía 7 euros porque en caso contrario estaría escrito en el problema*). A pesar de que estas respuestas pueden considerarse bonitos ejemplos de la intención de algunos niños de «dotar de sentido»

al problema (Schoenfeld, 1991; Selter, 1994; Verschaffel et al., 2000), han sido consideradas soluciones incorrectas, en el contexto del presente estudio, porque se basaban en elaboraciones aleatorias del enunciado del problema para poder hacer cálculos, en vez de limitarse a hallar una solución atendiendo a las demandas (problemáticas) de la tarea. En segundo lugar, el 2.5% de las otras respuestas eran soluciones que consistían en ofrecer una respuesta numérica exacta, demostrando una vez más la necesidad de llegar a una solución numérica de cualquier manera y sin proporcionar una justificación clara de cómo habían obtenido ese número (p. e., *la solución es 6 porque es la respuesta al problema*). En tercer lugar, el 2.8% de las otras respuestas se derivaron de un malentendido sobre cuál era el dato que faltaba (p. e., *no sé la respuesta, porque no aparece el precio de la entrada en el enunciado*).

En orden de dificultad decreciente, los niños encontraron menores —aunque aún considerables— dificultades a la hora de resolver el problema con *soluciones múltiples*, contrario a la creencia de que todo problema «tiene una única respuesta numérica y precisa». En este problema, la mayoría de los errores fueron igualmente clasificados como respuestas incorrectas de adición (60.2%), pero también se produjeron bastantes errores basados en otras operaciones incorrectas (21.1%) y otras respuestas (14%). Curiosamente, en esta última cate-

goría fue también posible distinguir dos tipos de respuesta. La primera consistió nuevamente en distintas adaptaciones personales de la historia descrita en el problema con el objetivo de transformarlo en un problema estándar, resoluble mediante una única respuesta numérica (10.5 del 14% de las otras respuestas). Para ello, algunos alumnos añadían información semántica que les permitía deshacerse del elemento numérico impreciso «pocos» (p. e., *yo creo que los ‘pocos’ chicles de menta ya se los ha comido y no cuentan, así que solo tiene 8 chicles de menta*), en otras ocasiones convertían la información imprecisa «pocos» en un número preciso (p. e., *unos «pocos» pueden ser 1, solamente 1, por lo que ahora tiene 9 chicles de menta*). El segundo tipo error considerado como otras respuestas (el 3.5 restante del 14% total) fueron soluciones en la que los niños ofrecían respuestas numéricas precisas, pero inventadas, sin añadir una explicación clara, y demostrando la necesidad de solucionar el problema incluso cuando no podían explicar cómo lo habían hecho (p. e., *5 porque lo he adivinado*).

El problema en el que se encuentra la *solución incluida* en el enunciado, que contradecía expresamente la falsa creencia de que «siempre es necesario hacer una operación aritmética para resolver un problema», fue más fácil para los niños. En este problema, la mayoría de los errores fueron respuestas incorrectas de adición (79.2%) y, en menor me-

da, errores basados en otras operaciones incorrectas (15.8%). Solamente el 3.7% de los errores totales se clasificaron como otras respuestas: de ellos, el 2.4% se derivó también de la necesidad de ofrecer una solución diferente a la que estaba presente en el enunciado, que resultara de la aplicación de una operación aritmética, sin comprender o explicar el procedimiento (p. e., *105 ovejas porque pastor ha ampliado la granja*) y el 1.3% restante se debió a que los niños consideraban erróneamente que el problema no tenía solución porque, en vez de percatarse de que la solución estaba ofrecida, se centraban en el hecho de que no podían sumar los datos del problema (p. e., *no se puede resolver porque el pastor ha comprado cabras y el problema pregunta por las ovejas, por lo que no se puede hacer nada con las cabras*).

