MATEMATICAS, REALIDAD Y CIENCIA ECONOMICA

Mariano Jiménez López
Departamento de Economía Aplicada I
Universidad del País Vasco

INDICE

A Javier Arana, con cariño y admiración.

1. Introducción

Según el punto de vista corriente *la ciencia* es "el conocimiento cierto de las cosas por sus principios y causas"[1].

La ciencia constituye un cuerpo organizado o sistemático de conocimientos sobre un "dominio material"[2], que hace uso de teorías que explican los resultados de las observaciones. Una vez elaborada una teoría debe poder ser verificada mediante

1. Diccionario de la Lengua Española. Real Academia Española. Madrid, 1992.

2. "*El dominio material de una ciencia es el conjunto de objetos sobre los que ésta recae*". (Véase Jean Piaget. *Tratado de Lógica y conocimiento científico.* Tomo VII-*clasificación de las ciencias y principales corrientes de la epistemología contemporánea.* (Paidós, Buenos Aires, 1979) pág. 33.

observaciones posteriores. La bondad de la teoría depende de si predice y explica satisfactoriamente las observaciones realizadas en el dominio de conocimiento de la ciencia en cuestión. El rasgo esencial de una teoría científica es que pueda ser, al menos en principio, puesta a prueba y expuesta a ser refutada[3].

Dicho con palabras de Mario Bunge:

"La ciencia se caracteriza por ser un conocimiento racional, sistemático, exacto y verificable y, por consiguiente falible"[4].

Continuando con las ideas de Bunge podríamos decir que, puesto que un mismo objeto material puede ser considerado de un modo no científico, entonces lo distintivo de toda ciencia tiene que ser el "método científico" y su objetivo: explicar los fenómenos observados en su ámbito y hacer predicciones sobre dichos fenómenos.

Siguiendo básicamente las ideas de Jean Piaget[5] podemos distinguir las siguientes fases en el método científico:

1) El establecimiento de los datos de la experiencia:

– observación de los fenómenos cualitativos y cuantitativos

– procesado numérico y estadístico de los datos observados.

2) Construcción del modelo intuitivo y sobre todo cualitativo, para orientarlo hacia la búsqueda de un esquema explicativo.

3) Matematización de este modelo en forma de una teoría ya abstracta.

4) Uso de los modelos teóricos para derivar predicciones.

5) Contraste de dichas predicciones, corrección y mejora, (o sustitución), de los modelos para poder hacer mejores predicciones.

---

3. Karl Popper. *La Lógica de la investigación científica.* (Tecnos, Madrid, 1962)

4. Mario Bunge. *La ciencia su método y su filosofía.* (Siglo veinte, Buenos Aires, 1987) pág. 9.

5. Jean Piaget. "Los problemas principales de la epistemología matemática". En: *Tratado de lógica y conocimiento científico.* Tomo III-*epistemología de la matemática.* (Paidos, Buenos Aires, 1979) pág. 170.

6) Reestructuración de las teorías del tercer nivel, no ya desde el único punto de vista de su adecuación a lo real sino "en su coherencia interna", para "darles la existencia matemática". (Esta fase sólo se presenta en las ciencias más evolucionadas como la física).

Incluso la primera fase, la del establecimiento de los hechos, no es independiente de una matematización, ya que como dice Piaget:

> *"... resulta imposible comprobar o registrar un hecho, por elemental que sea, sin un marco de referencia lógicomatemático, por elemental que sea este: clasificación, "relacionamientos", puesta en "correspondencia", medición, etc".*

La segunda fase representa un perfeccionamiento del marco logicomatemático. Las palabras "intuitivo" y "cualitativo" designan una situación previa a la expresión del modelo en forma matemática.

El desarrollo de métodos más confiables y significativos de observación y medición de los fenómenos económicos ha hecho que la economía moderna muestre cada vez más vocación de ciencia aplicada:

> *"La ciencia económica va descubriendo progresivamente en sí misma, a lo largo de una serie de fracasos y contratiempos, de ambiciones desmesuradas y desalientos, una esencial vocación de ciencia aplicada. este reconocimiento no es en absoluto un accidente de la historia, a nuestro juicio, corresponde al avance de una ciencia hacia su adultez, que es la de la práctica concertada, o, si se quiere, a la edad del concepto en oposición a la de las ideas. ... La ciencia abstracta de los economistas matemáticos, suministró un primer equipo de herramientas conceptuales"*[6].

La economía es la más antigua de las artes[7] pero"*como ciencia*" es muy joven y, por lo tanto, su nivel de evolución es inferior al de las ciencias de la naturaleza. Podríamos decir que se encuentra en un periodo de transición entre la segunda y la tercera etapas que hemos descrito anteriormente. A este respecto viene a cuento el siguiente comentario de A. Bort:

---

6. Gilles-Gaston Granger. "Epistemología económica". En: *Tratado de lógica y conocimiento científico, dirigido por Jean Piaget.* Tomo VI-*epistemología de las ciencias del hombre.* (Paidos, Buenos Aires, 1979) pág. 100.

7. Según dijo Paul A. Samuelson, premio Nobel de Economía en 1970, la economía es " *la más antigua de las artes, la más moderna de las ciencias y ha originado una de las más apasionantes y mejor retribuidas profesiones".*

"Una ciencia ha de desarrollarse bastante para que pueda ser formalizada y formulada matemáticamente. Es más no puede decirse que un campo científico esté desarrollado verdaderamente hasta que no se formaliza matemáticamente. Pero, evidentemente, no es cierto el recíproco: la "formalización" matemática no es por sí sola garantía científica alguna. Es estéril, e incluso contraproducente, si es prematura, porque crea una cierta apariencia engañosa de algo "científicamente" establecido y entorpece de modo grave el prioritario desarrollo conceptual y la formulación lógica de las teorías"[8].

En lo que sigue intentaremos analizar por qué en toda ciencia, al llegar a un punto de su evolución, triunfa la matematización, y cómo se produce este proceso en la Economía.

Debido a la juventud de las ciencias económicas la discusión sobre la forma de utilizar las matemáticas en ellas permanece todavía abierta. En adelante vamos a intentar responder a las cuestiones del *"por qué"* y, a la sin duda más actual, del *"cómo"* de la utilización de las matemáticas superiores en la economía.

Pero puesto que de lo que se trata es de cuestionar una aplicación dentro de las muchas que poseen las matemáticas, creemos que lo mejor será abordar el problema en su forma más general, es decir preguntarse por la relación que guardan las matemáticas con la realidad.

2. Matemáticas y realidad

Sobre esta cuestión Einstein se hacía la siguiente pregunta:

"¿Como es posible que las matemáticas que son un producto de la mente humana, independiente de toda experiencia, se adapten de un modo tan admirable a los objetos de la realidad?"[9].

Como dice Piaget[10] en la mayoría de las disciplinas, preguntarse por su adecuación a la realidad, no comporta ningún problema sobre la posibilidad de su exis-

---

8. A. Bort. *Principios de Teoría Económica*. Vol. 1. (Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1989) pág. 51.

9. A. Einstein. *Aspectos de la relatividad*. Citado por M. Kline en: *Matemáticas la pérdida de la certidumbre*. (Siglo XXI, Madrid, 1985) pág. 410.

10. Jean Piaget. "Los problemas principales de la epistemología matemática". (1979). Op. cit., pág. 147.

tencia, pues ambas cuestiones tienden a confundirse. Por ejemplo las razones de la existencia de la biología hay que buscarlas en su conformidad con lo real.

Sin embargo la pregunta sobre la correspondencia entre matemáticas y realidad nos sugiere inmediatamente otro interrogante:

¿Qué son las matemáticas?

Ocurre que, paradójicamente tratándose de la ciencia más exacta, la definición de las matemáticas[11] ha variado a lo largo de la historia, de manera que cada generación de matemáticos ha cambiado su percepción sobre lo que realmente son los objetos matemáticos. La epistemología de las matemáticas es todavía en nuestros días un problema abierto. Esto se debe a que como dice Piaget:

> *"Una naturaleza etimológica es tanto menos clara, cuanto más se refiere ese conocimiento a actividades muy enraizadas y profundas, porque esas actividades escapan en tal caso a la toma de conciencia del sujeto"*[12].

El mismo Piaget estudiando el desarrollo mental del niño ha demostrado que las estructuras matemáticas se ajustan a las estructuras operatorias o naturales del sujeto[13].