Finalmente, el problema más sencillo fue el que contenía *datos irrelevantes*. En este problema los alumnos tenían que hacer una operación aritmética, es decir, una adición, pero la dificultad radicaba en detectar que uno de los datos incluidos en el texto —el segundo dato—, era irrelevante y no debía por tanto sumarse junto con los otros dos. En este problema, la mayoría de los errores provenían, como era de esperar, de la suma de los tres números dados (82.7%), en línea con la creencia de los alumnos que «todos los números incluidos en un problema deben ser utilizados en el cálculo». Solo el 11% de las res-

Tabla 3

Porcentaje de Respuestas Incorrectas, en Relación con el Número Total de Errores, en cada Nivel Escolar

	1.º E.P.	2.º E.P.	3.º E.P.	4.º E.P.	5.º E.P.	6.º E.P.	Media
Respuesta incorrecta de adición	75.1	73.3	58.2	53.5	43.8	45.5	58.2
Errores basados en otras operaciones incorrectas	9.5	17.7	32.8	25.7	40.5	26.1	25.4
Ausencia de respuesta	3.0	1.2	1.5	0.0	3.4	6.8	2.7
Otras respuestas	12.4	7.9	7.5	20.8	12.3	21.6	13.8

Nota. El porcentaje total de errores en cada nivel escolar fue: 1.º de E.P. = 84.5%, 2.º de E.P. = 82%, 3.º de E.P. = 69.7%, 4.º de E.P. = 50.5%, 5.º de E.P. = 44.5% y 6.º de E.P. = 44%.

puestas se produjo debido a la aplicación incorrecta de una o más operaciones aritméticas diferentes, o combinadas con la adición. En menor medida, el 6.3% de los errores se categorizaron como otras respuestas: el 5.6% de ellas porque los niños sumaban los dos primeros números, el relevante y el irrelevante e ignoraban el tercer número relevante (p. e., *15 porque Lorena tenía 12 pinturas y ha recibido 3 más*) y el 0.7 restante porque los niños ofrecían una solución, sin dar una explicación clara o aceptable de cómo habían llegado a esa respuesta numérica (p. e., *100 pinturas porque ha recibido un regalo*).

El análisis de los errores en función del Nivel escolar, como se muestra en la Tabla 3, reveló algunas diferencias en la naturaleza de los errores cometidos relacionadas con la edad, de acuerdo con las previsiones del contrato didáctico. Como se muestra en dicha tabla,

la frecuencia de la categoría dominante de errores, es decir, la adición de todos los números, tendió a disminuir con el nivel escolar, salvo en los dos últimos cursos. Específicamente, los porcentajes fueron, desde 1.º hasta 6.º de E.P., 75,1%, 73,3%, 58,2%, 53,5%, 43,8% y 45,5%, respectivamente. Por el contrario, los porcentajes de los errores basados en otras operaciones incorrectas, como la resta, la multiplicación, la división y las diferentes combinaciones de dos o más de las cuatro operaciones aritméticas básicas, tendían a aparecer en mayor medida en los niveles escolares superiores que en los inferiores, aunque en este caso el patrón es algo menos claro.

Desde nuestro punto de vista, no resulta tan sorprendente que la naturaleza de los errores basados en otras operaciones incorrectas cambie con el nivel escolar. Mientras que en España a los estudiantes de 1.º de E.P. se les presenta casi exclu-

sivamente la operación de adición, en 2.º de E.P. sucede lo mismo, de manera sistemática e intensiva, con la sustracción, en 3.º de E.P. se centran especialmente en la instrucción de la multiplicación y la división, y en los niveles posteriores las cuatro operaciones reciben más o menos la misma atención desde diversas tareas matemáticas. Por lo tanto, la disminución en el porcentaje de errores basado en la adición y el consiguiente aumento en el porcentaje de los errores basados en otras operaciones incorrectas en relación con el nivel escolar parece ser un reflejo directo del tipo de operación que se presenta más frecuente o recientemente en clase de matemáticas, tal y como apuntaba Sowder (1988; ver también Verschaffel et al., 2000).

Discusión

En estudios previos se ha documentado un alarmante nivel de respuestas incorrectas cuando se ha pedido a niños de Educación Primaria que resuelvan diversos tipos de problemas matemáticos no estándar. Como una posible explicación, se ha propuesto que el fracaso de los niños proviene de ciertas creencias relacionadas con la resolución de problemas aritméticos que determinan la forma en la que estos se abordan en clase de matemáticas. Se considera que estas creencias son el resultado individual psicológico de las normas socio-matemáticas del aula (Yac-

kel y Cobb, 1996) o, en palabras de Brousseau (1997), del contrato didáctico. Por ejemplo, algunos estudios, en los que se ha entrevistado a los niños y se les ha preguntado por las respuestas incorrectas que previamente habían ofrecido como solución a distintos problemas no estándar, han puesto de manifiesto que estos errores son resultado de creencias, tales como: (1) todos los problemas verbales son resolubles, (2) hay una sola respuesta numérica y precisa correcta para cada problema, (3) siempre se deben realizar cálculos para resolver un problema, y (4) todos los números que se incluyen en el enunciado deben ser utilizados para hallar la solución (Caldwell, 1995; Hidalgo, 1997; Reusser y Stebler, 1997; para una revisión ver Verschaffel et al., 2000).

El presente estudio ha tenido por objeto el estudio sistemático del desarrollo de las cuatro creencias previamente mencionadas sobre la resolución de problemas durante el transcurso de la Educación Primaria. Para ello, se solicitó a niños de niveles escolares desde 1.º hasta 6.º de E.P., en el contexto de una entrevista individual, que resolviesen cuatro tipos de problemas verbales que violaban estas cuatro creencias. El estudio ha confirmado, en primer lugar, las grandes dificultades que presentan los niños a la hora de resolver este tipo de problemas no estándar contrarios a las cuatro creencias previamente mencionadas.

En segundo lugar, se han hallado sustanciales diferencias en el

nivel de dificultad de los cuatro problemas no estándar en función de la creencia que contradecían. En concreto, el problema *irresoluble* fue el más difícil, seguido, en orden de dificultad decreciente, por el de *soluciones múltiples*, el que tenía la *solución incluida* en el enunciado y el problema con *datos irrelevantes*. Estas diferencias indican que algunas creencias están más establecidas en el pensamiento de los niños que otras. El hallazgo de que el problema con *datos irrelevantes* suscitara un número mayor de respuestas correctas sugiere que la creencia consistente en que todos los números que figuran en el enunciado deben utilizarse para resolver un problema es la menos arraigada de todas. En este sentido, cabe mencionar que la descripción de un problema verbal (estándar), proporcionada por Gerofsky (1996), no excluía la posibilidad de que se incluyesen datos irrelevantes (si bien es cierto que se consideraba altamente atípico). El hecho de que el problema en el que está la *solución incluida* fuese más difícil parece indicar que los niños creen con algo más firmeza que la solución adecuada de un problema matemático requiere al menos de una operación aritmética (realizada con los números incluidos en el enunciado). Igualmente, que el problema con *soluciones múltiples* resultase aún más complejo puede interpretarse como una evidencia de que la creencia de que cada problema tiene (solo) una respuesta numérica ha sido más di-

fícil de vencer. Por último, dado que el problema *irresoluble* fue el más complejo de los cuatro, se puede concluir que la concepción de que todos los problemas verbales son sin duda alguna resolubles es extremadamente fuerte. Con relación a esto último, recordamos que Puchalska y Semadeni (1987) observaron que muchos niños que (acertadamente) describían un problema como irresoluble, también consideraban que un mejor estudiante o el propio profesor podrían resolverlo con total seguridad. Si bien el presente estudio no ha tenido por objeto investigar el origen de la fuerza diferencial de estas cuatro creencias, la revisión realizada de la literatura existente sobre el tema (ver: Introducción) sugiere que el origen radica en la naturaleza de los problemas que se incluyen en los libros de texto de matemáticas y en la forma en la que estos son concebidos y tratados por los profesores. Aunque ya hay algunas evidencias que sustentan esta afirmación (p. e., Freudental, 1991; Gerofsky, 1996; Reusser y Stebler, 1997; Schoenfeld, 1991; Wyndham y Säljö, 1997), serían necesarias investigaciones adicionales.

En tercer lugar, se encontró que el porcentaje de respuestas correctas tendía a aumentar a medida que lo hacía el nivel escolar, pero solo se hallaron diferencias significativas entre, por un lado, los tres primeros cursos de Educación Primaria y, por otro, los tres cursos superiores, y en este último caso, estamos bastante lejos de poder afirmar que

obtuvieron un buen resultado, tal y como se había concluido en estudios previos realizados con niños de Educación Primaria, Secundaria e, incluso, maestros en formación (p. e., Baruk, 1985; Reusser, 1988; Van Dooren et al., 2005; Verschaffel et al., 1994). Este resultado general se mantuvo en los cuatro tipos de problema. Desde nuestro punto de vista, en comparación con la cantidad de conocimiento formal que los alumnos han acumulado en el transcurso de los seis años de formación en matemáticas durante el periodo de Educación Primaria, el relativamente bajo rendimiento alcanzado en estos cuatro tipos de problemas matemáticos no estándar, incluso al final de sus estudios, resulta bastante alarmante y sugiere que lo que los niños han aprendido en clase de matemáticas es esencialmente a resolver problemas estándar de forma rutinaria, pero no a enfrentarse adecuadamente, reflexionando de forma cuidadosa, sobre los problemas que se apartan de la norma.