Históricamente ha habido, básicamente, tres grandes corrientes de pensamiento acerca del modo en que existen los entes matemáticos[14]:

a) *Los entes matemáticos existen en un mundo ideal independiente de la realidad física y de las actividades del hombre.* Esta corriente de pensamiento que

---

11. En este artículo emplearé el término "matemáticas", en plural, en vez del singular "matemática". Esta es una profunda cuestión epistemológica. La costumbre de utilizar el plural proviene de que hasta el siglo XIX las matemáticas se presentaba como un vasto conjunto de conocimientos distribuidos en varias ramas aparentemente distintas. Sin embargo los progresos efectuados, desde entonces, en su estructura íntima han dotado a las matemáticas de una unidad que hace más conveniente, desde el punto de vista de los puristas, la utilización del singular. No obstante fuera de las Facultades de Matemáticas en castellano sigue utilizándose el plural, que parece que describe mejor la diversidad y riqueza de las aplicaciones de la matemática.

12. Jean Piaget. "Los datos genéticos". En: *Tratado de lógica y conocimiento científico.* Tomo III-*epistemología de la matemática.* (Paidos, Buenos Aires, 1979) pág. 16.

13. Jean Piaget. "Los datos genéticos". (1979): Op. cit., pág. 24.

14. Jean Piaget. "Los problemas principales de la epistemología matemática". (1979): Op. cit., pág. 148.

arranca desde los griegos y llega, con diferentes matices, hasta nuestros días, se conoce como *platonismo*.

b) *Los entes matemáticos son producto exclusivo de la mente humana.* Esta concepción es defendida por los *intuicionistas*. Otras corrientes de este siglo que adoptan básicamente este punto de vista son el Logicismo y el Formalismo, las cuales han tratado de encerrar las matemáticas dentro de los límites de la lógica humana.

c) *Los entes matemáticos son de la misma naturaleza que la realidad física, habiendo sido extraídos de ella mediante una serie de abstracciones cada vez más refinadas.* Este punto de vista tiene su precursor en Aristóteles, y está tomando auge en nuestros días. Pero, como veremos, complementado con la idea de que las matemáticas constituyen el mecanismo íntimo que utiliza la mente humana para comprender la naturaleza.

Hagamos un breve repaso a estas corrientes de pensamiento:

a) El mundo ideal de los entes matemáticos

Los primeros que se interrogaron sobre la naturaleza de los entes matemáticos fueron los griegos. Para ellos los objetos matemáticos tenían una existencia objetiva independiente del grado de conocimiento que nosotros tengamos de ellos. Estos objetos no son ni físicos ni materiales, pero son inmutables. Esta concepción de los fundamentos matemáticos se conoce como ***platonismo***, según ella el espíritu contempla desde fuera a los objetos matemáticos (teorema en griego significa contemplación), de forma que los matemáticos no pueden inventar, sino tan sólo descubrir.

Los griegos fueron el primer pueblo de la historia que rechazó una interpretación meramente religiosa del mundo según la cual la naturaleza es un caos aparente que manejan los dioses a su capricho. Utilizando la razón llegaron a la conclusión de que la naturaleza está ordenada de acuerdo con un plan matemático. Por lo tanto el estudio de las matemáticas permitiría al hombre hallar la verdad. Los platónicos llevaron hasta sus últimas consecuencias esta interpretación, de manera que para ellos el mundo material, que estaba sujeto a cambios e imperfecciones, no representaba la auténtica verdad, la cual residía en el mundo de las ideas.

> *"Las cosas son las sombras de las ideas proyectadas sobre la pantalla de la experiencia"*[15]

---

15. Citado por Morris Kline. (1985): Op. cit., pág.16.

De acuerdo con esto, el mundo físico sólo puede ser entendido mediante el estudio del mundo ideal de los entes matemáticos.

El platonismo no se restringe al periodo griego. La idea platónica está presente en el ***racionalismo*** del Renacimiento. Para ambas corrientes de pensamiento la razón es un rasgo innato de la mente humana mediante la cual podemos percibir verdades *a priori,* independientemente de la observación[16].

La creencia en la existencia de una Mente Divina se compagina bien con la existencia de un mundo de objetos ideales independiente de la mente humana. Para Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) los objetos matemáticos pertenecían a ese mundo, ambos estaban convencidos de que Dios era un extraordinario matemático. El mundo sigue un plan trazado por Dios, y las matemáticas son las herramientas que permiten descifrarlo.

No obstante la idea de que Dios interviene continuamente en el funcionamiento del universo, fue negada por los racionalistas. Descartes (1596-1650) consideraba que las leyes que rigen la naturaleza son eternas e inmutables, aunque admitía que habían sido establecidas por Dios.

La obra de Newton, inaugura la paulatina sustitución de Dios por la Naturaleza en la mente de los intelectuales. Las leyes descubiertas por Newton explicaban el comportamiento de la naturaleza sin necesidad de establecer la hipótesis de la intervención Divina. Esto hizo que poco a poco Dios pasara a un segundo plano. Aunque muchos científicos siguieron creyendo en su existencia, el estudio de las leyes matemáticas de la naturaleza nada tenía que ver con dicha creencia. No obstante la creencia en un plan matemático de la naturaleza siguió manteniéndose, de hecho ha sido dominante hasta 1900.

La idea platónica de la existencia, en algún sentido, de un mundo objetivo de verdades matemáticas independientes del hombre, se ha mantenido a lo largo de la historia. Grandes matemáticos del siglo XVIII y XIX y contemporáneos nuestros han defendido y defienden la existencia objetiva de los entes matemáticos: Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855), Hermite (1822-1901), Hilbert (1862-1943), Cantor (1845-1918), Thom e incluso Gödel (1906-1978), son algunos egregios ejemplos de esta corriente de pensamiento que ha llegado hasta nuestros días. Evidentemente la concepción que, de estos objetos, tienen los matemáticos modernos, no es exactamente la misma que la que tenían los griegos, o los intelectuales de la Ilustración. Ya nadie cree que los objetos matemáticos están ligados a un plan

16. Philip J. Davis y Reuben Hersh. *Experiencia matemática.* (Labor, Madrid, 1988) pág. 240.

matemático de la naturaleza. Es difícil creer que muchas de las complejas estructuras matemáticas modernas se ajusten a dicho plan.

En todo caso, si se acepta esta corriente de pensamiento, en la que los entes matemáticos se ubican más allá de la realidad física y a la vez más allá del sujeto, es difícil explicar su conformidad con la experiencia y todavía más difícil explicar su adecuación a los instrumentos deductivos del sujeto[17].

b) Las matemáticas como producto de la mente humana

El desvanecimiento de la creencia en Dios como diseñador matemático del universo, unido a los éxitos de la física, basados en el método experimental, inaugurado por Galileo (1564-1642), hicieron que a finales del siglo XVIII, la opinión general de los intelectuales fuera que la auténtica realidad estaba en el mundo material, y que la única forma de alcanzarla eran la observación y la experimentación.

Sin embargo las matemáticas constituyen un tipo de conocimiento que no es fruto de la observación. Tenemos en matemáticas conocimiento de cosas que no hemos observado, ni nunca podremos hacerlo. El *empirismo científico* ni busca ni tiene respuesta acerca de la naturaleza de los entes matemáticos.

A finales del siglo XVIII, coexistían el racionalismo y el empirismo. Teorías que sostenían, como hemos visto, puntos de vista contrapuestos sobre la verdad científica. Para la primera la auténtica verdad reside en el mundo ideal de los entes matemáticos, mientras que para los empiristas dicha verdad se encuentra en el mundo material.

Esto hizo que:

"las figuras y propiedades geométricas adquirieran un aire de seres anfibios; por un lado se estudiaban a la manera griega "con la inteligencia pura", como entes abstractos habitantes de un mundo platónico de ideas, pero por el otro, a los ojos de los hombres habituados al método experimental, esas figuras geométricas y esas propiedades eran como seres naturales, vinculados con el mundo exterior, no meras imágenes de entes ideales, sino seres reales visibles y palpables encadenados a los fenómenos naturales"[18].

---

17. Jean Piaget. "Los problemas principales de la epistemología matemática". (1979): Op. cit., pág. 148.

18. J. Rey Pastor y José Babini. *Historia de la Matemática*. Vol. II. (Gedisa, Barcelona, 1997) pág. 142.

Kant (1724-1804) trató de conciliar ambas teorías. Estableció una distinción entre las "cosas", que como tales no podremos conocer, y su "apariencia", que es lo único que nuestros sentidos nos permitirán percibir acerca de ellas. Kant se preguntaba por qué ciertos conocimientos *sintéticos a priori* de matemáticas puras o de física pura nos son impuestos como verdades independientemente de la experiencia. La respuesta de Kant fue que nuestras intuiciones sobre el espacio y el tiempo, así como las relaciones causa efecto, son propiedades inherentes a la mente humana y por lo tanto, las verdades de la geometría euclídea y de la aritmética nos son impuestas por el funcionamiento de nuestras mentes.

El mundo exterior no puede ser "conocido" por nosotros más que a través de nuestras estructuras mentales, las cuales determinan nuestros modos de conocimiento. Las impresiones recibidas por los sentidos son adaptadas por la mente. El orden y la racionalidad que creemos percibir en el mundo externo son impuestos a este mundo por nuestras mentes y nuestros modos de pensamiento[19].

Kant había utilizado como base de su teoría el conocimiento sintético a priori de la geometría euclídea. Pero casi inmediatamente después de esta afirmación empezaron a germinar las geometrías no euclídeas. Esto desprestigió las ideas de Kant a los ojos de la comunidad matemática.

Hubo que esperar a la aparición de la escuela ***intuicionista*** para que algunas de las ideas de Kant volvieran a ser consideradas.

Como ya hemos dicho, a finales del siglo XIX las matemáticas habían dejado de ser consideradas como expresión de un plan de la naturaleza. Esto acentuó su autonomía, y durante el último cuarto de siglo empiezan a prevalecer conceptos que prefiguran una nueva matemática, en la que la búsqueda de los fundamentos últimos se hace vital.

En esta búsqueda de la verdad última de las matemáticas surgieron, casi simultáneamente dos corrientes de pensamiento: *el logicismo* y *el intuicionismo*.

El logicismo

El descubrimiento de las geometrías no euclídeas, y el descubrimiento de funciones incapaces de poder ser comprendidas por medio de la intuición geométrica hizo que uno de los dos pilares de las matemáticas se derrumbara.

---

19. Morris Kline. (1985): Op. cit. pág. 89.

Sólo quedaba la aritmética para fundamentar el conocimiento matemático. Cantor (1845-1918) desarrolló la teoría de conjuntos, a través de la cual era posible la construcción de los números reales. Frege (1848-1925) demostró que los números naturales pueden ser construidos a partir del conjunto vacío.

Pero, en primera instancia, la teoría de conjuntos parece casi lo mismo que la lógica, de ella se pueden derivar la ley de no contradicción y la ley de implicación. Y puesto que la totalidad de las matemáticas puede ser reducida a la teoría de conjuntos, Frege y Rusell (1872-1970), llegaron a la conclusión de que las leyes fundamentales de las matemáticas se podían derivar de la lógica. Con lo cual el problema de la consistencia de las matemáticas estaría resuelto, ya que la lógica constituye un cuerpo de verdades.

Frege desarrolló una teoría que construía la aritmética fundamentándola de forma intuitiva en la teoría de conjuntos. Pero utilizó un simbolismo muy complicado, con lo que su influencia sobre los matemáticos de la época fue escasa. Además cuando Frege estaba terminando la segunda edición de *Las leyes fundamentales de la aritmética* (1903), Bertrand Rusell descubrió que "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos" es contradictorio, ya que cualquier respuesta a la pregunta de si tal conjunto es elemento de si mismo conduce a una contradicción[20]. Esto hizo tambalearse todo el edificio construido por Frege, puesto que puso de manifiesto que la lógica intuitiva podía conducir a contradicciones, incluso más drásticas que las que se pueden dar en los fundamentos de las matemáticas clásicas (la aritmética y la geometría).

Para evitar las paradojas, Rusell y Whitehead (1861-1947) desarrollaron la teoría de *tipos*, mediante la cual no es permisible decir que un conjunto es o no es elemento de sí mismo. Esta teoría resuelve la mayoría de las paradojas corrientes pero introduce una complicación en la definición de extremo superior de un conjunto de números reales, ya que de acuerdo con ella dicho extremo superior no es un número real. Para evitar esto recurrieron a un discutido *axioma de reducibilidad*, que afirma que toda proposición de tipo superior es reducible a otra de primer orden.

El axioma de reducibilidad no ha sido aceptado por la comunidad matemática ya que a muchos matemáticos les parece arbitrario, e incluso algunos cuestionan si es un axioma de la lógica. Evidentemente, de no serlo, la fundamentación de las matemáticas en la lógica queda automáticamente invalidada.

---

20. Para divulgar la paradoja sobre conjuntos que él había descubierto Rusell propuso la paradoja del barbero: si en la luna de una peluquería vemos el siguiente cartel "yo afeito a quienes no se afeitan a sí mismos, y solamente a éstos", ¿quien afeita al barbero? (Véase Martin Gardner. *¡Ajá! Paradojas*. Labor. Barcelona 1986 pág. 16)

Los trabajos de la escuela logicista tuvieron gran importancia en el desarrollo de la lógica pero no lograron su propósito de fundamentación de las verdades matemáticas. El mismo Russell reconoció su fracaso en el intento de hacer indubitable el conocimiento matemático[21].

El intuicionismo o constructivismo

La otra corriente de pensamiento que a principios de este siglo trató de establecer la verdad última de las matemáticas fue el intuicionismo.

Contrariamente a los logicistas, los intuicionistas estimaban que lo que puede ser intuido directamente es más fiable que lo que se deriva de principios lógicos. El descubrimiento de las paradojas afianzó e impulsó las concepciones intuicionistas.

Como se ha indicado anteriormente las ideas intuicionistas fueron anticipadas por Kant.

Básicamente la doctrina intuicionista sostiene que los números naturales nos son dados por una intuición directa fundamental, que es el punto de arranque de todas las matemáticas[22].

La complicada contrucción lógica de los naturales por medio de la teoría de conjuntos elaborada por Cantor y Dedekind (1831-1916), les parece a los intuicionistas menos fiable que la aceptación directa de los números naturales.

Grandes matemáticos de la época como Kronecker (1823-1891), Borel (1871-1956), Lebesgue (1875-1941) y Poincaré (1854-1912), realizaron críticas a los enfoques matemáticos clásicos y al enfoque logicista, proponiendo puntos de vista próximos entre sí, pero no se propusieron establecer una teoría sobre los fundamentos matemáticos, por ello sus aportaciones fueron esporádicas e incompletas. Sus ideas fueron recogidas por el topólogo holandés Brouwer hacia 1908, el cual es considerado como fundador de la escuela constructivista.

La postura de Brouwer (1881-1966) parte de que los números naturales nos son dados por la intuición, y exige que todas las matemáticas deben *construirse* a partir de los números naturales. De acuerdo con esto los objetos matemáticos sólo

---

21. Bertrand Russell. *Evolución de mi pensamiento filosófico*. (Alianza, Madrid, 1976)

22. Philip J. Davis y Reuben Hersh. (1988): Op. cit., pág. 245.

son válidos si se construyen mediante un número finito de pasos a partir de los números naturales. Para los intuicionistas las matemáticas no existen fuera de la mente humana, constituyen una actividad que se origina y desarrolla mediante el pensamiento, son "una actividad constructiva del espíritu". Las ideas matemáticas están profundamente arraigadas en la mente y no dependen en última instancia del lenguaje. Y puesto que la lógica es lenguaje, no puede admitirse la idea logicista para fundamentar las matemáticas.

Los intuicionistas no se preocupan por la aplicación de las matemáticas a la realidad. Para ellos el hombre no puede pretender dominar la naturaleza.

Los intuicionistas no admiten la existencia del infinito actual, es decir de los conjuntos infinitos cuyos elementos están todos presentes de una vez, y sólo admiten el infinito potencial es decir conjuntos en los que siempre se pueden obtener conjuntos mayores que un conjunto finito dado de números. El concepto de límite infinito potencial como único admisible en matemáticas lo formuló claramente Gauss al decir:

> *"Me opongo al uso de las magnitudes infinitas como de algo completo que en matemática jamás se permite. El infinito no es sino una* façon de parler*..."*[23].

Además los intuicionistas rechazaban la validez de aplicar la ley del tercio excluso a colecciones infinitas. Esto les conduce a rechazar algunos de los teoremas básicos del análisis, como el teorema de existencia de un máximo para una función continua en un intervalo cerrado, o el teorema de recubrimiento de Heine-Borel, o la integral de Lebesgue. Además las demostraciones obtenidas a partir de los principios intuicionistas son extraordinariamente complicadas.