Por último, el análisis cualitativo de los errores mostró que los errores más frecuentes se producían porque los alumnos trataban los problemas no estándar —la mayor parte de las veces de forma inadvertida pero algunas veces conscientemente— como si fuesen problemas estándar, llegando incluso en ocasiones a transformar el enunciado para lograrlo.

Desde una perspectiva metodológica, reconocemos que el presente estudio proporciona solo una evi-

dencia *indirecta*, basada en el comportamiento de los niños, de cómo sus creencias sobre los problemas verbales influyen en las soluciones que finalmente ofrecen a los cuatro problemas no estándar. Por ello, sería interesante complementar de una forma más sistemática el análisis de las respuestas correctas e incorrectas de los niños a problemas que contradicen algunas de sus creencias, con un análisis de sus respuestas a cuestionarios y/o a entrevistas en los que se les pregunte de forma más directa sobre ellas. La comparación de estos diferentes datos puede conducirnos a una explicación más profunda de la naturaleza de la relación existente entre las soluciones de los niños y las creencias sobre la resolución de problemas, así como del nivel de conciencia que los niños tienen sobre ellas.

Anticipándonos a futuras evidencias empíricas de otras investigaciones aún por determinar que serían necesarias, desde una perspectiva educativa, nuestro estudio se suma a las demandas hechas por varios autores (Staub y Reusser, 1995; Verschaffel et al., 2000) en las que se reclama que deben modificarse seriamente las prácticas y la cultura dominantes sobre la resolución de problemas en clase de matemáticas, cambiando tanto la naturaleza de los problemas que sistemáticamente se presentan a los alumnos como la forma en la que estos problemas son tratados por el profesor. Con respecto a la naturaleza de los problemas, muchos autores han abogado

por presentar a los alumnos problemas más variados. Específicamente, además de los problemas típicos escolares que son modelados sin duda alguna mediante la aplicación de una (o la combinación de más de una) de las cuatro operaciones aritméticas básicas con los números dados en el enunciado, los niños deberían igualmente enfrentarse a problemas no estándar, tales como: (a) problemas con información superflua, ambiguos o en los que se omitan datos, en contra de la creencia de que todos los datos incluidos en el enunciado del problema —y solo estos— deben emplearse en los cálculos, (b) problemas que puedan derivar en distintas representaciones de la situación y, por tanto, puedan conducir a soluciones alternativas, en contra de la creencia de que solo hay una correcta interpretación y una única solución para cada problema, (c) problemas que exijan una combinación apropiada de respuestas, como hacer estimaciones en lugar de cálculos precisos, ofrecer intervalos numéricos o, incluso, explicar por qué un determinado problema es irresoluble, y también (d) tareas que requieran que sean los alumnos los que planteen ellos mismos los problemas en vez de resolverlos. Mediante esta diversificación de los problemas se podrían *romper* las creencias de los niños sobre las reglas implicadas en el contrato didáctico. Con respecto a la manera en la que los problemas son tratados por el maestro, los in-

vestigadores proponen que deben introducirse formas alternativas de trabajo y de comunicación con los alumnos en torno a los problemas verbales. Esto podría implicar que se discutiera con los niños de forma explícita sobre cuál es el género de los problemas verbales, su función, sus expectativas y reglas implícitas, así como la relación que tienen con los problemas en el mundo real fuera de la escuela (Gerofsky, 1996; Staub y Reusser, 1995; Verschaffel et al., 2000). Con relación a esto último, pueden destacarse los estudios realizados por Chapman (2009) y Depaepe, De Corte y Verschaffel (2009), en los que se aboga por un mayor equilibrio entre un enfoque «paradigmático» y un enfoque «narrativo» en las discusiones sobre la resolución de problemas en el aula. Reconocemos que llevar a cabo estas recomendaciones para revisar a fondo los problemas verbales y su uso en clase de matemáticas es un plan ambicioso. Sin embargo, en la literatura se encuentran algunos ejemplos de estudios basados en programas de intervención que, deliberada y sistemáticamente, han tenido como objeto cambiar la naturaleza y la enseñanza de los problemas presentados y han logrado cambios significativamente positivos en las creencias de los alumnos sobre (cómo abordar y resolver) los problemas verbales (ver, p. e., Mason y Scrivani, 2004; Verschaffel et al., 1999; Verschaffel y De Corte, 1997).