Esto hizo que las posiciones intuicionistas fueran consideradas como extremas y rechazadas por la mayoría de los matemáticos.

El formalismo

Uno de los matemáticos que más ha trabajado en este siglo por establecer la certidumbre de los métodos matemáticos es David Hilbert (1862-1943)[24], el cual no

---

23. Rey Pastor y Babini. (1997): Op. Cit. pág. 146.

24. David Hilbert. "On the infinite". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds). (Englewood Clifss, Prentice-Hall, 1964) págs. 134-151.

admitía el punto de vista logicista, pues en su opinión en el desarrollo de la lógica intervenían ya, de manera implícita, los números enteros, por lo tanto construir el número sobre la lógica representa un razonomiento circular.

Pero lo que especialmente inquietaba a Hilbert era la escuela intuicionista, cuyos resultados, como ya hemos dicho, invalidaban gran parte del análisis clásico, esto era, para él, inaceptable y se propuso fundamentar las matemáticas clásicas.

Hilbert contribuyó a difundir la teoría de conjuntos de Cantor, la cual legitima el infinito actual que no es aceptado por los intuicionistas. A la frase de Gauss para quien el infinito es una "manera de hablar", Cantor responde:

> " *No obstante la diferencia esencial entre los conceptos de infinito potencial y de infinito actual (siendo el primero una magnitud finita variable que crece más allá de todo límite finito, y el segundo una magnitud fija, constante, que se mantiene más allá de todas las magnitudes finitas) ocurre con frecuencia tomar el uno por el otro... En vista de la justificada aversión a tales infinitos actuales ilegítimos y a la influencia de la tendencia moderna epicúreo- materialista, se ha extendido en amplios círculos científicos cierto* horror infiniti, *que encuentra su expresión clásica y su apoyo en la carta de Gauss; sin embargo me parece que el consiguiente rechazo, sin crítica alguna, del legítimo infinito actual no deja de ser una violación de la naturaleza de las cosas, que han de tomarse como son*"[25].

Ejemplos de infinitos actuales legítimos para Cantor son "los puntos de un segmento" o "la ecuación de una recta".

Para fundamentar la matemática clásica Hilbert, basándose en la teoría de conjuntos cantoriana, asumió la lógica de Rusell como un lenguaje formal que permite expresar cada demostración de un teorema clásico mediante pasos verificables mecánicamente. Pero no admitía que las matemáticas se puedan deducir sólo de la lógica. Por ello y para evitar ambigüedades de lenguaje y la utilización inconsciente de conocimientos intuitivos, propugnó que todas las matemáticas deben ser consideradas como un sistema finito de símbolos, sin ningún significado real, es lo que se conoce como "metamatemática". Y procuró demostrar que en dicho sistema no se puede deducir una contradicción.

La siguiente frase de Hilbert proporciona una buena noción acerca de las ideas cardinales de su pensamiento:

---

25. Rey Pastor y Babini. (1997): Op. Cit. pág. 197.

"En mi opinión la matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes... Los símbolos matemáticos son diagramas escritos, las figuras geométricas son fórmulas gráficas... En la medida en que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva... Quién persigue métodos sin tener en mente un problema definido, investiga en vano... La convicción de la resolubilidad de un problema matemático cualquiera es un poderoso incentivo para el investigador. Resuena en nosotros un llamado constante: Hay un problema, busca la solución, la encontrarás razonando, pues en matemática no hay ignorabimus"[26].

El ***formalismo*** de Hilbert fue atacado por Rusell aduciendo que convertía a las matemáticas en un juego desprovisto de significado, sin ninguna conexión con el mundo real.

También el sistema ideal construido por los formalistas era inaceptable para los intuicionistas, pues estos opinaban que los formalistas confundían las matemáticas propiamente dichas con los símbolos y fórmulas que son utilizados para representarlas, con lo cual la matemática quedaba carente de sentido.

Además en 1930 Godël enunció los teoremas de incompletitud, que echaron por tierra la pretensión de Hilbert, de construir un sistema formal consistente que contenga a la aritmética elemental.

No obstante las anteriores consideraciones, el formalismo, en sus diversas variantes, bajo la influencia sobre todo del colectivo de matemáticos franceses conocido por el seudónimo de Nicolás Bourbaki[27], ha sido el estilo dominante en los libros de texto durante la segunda mitad de nuestro siglo.

Según Bourbaki:

"La matemática estudia las relaciones *entre objetos que, en forma deliberada, no se conocen y sólo se describen por* algunas *de sus propiedades, precisamente aquellas que se adoptan como axiomas básicos de su teoría"*[28].

---

26. Rey Pastor y Babini. (1997): Op. Cit. pág. 165

27. (Los principales matemáticos que componen este colectivo son: H. Cartan, C. Chevalley, J. Dieudonné, Ch. Ehresmann, A. Weyl, etc.)

28. Rey Pastor y Babini. (1997): Op. Cit. pág. 184

El estilo formalista tiende a desconectar a las matemáticas de las aplicaciones a la realidad. Para un formalista las matemáticas son la ciencia de las deducciones a partir de los axiomas. Sus enunciados no tienen ningún contenido específico, ni dependen de ninguna imagen mental que se pueda asociar con él. Las matemáticas parecen ser solamente una estructura formal y por tanto sólo nos interesan las deducciones válidas lógicamente. Por ejemplo los enunciados de la geometría seguirían siendo válidos si designáramos punto, recta y plano por medio de otros vocablos cualesquiera, como mesa, silla y vaso de cerveza[29]. Las aplicaciones que puedan encontrarse a la teoría desarrollada, no tienen mayor trascendencia y en todo caso se citan de pasada, o como un ejercicio a posteriori. La utilización de figuras y diagramas es considerada como poco matemática. Esto que puede estar plenamente justificado, cuando de lo que se trata es de la fundamentación última de las matemáticas, se ha extendido, desgraciadamente, a la enseñanza de las matemáticas, dando lugar a lo que se ha dado en llamar "matemática moderna". Afortunadamente la tendencia se está invirtiendo y vuelve a valorarse la "visualización" como un componente fundamental, no sólo del proceso de creación matemática, sino de la pedagogía matemática.

El convencimiento de que la naturaleza no responde a un plan matemático, ha dado lugar en este siglo, como hemos visto, a escuelas que consideran las matemáticas como un producto exclusivo de la mente humana.

En este caso se comprende el rigor de sus desarrollos deductivos, pero no se explica su adecuación a lo real, ni la anticipación de teorías que más adelante concuerdan con resultados experimentales.

c) Las matemáticas, instrumento de la mente para comprender el mundo

La búsqueda de los fundamentos ha impulsado, en este siglo, la axiomatización de las matemáticas. El exceso de formalismo y axiomatización ha provocado un alejamiento de las matemáticas puras del resto de las ciencias, y por lo tanto una ruptura entre matemáticas "puras" y "aplicadas"[30]. Han proliferado las investigacio-

---

29. Rey Pastor y Babini. (1997): Op. Cit. pág. 193

30. El premio Nobel de física de 1969 y descubridor de la existencia de los quarks, Murray Gell Mann hace la siguiente distinción entre matemática pura y aplicada: "La matemática aplicada puede considerarse como el estudio de todas aquellas estructuras que se dan en las teorías científicas, mientras que la matemática pura cubre no sólo éstas, sino todas aquellas que podrían haberse dado (o podrían darse en el futuro)"

(*El quark y el jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo.* (Círculo de Lectores, Barcelona, 1996) pág. 150).

nes matemáticas basadas en cambios superfluos en los axiomas y se han desarrollado resultados matemáticos que ni tienen ni tendrán nunca ninguna aplicación práctica. La matemática moderna parece haber olvidado que, como decía Poincaré:

> *"el deseo de entender la naturaleza ha tenido sobre el desarrollo de las matemáticas la más feliz y saludable de las influencias"*[31].

Esta situación ha provocado la alarma de numerosos matemáticos y científicos ante la posibilidad de que las matemáticas, separadas de las fuentes empíricas, se conviertan en un juego estetizante pero estéril, que corre el peligro de degeneración. A este respecto Von Neumann (1903-1957), decía:

> *"En cualquier caso, siempre que se alcance este punto, me parece que el único remedio es el retorno rejuvenecedor a la fuente: la reinyección de ideas más o menos directamente empíricas"*[32].

Los resultados obtenidos por Godël han destruido la pretensión de fundamentar las matemáticas mediante el método axiomático. Ninguna de las escuelas existentes puede decir que está en posesión del método que autentifica los resultados matemáticos, se ha llegado a la situación de que una demostración puede considerarse válida dependiendo de la escuela matemática desde la que se analiza.

Ante la imposibilidad de encontrar dentro de las propias matemáticas criterios que permitan validar los resultados obtenidos, se está produciendo una vuelta al criterio tradicional, en el sentido propuesto por Von Neumann, de manera que la investigación y la enseñanza de las matemáticas están girando hacia lo concreto y lo aplicable. Los libros de texto y los artículos especializados dan mayor énfasis a ejemplos y gráficos, y la rigidez en la exposición es menor.

En 1934 Karl Popper publicó la *Lógica de la investigación científica,* en la que expresaba un punto de vista radicalmente nuevo sobre la naturaleza de las teorías científicas. Hasta entonces la idea predominante era que la inducción es la generadora de las teorías científicas, es decir que éstas se crean extrayendo leyes generales de las observaciones y experimentos. Sin embargo Popper afirmó que la génesis de las teorías científicas no es ésta, sino que son inventadas y emitidas con el carácter de hipótesis o conjeturas. Luego la teoría es probada mediante contrastes experimentales. Si la teoría "aguanta" estas pruebas, puede considerarse provisio-

---

31. Henri Poincaré. *El valor de la ciencia.* Citado por M. Klein. (1985): Op. cit. pág.348.

32. John von Neumann. "El Matemático". En: SIGMA. *El mundo de las matemáticas*, Tomo. 5. (Grijalbo Madrid, 1983) pág. 453.

nalmente válida, pero nunca podremos asegurar que es "verdadera". Según Popper una teoría sólo puede considerarse científica si puede ser puesta a prueba y expuesta a ser refutada.

Las ideas de Popper acerca de las teorías científicas fueron trasladadas al conocimiento matemático por Imre Lakatos (1922-1974), quien en su tesis doctoral *Pruebas y refutaciones*[33], supervisada por Popper, propuso que el razonamiento matemático no es jamás verificable sino únicamente falsable.

> *"Los teoremas matemáticos no están garantizados en modo alguno. Se puede continuar utilizando la teoría existente en ausencia de otra mejor, del mismo modo que se usó durante doscientos años la teoría mecánica de Newton antes que la teoría de la relatividad, o que la geometría euclideana antes de la geometría riemanniana. Pero la seguridad en la corrección es inalcanzable"*[34].

En este sentido una teoría matemática es similar a una teoría de cualquier otra ciencia. Un axioma o un teorema es correcto en la medida que funciona, y si no lo hace debe ser modificado. Las matemáticas no son absolutas e inalterables, aunque los hombres lo hayan creído así desde los griegos hasta nuestro siglo, debido a que la aritmética y la geometría euclídea han "funcionado" durante dos mil años.

Este punto de vista ha hecho que se admita actualmente que los entes matemáticos, incluidos los axiomas, proceden de la observación del mundo físico. Este enfoque sigue básicamente los planteamientos de J.S. Mill, quien en los capítulos IV y V del libro segundo de su tratado *A system of logic* (1843)[35] aborda la epistemología del conocimiento matemático. Mill considera la matemática como una nueva elaboración de los datos de la experiencia. Este punto de vista contrasta con el de Kant, que atribuye a la razón la ligereza del vuelo sin rozamiento empírico cuando hace matemáticas[36]. Para Mill la respuesta a la búsqueda de la naturaleza del conocimiento matemático debe indagarse en el origen empírico de dicho conocimiento. Como dice Cañón Loyes:

---

33. Imre Lakatos. *Pruebas y refutaciones.* (Alianza, Madrid, 1982)

34. M. Klein. (1985): Op. cit., pág. 386.

35. Traducción al español: *Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva.* D. (Jorro, Madrid, 1917).

36. Camino Cañón Loyes. *La matemática creación y descubrimiento.* (Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1993) pág. 185.

"La matemática queda en la obra de Mill como una ciencia que goza de un estatuto privilegiado entre las ciencias de la naturaleza, pero que no necesita más fundamento que la experiencia y el hábito"[37].

No obstante este planteamiento es demasiado simple para explicar la naturaleza de los fenómenos matemáticos, pues no tiene en cuenta el papel que la mente humana juega en la construcción de las matemáticas:

"La Naturaleza y la mente humana han estado en permanente feed-back. La Matemática es el fruto privilegiado de esta interacción; sus teorías permiten construir modelos que median en el conocimiento que las ciencias nos proporcionan del mundo"[38].

En lo que sigue, intentaremos explicar el papel que juega la mente en el proceso de creación y descubrimiento de los entes matemáticos.

La historia de las matemáticas, que está directamente ligada con la de la civilización, nos muestra que las matemáticas no son, a pesar de su abstracción, un producto exclusivo de la mente humana, no son "pensamiento puro", sino que los objetos matemáticos aparecen, en una primera instancia, de abstraer objetos concretos, es decir de la experiencia. La historia nos demuestra que la formación de los objetos matemáticos ha sido lenta y laboriosa, los números naturales, que para los intuicionistas son el paradigma del conocimiento sintético a priori, aparecen en los distintos pueblos después de una cantidad inmensa de experiencia[39]. Para descubrir la propiedad que tienen en común todas las colecciones cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, fue necesario comparar millones de colecciones de objetos. A partir de los conceptos de número y de la experiencia los hombres fueron estableciendo ciertas leyes generales, como que la suma no depende del orden de los sumandos, que el orden en que se cuente no influye en el resultado final, etc... Así aparecen las relaciones y las reglas mutuas entre números. Es decir que de la combinación de la experiencia y conceptos abstractos surgieron nuevos objetos matemáticos.

Lo dicho hasta aquí parece responder a la pregunta que Einstein se hacía, ya que si los entes matemáticos son de la misma naturaleza que la realidad física, o por decirlo más adecuadamente, si son extraídos mediante una serie de abstraccio-

---

37. Camino Cañón Loyes. (1993): Op. cit. pág. 196

38. Camino Cañón Loyes. (1993): Op. Cit. pág. 405.

39. Georges Ifrah. *Las cifras, historia de una gran invención.* (Alianza Editorial, Madrid, 1987).

nes cada vez más refinadas de la realidad, es comprensible que continúen concordando con ella.

Pero la pregunta de Einstein es más profunda, ya que lo que los razonamientos anteriores no explican es: ¿cómo es posible que las matemáticas anticipen tan frecuentemente resultados de la realidad? Cada vez es más frecuente que, en las ciencias más evolucionadas, los descubrimientos matemáticos anticipen un resultado con años de antelación). Por poner un ejemplo clásico cuando Cardano (1501-1576) inventó en el siglo XVI los números imaginarios, nadie podía prever que sin ellos sería imposible construir hoy en día algo tan real como un puente. Las teorías científicas más importantes de los últimos tiempos, como la teoría cuántica, utilizan abundantemente las matemáticas modernas. En ella los desarrollos matemáticos predicen la necesidad de la existencia de una determinada partícula elemental, que luego es afanosamente buscada por los físicos experimentales y ¡encontrada! Pero además estas partículas elementales son ficción, no sabemos nada de su naturaleza física, sabemos que existen por los fenómenos observables que las acompañan. No tenemos el menor conocimiento físico de lo que son, pues cualquier representación imaginaria de ellas conduce a resultados falsos, sólo resulta admisible el concepto que emana de las estructuras matemáticas de la teoría.

Así pues, la anticipación de las matemáticas a la realidad, y el hecho de que cadenas de razonamiento puro, producto exclusivo de la mente humana, conduzcan a resultados tan asombrosamente aplicables, plantea el problema de la adecuación de la matemática a la realidad en términos más profundos.

En esta línea el lógico y psicólogo Jean Piaget[40] ha demostrado, estudiando el desarrollo mental del niño, que las estructuras madres de las matemáticas, según Bourbaki: algebraicas, de orden y topológicas, se corresponden con el funcionamiento natural de la inteligencia.

Y una ciencia tan evolucionada como la biología ha demostrado, a su vez, que

"las conexiones neuronales pueden considerarse como isomorfas de los vínculos combinatorios que intervienen en la lógica de las proposiciones, lo cual no prueba que la lógica esté contenida por adelantado en el cerebro, sino que la acción puede extraer de las coordinaciones nerviosas elementos para extraer estructuras lógicamente coherentes"[41].