Referencias

- Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. París: Seuil.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer academic publishers.
- Caldwell, L. (1995). *Contextual considerations in the solution of children's multiplication and division word problems*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Queen, Irlanda del Norte.
- Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Brown, C. A., Kouba, V. L., Silver, E. A., y Swafford, J. O. (1988). Results of the four NAEP Assessment of Mathematics: Trends and conclusions. *Arithmetic Teacher*, 36, 38-41.
- Chapman, O. (2009). Teachers' conceptions and use of mathematical contextual problems in Canada. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadyay (Eds.), *Words and worlds. Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 227-244). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Cohen, J. (1968). Weighted kappa: Nominal scale agreement provision for scaled disagreement or partial credit. *Psychological Bulletin*, 70, 213-220. doi: 10.1037/h0026256
- De Corte, E., y Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.
- Depaepe, F., De Corte, E., y Verschaffel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren y S. Mukhopadyay. (Eds.), *Words and worlds. Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 245-263). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Depaepe, F., De Corte, E., y Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, 26, 152-160. doi: 10.1016/j.tate.2009.03.016
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer academic publishers.
- Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 16(2) 36-45.
- Hidalgo, M. C. (1997). *L'activation des connaissances à propos du monde réel dans la résolution de problèmes verbaux en arithmétique*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Laval, Quebec, Canadá.
- Ilany, B., y Margolin, B. (2010). Language and mathematics: Bridging between natural language and mathematical language in solving problems in mathematics. *Creative Education*, 1, 138-148. doi: 10.4236/ce.2010.13022
- Inhelder, B., y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Londres, Reino Unido: Routledge and Kegan Paul.
- Jiménez, L. (2012). La aplicación del conocimiento contextualizado en la resolución de problemas matemáticos: un estudio sobre las dificultades de los niños en la resolución de problemas no rutinarios. *Cultura y Educación*, 24, 351-362. doi: 174/113564012802845640
- Jiménez, L., y Ramos, F. J. (2011). El impacto negativo del contrato didáctico en la resolución realista de problemas. Un estudio con alumnos de

- 2.º y 3.º de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 9, 1155-1182.
- Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., y Swafford, J. O. (1988). Results of the fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number, operations, and word problems. *Arithmetic Teacher*, 35, 14-19.
- Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. En P. Light y G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 74-92). Nueva York: Harvester Wheatsheaf.
- Littlefield, J., y Rieser J. J. (1993). Semantic features of similarity and children's strategies for identification of relevant information in mathematical story problems. *Cognition and Instruction*, 11, 133-188. doi: 10.1207/s1532690xci1102_2
- Mason, L., y Scrivani, L. (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: An intervention study. *Learning and Instruction*, 14, 153-176. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.01.002
- Montagero, J. (1996). *Understanding changes on time: The development of diachronic thinking in 7-12 year old children*. Londres, Reino Unido: Taylor & Francis.
- Nunes, T., Bryant, P., Sylva, K., y Barros, R. (2009). *Development of math capacities and confidence in Primary school*. Oxford, Reino Unido: Universidad de Oxford.
- Orrantia, J., González, L. B., y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 28, 429-451. doi: 10.1174/021037005774518929
- Puchalska, E., y Semadeni, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetical problems with missing, surplus or contradictory data. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 9-16.
- Raddatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. [Investigación sobre resolución de problemas]. *Zeitschrift für Mathematik-Didaktik*, 4, 205-217.
- Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, 17, 309-338. doi:10.1007/BF00056219
- Reusser, K., y Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction*, 7, 309-328. doi:10.1016/S0959-4752(97)00014-5
- Schliemann, A. D., y Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical understanding: Everyday versus idealized reasoning. *Developmental Review*, 22, 242-266. doi: 10.1006/drev.2002.0547
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Selter, C. (1994). How old is the captain? *Strategies*, 5, 34-37.
- Sowder, L. (1988). Children's solution to story problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 227-238.
- Staub, F. C., y Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. En C. A. Weaver, S. Marines y C. Fletcher (Eds.), *Discourse comprehension: Essays in honor of Walter Kintsch* (pp. 285-305). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23, 57-86. doi: 207/s1532690xci2301_3
- Verschaffel, L., y De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 577-601. doi:10.2307/749692
- Verschaffel, L., De Corte, E., y Borghart, L. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 4, 339-359. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00008-X
- Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273-294. doi: 10.1016/0959-4752(94)90002-7
- Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., y Ratinckx, E. (1999). Design and evaluation of a learning environment for mathematical modeling and problem solving in upper elementary school children. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 195-229. doi: 10.1207/s15327833mtl0103_2
- Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Paises Bajos: Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, Virginia: NCTM.
- Wyndhamn, J., y Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7, 361-382. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00009-1
- Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