---

40. Jean Piaget. "Los datos genéticos". (1979): Op. Cit. pág. 24.

41. Jean Piaget. Jean Piaget. "Los problemas principales de la epistemología matemática". (1979): Op. cit., pág. 174.

Es decir que tanto la adecuación a la realidad de las matemáticas, como el rigor de su método hay que buscarlo no sólo en el mundo exterior al individuo, sino también en el desarrollo de sus actividades mentales. Las matemáticas median entre el mundo interno y el mundo externo del hombre. Parece cada vez más convincente que el hombre al intentar conocer la realidad exterior proyecta sobre ella sus medios de conocimiento y sus mecanismos de pensamiento, y que éstos son muy matemáticos. Volvemos así a la idea expresada por Kant cuando afirmó que la mente moldea nuestras percepciones de la realidad exterior. Puede que ésta sea más compleja, o que su comportamiento sea caótico, pero las matemáticas son el esquema que la mente humana construye para comprender la naturaleza. No debemos olvidar que la naturaleza y los modelos matemáticos que el hombre crea para representarla no son la misma cosa.

Ésta era la opinión de Poincaré cuando en *El valor de la ciencia* afirmaba:

"La armonía que la inteligencia humana cree descubrir en la naturaleza, ¿existe aparte de tal inteligencia? Seguramente no. Una realidad completamente independiente del espíritu que la concibe, la ve o la siente, es una imposibilidad. Un mundo tan externo como ése, aun si existiera, nos sería inaccesible para siempre. Lo que llamamos realidad objetiva es estrictamente hablando, la que es común a varios seres pensantes y pudiera serlo a todos; esta parte común, solamente puede ser expresada por las leyes matemáticas"[42].

De la misma opinión era el eminente físico Arthur S. Eddington (1882-1944), quien escribía:

"Hemos descubierto que allí donde más han progresado las ciencias, la mente no ha hecho sino recuperar de la naturaleza lo que la mente había puesto en la naturaleza. Hemos descubierto extrañas huellas en la playa de lo desconocido. Hemos elaborado profundas teorías, una tras otra, para explicar el origen de las huellas. Al fin hemos conseguido reconstruir la criatura que los produjo. ¡He aquí el resultado! Son nuestras propias huellas"[43].

Como dice André Lichnerowicz (1915):

---

42. Citado por M. Kline. (1985): Op. cit., pág. 415.

43. Citado por Kline. (1985): Op. cit., pág. 411.

> *"Nuestros métodos de conocimiento son muy matemáticos. A ellos están indisolublemente ligados nuestros poderes"*[44].

Así pues las matemáticas son una proyección de los métodos de conocimiento de nuestro cerebro sobre la realidad física, esto hace que, para analizar la naturaleza de los objetos matemáticos, debamos situarnos en una postura intermedia entre las concepciones platónicas para las que los entes matemáticos se descubren, y las posiciones intuicionistas, para las que los entes matemáticos son una creación de la mente humana. Dicho con palabras de Camino Cañon:

> *"El quehacer (matemático) es simultáneamente descubrimiento y creación. Es creación, en cuanto que los objetos matemáticos sólo cobran existencia una vez que han sido pensados y su modo de existencia se reduce a ser formulados en lenguaje. Es descubrimiento en cuanto que cada creación se presenta como algo no arbitrario, enraizado en los nexos de necesidad configurados por los primeros* estados de cosas matemáticas *que emergieron en el horizonte cultural humano"*[45].

Lo que venimos comentando quizás ayude a explicar por qué tarde o temprano triunfa la matematización, y por qué incluso las estructuras más complejas van siendo conquistadas por el método matemático. Sólo permanecen al margen aquellas en las que los datos experimentales no son conocidos. Pero a medida que estos datos son conocidos, es decir a medida que el conocimiento se profundiza, el hombre al tener que emplear con mayor agudeza su inteligencia, pone de manifiesto que el funcionamiento de ésta se ajusta al método matemático.

Esto es precisamente lo que está ocurriendo con las ciencias económicas, en las que gracias a la informática y a la estadística se está mejorando su fundamento empírico, lo que está dando lugar a que el método matemático penetre en ellas cada vez con más fuerza.

Comparando las diferentes ramas de la ciencia, cada vez está más claro que, en lo que concierne a los métodos, no existe oposición entre las ciencias de la naturaleza y las ciencias del hombre. Parece que las diferencias son más bien una cuestión de evolución.

---

44. André Lichnerowicz. "Observaciones acerca de la matemática y la realidad". En *Tratado de lógica y conocimiento científico*. Tomo III-epistemología de la matemática. (Paidos, Buenos Aires, 1979) pág. 85.

45. Camino Cañón Loyes. (1993): Op. cit. pág. 401.

3. Sobre la utilización de las matemáticas en las ciencias económicas

Consideraciones históricas

Lo expuesto hasta aquí da respuesta, en mi opinión, a la necesidad de la utilización de las matemáticas en cualquier ciencia que alcance cierto grado de evolución.

La utilización de las matemáticas en las ciencias del hombre ha sido en el pasado motivo de controversia, y sigue siéndolo, aunque actualmente ya no se plantea como una cuestión de derecho sino de hecho.

Lo expuesto en el epígrafe anterior acerca de la relación entre matemática y realidad puede orientarnos, sobre el modo en que deben aplicarse las matemáticas en la economía.

Una de las causas del retraso que en cuanto a métodos tienen las ciencias económicas respecto de las ciencias de la naturaleza es su nacimiento más tardío y, por tanto, su menor nivel de evolución. La economía hace sus primeros balbuceos como ciencia[46] cuando Newton ya ha elaborado su *Mecánica.* Esto hizo que las matemáticas apareciesen en la economía como un instrumento venido desde fuera. Los extraordinarios éxitos conseguidos por las matemáticas en las ciencias físicas, cegaron a los economistas que emplearon sin mayores restricciones el cálculo diferencial e integral para elaborar sus modelos, olvidando que el cálculo diferencial e integral habían nacido auspiciados por las necesidades de la mecánica, es más, (y aquí nos encontramos con otro ejemplo de que las matemáticas no son pensamiento puro), que el creador de ambos, mecánica y cálculo diferencial, fue la misma persona, Newton, que éste elaboró estos campos concretos de la matemática al intentar resolver los problemas concretos que le planteaba el estudio del movimiento de los cuerpos.

Así, lo que ocurrió es que al intentar aplicar las teorías matemáticas disponibles, a unos problemas muy distintos de los que motivaron su creación, se produjeron desadaptaciones. Fue el instrumento, la matemática, el que impuso las condiciones:

> *"Smith y, en general, los economistas clásicos y neoclásicos y la escuela de Lausanne, contemplan la ciencia económica como una especie de "Mecánica" cuyo objeto no es otro que el descubrimiento de las leyes que*

---

46. La publicación en 1776 de la obra de Adam Smith "La investigación de sobre la naturaleza y las causas de la Riqueza de las Naciones", señala el nacimiento de la Economía como ciencia.

rigen el equilibrio de la economía, a semejanza de las que la mecánica clásica estableció para explicar la gravitación universal"[47].

Las matemáticas existentes a finales del siglo XIX, cuando Walras y Pareto desarrollaron sus "leyes económicas", estaban pensadas para describir los fenómenos de la naturaleza, pero ni siquiera pretendían encerrar toda la complejidad de la misma. La potencia de las matemáticas tiene la servidumbre de que para analizar la naturaleza, el hombre tiene que simplificarla previamente, para reducirla a algunos conceptos elementales, como masa, velocidad, aceleración, duración..., que en modo alguno encierran toda la riqueza de matices de la naturaleza. Así la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol, en realidad no es una elipse, sólo lo es si se considera a ambos astros como puntos y se desprecia la acción del resto de los cuerpos del sistema solar[48].

Difícilmente pues podían estas matemáticas responder a la inmensa complejidad que aparece cuando en el objeto de estudio interviene la actividad humana. Así, por ejemplo, el cálculo diferencial disponible obligaba a suponer que las empresas y los individuos se encuentran con condiciones fijas y que el resultado de sus actividades depende únicamente de sus propias acciones, lo cual evidentemente es falso, siendo esto lo que aleja el modelo de la realidad. El resultado de una acción no depende solamente del que actúa sino también de las acciones de los demás, que a veces cooperan y a veces se muestran hostiles. Está claro que esta situación escapa al análisis matemático tradicional, no porque las matemáticas sea incapaces de resolverlo, sino porque nunca se lo han propuesto, ya que una situación de este tipo no se da en los fenómenos que son objeto de estudio por parte de las ciencias físicas. Hubo que elaborar una teoría matemática nueva, la teoría de los juegos de estrategia, desarrollada a partir del teorema del mini-max de Von Neumann, para poder empezar a abordar este problema.

Modelos matemáticos y realidad

La fundación en 1930 de la Sociedad Econométrica, promovida por Fisher, contribuyó notablemente a suscitar el uso de los métodos cuantitativos en Economía. En el artículo primero de sus estatutos fundacionales se dice que "La Sociedad Econométrica es una sociedad para el progreso de la Teoría económica en su relación con la Estadística y las Matemáticas".

---

47. M. López Cachero "La construcción de la ciencia económica y el papel de la matemática". *Lecciones inaugurales* (U.P. Comillas, Madrid, 1981).

48. M. Kline. (1985): Op. cit. pág. 423.

Ante la ausencia de un instrumental matemático adecuado y, ante el fracaso en la búsqueda de grandes "leyes" económicas que pretenden englobar el fenómeno económico en su totalidad, la tendencia del análisis económico moderno ha sido la de desarrollar ***modelos matemáticos*** menos ambiciosos, aplicados a un problema o sector limitado, que pretenden describir un fenómeno "local" y no "global"[49]. Un buen ejemplo de esto es el moderno análisis econométrico, o esa amalgama de métodos y modelos matemáticos que se denomina Investigación Operativa.

La razón de la proliferación de modelos en las ciencias sociales hay que buscarla en que dichas ciencias están todavía en su infancia, de manera que el contraste empírico no puede restringir seriamente la formación de modelos, contrariamente a lo que ocurre en las ciencias más desarrolladas. También en los primeros tiempos de la física proliferaban los modelos. Por ejemplo los modelos de Tolomeo y Copérnico[50] para describir el movimiento de los planetas, o los modelos de Galileo para describir la caída de los cuerpos. Posteriormente Newton con su Ley de la Gravitación Universal consiguió una "teoría global" que explicaba los fenómenos que intentaban describir los modelos anteriores[51].

Con respecto a la trascendencia que debe darse a estos modelos puede ser significativo el siguiente comentario de Marx W. Wartofsky:

> *"..., parece suceder que los modelos abundan en las ciencias sociales, que a menudo no están concebidos rigurosamente y que poseen un carácter cualitativo laxo, de forma que no se ve bien en qué habríamos de basarnos para aceptar o rechazar un modelo de este tipo. Pero si los miramos desde un amplio punto de vista pragmático, como nada más que unos instrumentos ad hoc para entender, o como apoyos pragmáticos o heurísticos que nos sugieran maneras de ordenar los datos, y si no los consideramos ni verdaderos ni falsos, conservaremos una gran libertad en cuanto a construcción de posibles modelos"*[52].

La afirmación anterior se corresponde con un punto de vista *instrumentalista* de la ciencia según el cual las descripciones del mundo que conllevan entidades

---

49. Gilles-Gaston Granger. (1979): Op. cit., pág. 117.

50. Edwin Arthur Burtt. *Los fundamentos metafísicos de la ciencia moderna.* (Ed. Sudamericana, Buenos Aires, 1960) págs. 35-58.

51. A su vez la Ley de la Gravitación Universal ha sido englobada por la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad.

52. Marx W. Wartofsky. *Introducción a la filosofía de la ciencia.* (Alianza Universidad Textos, Madrid, 1973) pág. 505.

observables describen cómo es en realidad el mundo, pero no ocurre así con las descripciones de los sistemas que conllevan conceptos teóricos. Las teorías son instrumentos destinados a relacionar un conjunto de estados observables con otros. El componente teórico de la ciencia no describe la realidad, simplemente ha de ser interpretado como una ficción última que facilita nuestros cálculos[53]. Simplemente los cálculos nos resultan más fáciles si se trata la realidad *como si* fueran ciertas las hipótesis del modelo teórico. De hecho a veces hay formulaciones alternativas muy diferentes de la misma teoría, que resultan más convenientes según el tipo de aplicaciones que se quieran derivar de ellas.

Frente a esta concepción instrumentalista de la ciencia, hay otro punto de vista *realista* que afirma que "las teorías científicas describen, o aspiran a describir, qué es realmente el mundo". Este punto de vista es defendido por Popper, para quien las sucesivas teorías que resultan ser falsas, van siendo reemplazadas por nuevas teorías que son a su vez muy probablemente falsas y susceptibles de ser reemplazadas en el futuro por teorías superiores. A pesar de esto Pooper afirma que la ciencia progresa acercándose cada vez más a la verdad. Las sucesivas teorías tienen un contenido de *verosimilitud* mayor cada vez, en el sentido de que su contenido de verdad aumenta y su contenido de falsedad disminuye[54].

Si comparamos el punto de vista instrumentalista y el realista es evidente que el segundo es menos conformista y por lo tanto plantea más problemas, los cuales incentivan el desarrollo de nuevas teorías. En este sentido, como dice Chalmers, hay que preferir la actitud realista a la instrumentalista porque abre más posibilidades de desarrollo[55].

No obstante el planteamiento popperiano de aproximación de la ciencia a la verdad, ha sido criticado por Kuhn[56], poniendo el ejemplo de la evolución de las teorías ópticas, que primeramente describían la luz como un haz de partículas, luego como una onda y luego como una conjunción de onda y corpúsculo. Además, como ya hemos comentado, a veces se producen formulaciones alternativas muy diferentes de una misma teoría.

---

53. Alan F. Chalmers. *¿Que es esa cosa llamada ciencia?.* (Siglo XXI, Madrid, 1988) pág. 205.

54. K. R. Popper. *Conjetures and refutations.* Citado por Alan F. Chalmers. (1988): Op. cit. pág. 219.

55. Alan F. Chalmers. (1988): Op. cit. pág. 209.

56. Thomas Kuhn. The structure of scientific revolutions, pp. 206-207. Citado por Alan F. Chalmers. (1988): Op. cit., pág. 216.

Como un modo de salvar los inconvenientes de las concepciones instrumentalista y realista, Chalmers propone un punto de vista intermedio que llama *realismo no representativo,* según el cual:

> *"La finalidad de la ciencia es establecer los límites de la aplicabilidad de las teorías actuales y desarrollar teorías que sean aplicables al mundo con un mayor grado de aproximación en las circunstancias más diversas.*
>
> *... Podemos juzgar nuestras teorías desde un punto de vista como el grado en el que abordan con éxito algún aspecto del mundo, pero no podemos juzgarlas desde un punto de vista como el grado en que describen el mundo tal y como realmente es, simplemente porque no tenemos acceso al mundo independientemente de nuestras teorías de una forma que nos permita valorar la exactitud de tales descripciones"*[57].

Como vemos el *realismo no representativo* de Chalmers se diferencia del realismo en que no contempla las teorías científicas como descripciones del mundo en la forma en que nuestras ideas propias del sentido común lo entienden. También se diferencia del instrumentalismo en que las pruebas empíricas que sirven de base a la teoría dependen de ésta y por lo tanto no pueden separarse observación y teoría. Una de las críticas contra el instrumentalismo es que su punto de vista es muy conservador y por lo tanto no favorece el progreso de la ciencia, puesto que se conforma con la aplicabilidad del modelo sin plantearse preguntas más profundas que podrían sugerir nuevos campos de aplicación. Sin embargo para el realismo no representativo la ciencia tiene que afanarse en determinar el campo de aplicabilidad de una teoría y como dice Chalmers:

> *"... como mejor se puede averiguar el campo de aplicabilidad de una teoría es a la luz de una teoría posterior que la explique a un nivel más profundo"*[58].

De acuerdo con esto el avance de las ciencias sociales requiere que no se queden en el punto de vista instrumental sugerido por Wartofsky, (que es muy útil pues al ser poco exigente deja gran libertad para el desarrollo de modelos). Pero es conveniente indagar el campo de aplicabilidad de los diversos modelos que están surgiendo, con vistas al avance hacia teorías más globales.

La creación de estos modelos, está impulsando el desarrollo de una nueva investigación matemática, al igual que en su día ocurrió cuando se gestó la mecáni-

---

57. Alan F. Chalmers. (1988): Op. cit. pág. 226.

58. Alan F. Chalmers. (1988). Op. cit. pág. 228

ca newtoniana. De hecho las ciencias del hombre están jugando un importante efecto rejuvenecedor de las matemáticas, en el sentido solicitado por Von Neuman, de reinyección de ideas empíricas en las mismas.