Apéndice

Revisión de los Criterios para Codificar las Respuestas de los Alumnos a los Cuatro Problemas No Estándar

	Irresoluble	Soluciones Múltiples	Solución incluida	Datos irrelevantes
Respuesta correcta	«No lo sé / no puedo saber cuánto dinero le queda a Ana»	Más de una solución numérica (p. e., «9 o 10») o una estimación (p. e., «aproximadamente 10»)	La solución está ofrecida («17»)	El resultado de sumar los dos números relevantes («21»)
Comentarios adicionales*	«Yo no sé el dinero que Ana tenía antes»	«Porque no sé cuántos son unos pocos» o «porque unos pocos pueden ser más de un número (pequeño)»	«Porque aparece en el problema que el número de ovejas es 17» o «porque el número de ovejas no ha cambiado»	«Porque los bolígrafos no son pinturas» o «porque la pregunta no hace referencia a los bolígrafos»
Respuesta incorrecta de adición	$13 + 7 = 20$	$14 + 8 = 22$	$17 + 8 = 25$	$12 + 3 + 9 = 24$
Respuesta basada en la suma de los números dados				
Errores basados en otras operaciones incorrectas	$13 - 7 = 6$ $(13 + 7) - 7 = 13$	$14 - 8 = 6$ $(14 - 8) \times 8 = 48$	$17 - 8 = 9$ $(17 \times 8) - 8 = 128$	$(12 + 9) - 3 = 18$ $(12 \times 9) / 3 = 36$
Ausencia de respuesta	Ausencia de respuesta o «no lo sé»	Ausencia de respuesta o «no lo sé»	Ausencia de respuesta o «no lo sé»	Ausencia de respuesta o «no lo sé»
Comentarios adicionales*	«No comprendo el problema» o «no sé qué hacer con este problema»	«No comprendo el problema» o «no sé qué hacer con este problema»	«No comprendo el problema» o «no sé qué hacer con este problema»	«No comprendo el problema» o «no sé qué hacer con este problema»
Otras respuestas	Respuestas que no pueden ser codificadas en ninguna de las categorías previas	Respuestas que no pueden ser codificadas en ninguna de las categorías previas	Respuestas que no pueden ser codificadas en ninguna de las categorías previas	Respuestas que no pueden ser codificadas en ninguna de las categorías previas

Nota. * Para codificar las categorías de respuesta correcta y otras respuestas se requirieron comentarios adicionales.

Laura Jiménez es profesora ayudante doctora en el departamento de Psicología de la Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, España. Sus intereses de investigación se centran en las creencias de los estudiantes de Educación Primaria sobre (cómo los niños abordan y resuelven) los problemas aritméticos en relación con las características del sistema educativo. Ha publicado previamente diversos artículos sobre esta temática.

Lieven Verschaffel es catedrático de Ciencias de la Educación en la Universidad de Leuven, Bélgica. Sus principales intereses son la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas, las habilidades de aprendizaje, y la enseñanza de las matemáticas. Ha publicado numerosos artículos, libros y capítulos de libros sobre estos temas.

Fecha de recepción: 23-03-2013

Fecha de revisión: 14-05-2013

Fecha de aceptación: 04-09-2013