Esta nueva matemática ya está surgiendo con lo que podríamos llamar la matemática de los programas, (y directamente ligada con ella la teoría de los juegos de estrategia), con el análisis discreto, con la teoría de la decisión, o con la matemática de los subconjuntos borrosos que permite un nuevo tratamiento de la imprecisión e incertidumbre inherente a los fenómenos que son consecuencia de acciones humanas.

A este respecto podemos leer en el interesante libro de A. Piatier, P. Cahuzac y L. Chambadal:

"Mientras espera que se vuelvan "operativas" las matemáticas que ya ha suscitado, como la teoría de los juegos, o que sean explotados más profundamente aun los recursos del cálculo de probabilidades, ...nuestra disciplina se ha convertido en un elemento activo de tal importancia y de tal exigencia, y ciertas ramas de las matemáticas se han desarrollado tan bien a su servicio, y como cargadas de savia, que, si bien parece aventurado decir, como algunos, que existen unas matemáticas "sociales", se puede, a nuestro parecer, sostener que las matemáticas actualmente vivas son también sociales"[59].

La historia de la evolución de las matemáticas en su contacto con la economía nos muestra que, como dice Morgenstern:

"Es imposible fijar límites al empleo de las matemáticas, continuamente están surgiendo nuevos problemas de carácter matemático, los cuales habrá que abordar con una nueva matemática"[60].

No hay pues nada en la naturaleza de esta ciencia que pueda excluir su uso decisivo en Economía. A este respecto podemos citar de nuevo a Morgenstern:

"Una de las consecuencias más notables ha sido que ciertas partes de la teoría económica han vuelto a adquirir interés práctico. Los economistas aconsejan a las empresas sobre planificación, estrategia de negocios, control de

---

59. A. Piatier, p. Cahuzac, L. Chambadal. *Economía y Matemáticas*. (Ariel, Barcelona, 1967) pág. 29

60. O. Morgenstern. "Límites al uso de las matemáticas en la economía". Recogido por Doblado Burón en: *Matemáticas para economistas 2*. (Ed. Cajas de Ahorro, Madrid, 1977).

stocks, política de precios, gestión de haberes de cartera, etc., mientras que antes apenas podían examinar siquiera superficialmente estas operaciones".

Todo lo anterior se ve reforzado por el desarrollo de las computadoras que está permitiendo la construcción de modelos que simulan sistemas complejos en los que intervienen gran cantidad de factores humanos y sociales, como la personalidad, la conducta económica, política y social, la estrategia, etc. La teoría de los juegos permite formalizar y matematizar estos modelos.

La *teoría del caos* y la más general *ciencia de la complejidad,* de reciente desarrollo, pretende ajustarse a las irregularidades y no linealidad del comportamiento. La matemática que interviene en estos sistemas complejos no es la tradicional. Las variables que describen el estado del sistema pueden tomar sólo algunos valores, que representan diferentes alternativas. Por ejemplo un inversor puede comprar, vender o guardar acciones, el tiempo puede sólo tomar valores discretos, que representen por ejemplo transacciones comerciales. Además el sistema evoluciona de manera que los cambios que experimenta vienen determinados por una ley que depende no sólo del estado del sistema sino también del resultado de un proceso en el que la incertidumbre juega un papel fundamental. Murray Gell Mann, describe así la matemática presente en estos modelos:

"De la clase de matemática discreta que hemos estado discutiendo suele decirse que es una matemática basada en las leyes. Es una matemática natural para los ordenadores digitales, y a menudo se aplica a la simulación de sistemas complejos adaptativos compuestos por multitud de agentes individuales, cada uno de ellos un sistema complejo adaptativo a su vez. Típicamente, los agentes –como los organismos en una unidad ecológica o los individuos y negocios en un sistema económico– desarrollan esquemas que describen el comportamiento de otros agentes y la manera de reaccionar ante él. En tales casos la matemática basada en leyes se convierte en una matemática basada en agentes"[61].

Sin embargo, y sin merma de la importancia de las matemáticas en el desarrollo de la economía, hay que reconocer que persisten algunas dificultades decisivas en la matematización de la misma, de las cuales una de vital importancia es cómo tener en cuenta de forma apropiada los valores difíciles de cuantificar, como son las actitudes, las creencias, las expectativas... Un intento de modelizar situaciones de incertidumbre e imprecisión incorporando también ciertos aspectos cualitativos, es la utilización de la *matemática de los subconjuntos borrosos* al campo de las actividades económicas y de la gestión empresarial.

---

61. Murray Gell Mann (1996): Op. cit., pág. 391

4. Referencias

BORT, A. *Principios de Teoría Económica*. Vol. 1. (Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1989).

BUNGE, Mario: *La ciencia su método y su filosofía*. (Siglo veinte, Buenos Aires, 1987).

BURTT, Edwin Arthur: *Los fundamentos metafísicos de la ciencia moderna*. (Ed. Sudamericana, Buenos Aires, 1960).

CAÑÓN LOYES, Camino: *La matemática creación y descubrimiento*. (Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1993).

CHALMERS, Alan F.: *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* (Siglo XXI, Madrid, 1988).

DAVIS, Philip J. y HERSH, Reuben: *Experiencia matemática*. (Labor, Madrid, 1988).

GARDNER, Martin: *¡Ajá! Paradojas*. (Labor. Barcelona 1986).

GRANGER, Gilles-Gaston: "Epistemología económica". En: *Tratado de lógica y conocimiento científico, dirigido por Jean Piaget*. Tomo VI-*epistemología de las ciencias del hombre*. (Paidos, Buenos Aires, 1979).

HILBERT, David: "On the infinite". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds). (Englewood Clifss, Prentice-Hall, 1964).

IFRAH, Georges: *Las cifras, historia de una gran invención*. (Alianza Editorial, Madrid, 1987).

KUHN, Thomas: *La estructura de las revoluciones científicas*. (Fondo de Cultura Económica, Madrid, 1971).

LAKATOS, Imre: *Pruebas y refutaciones*. (Alianza, Madrid, 1982).

LICHNEROWICZ, André: "Observaciones acerca de la matemática y la realidad". En *Tratado de lógica y conocimiento científico*. Tomo III-epistemología de la matemática. (Paidos, Buenos Aires, 1979).

LÓPEZ CACHERO, M.: "La construcción de la ciencia económica y el papel de la matemática". *Lecciones inaugurales* (U.P. Comillas, Madrid, 1981).

MANN, Murray Gell: *El quark y el jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo.* (Círculo de Lectores, Barcelona, 1996).

MILL, J.S.: *Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva.* D. (Jorro, Madrid, 1917).

MORGENSTERN,O.: "Límites al uso de las matemáticas en la economía". Recogido por Doblado Burón en: *Matemáticas para economistas 2.* (Ed. Cajas de Ahorro, Madrid, 1977).

PIAGET, Jean: *Tratado de Lógica y conocimiento científico.* Tomo VII-*clasificación de las ciencias y principales corrientes de la epistemología contemporánea.* (Paidós, Buenos Aires, 1979).

PIAGET, Jean: "Los datos genéticos". En: *Tratado de lógica y conocimiento científico.* Tomo III-*epistemología de la matemática.* (Paidos, Buenos Aires, 1979).

PIAGET, Jean: "Los problemas principales de la epistemología matemática". En: *Tratado de lógica y conocimiento científico.* Tomo III-*epistemología de la matemática.* (Paidos, Buenos Aires, 1979).

PIATIER, A., P. CAHUZAC, L. CHAMBADAL: *Economía y Matemáticas.* (Ariel, Barcelona, 1967).

Poincaré, Henri.: *La valeur de la sciencie.* (Flammarión, París, 1970).

POPPER, K. R.: *Conjeturas y refutaciones.* (Paidós Ibérica, Barcelona, 1983).

POPPER, Karl.: *La Lógica de la investigación científica.* (Tecnos, Madrid, 1962).

REY PASTOR, J. y BABINI, José.: *Historia de la Matemática.* Vol. II. (Gedisa, Barcelona, 1997).

RUSSELL, Bertrand.: *Evolución de mi pensamiento filosófico.* (Alianza, Madrid, 1976).

VON NEUMANN, John.: "El Matemático". En: SIGMA. *El mundo de las matemáticas,* Tomo. 5. (Grijalbo Madrid, 1983).

WARTOFSKY, Marx W.: *Introducción a la filosofía de la ciencia.* (Alianza Universidad Textos, Madrid, 1973).